日本オペレーションズ・リサーチ学会
2005年春季研究発表会

平均・分散・歪度モデルの効率的解法に関する研究

02702020 MTEC, 中央大学 ＊山本零 YAMAMOTO Rei
01102370 中央大学 今野浩 KONNO Hiroshi

1 はじめに

投資家は, 一般的にポートフォリオの期待リターンとその分散を見てポートフォリオを構築する. このモデルは平均・分散モデルとして, Markowitz によって提案されて以来, 様々な形で広く実務に利用されているモデルである. また, 平均・分散モデルは, (i) 資産の収益率分布が正規分布に従っている場合, または (ii) 投資家の効用関数が 2 次関数型である場合には, 期待効用最大化の原理と整合的であるため, 理論的な裏づけのあるモデルである.

しかしながら, このような仮定は現実的なものではない. これらの仮定をはずしたうえで, 期待効用最大化の原理との整合性を保つには, より高次のモーメント (歪度) を取り扱わなければならない.

ポートフォリオに歪度を取り入れた研究は, 過去にいくつか行われている. しかしながら, 実用的な規模に対して, 厳密な解法を適用した例はいまだ存在しない.

そこで本研究は, 実用的な規模での平均・分散・歪度モデルの効率的解法を提案し, 実用的な時間で求解できることを実証する.

2 定式化

市場には n 個の資産があるものとし, 構成するポートフォリオを $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ とする. このときの投資可能集合を

$$X=\left\{\sum_{j=1}^{n}x_j=1;\,0\le x_j\le u_j,\,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

とする.

またポートフォリオ $\boldsymbol{x}$ の期待収益率, 分散, 歪度をそれぞれ $E[R(\boldsymbol{x})]$, $V[R(\boldsymbol{x})]$, $k[R(\boldsymbol{x})]$ とすると

$$E[R(\boldsymbol{x})] = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \tag{1}$$

$$V[R(\boldsymbol{x})] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j\right)^2 \tag{2}$$

$$k[R(\boldsymbol{x})] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j\right)^3 \tag{3}$$

となる。ここで r_j は資産 j の期待収益率、r_{jt} は資産 j の第 t 期での収益率である。

このとき平均・分散・歪度モデルを以下のように定義する.

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最大化} & \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j\right)^3\\ \text{条件} & \displaystyle\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j\right)^2\le s^2\\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n}r_jx_j=r,\ \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right. \tag{4}$$

ここで s は許容するリスク量 (標準偏差), r はポートフォリオの期待収益率である.

3 アルゴリズム

問題 (4) は目的関数が非凹型関数であるため, 通常の凸計画アルゴリズムでは, 大域的最適解を求めることができない. そこで本研究では, 区分線形近似アルゴリズムを提案する. はじめに変数 z_t を以下のように定義する.

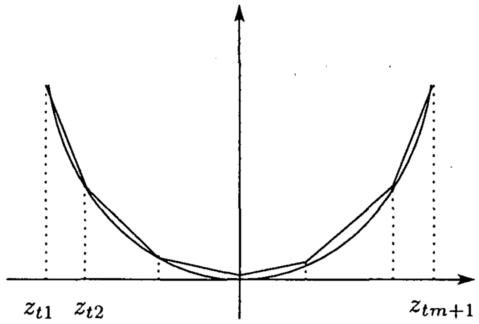
$$z_t=\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-r_j)x_j,\ t=1,2,\ldots,T \tag{5}$$

次に,

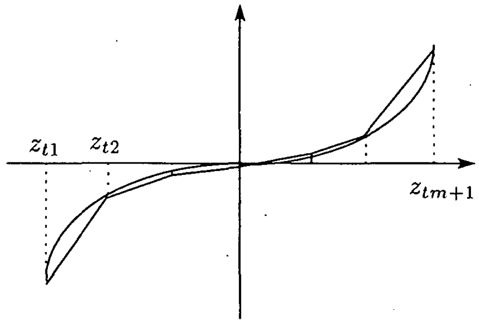
$$z_{t1} = \min\{z_t\mid \textstyle\sum r_jx_j=r,\ \boldsymbol{x}\in X\} \tag{6}$$

$$z_{tm+1} = \max\{z_t\mid \textstyle\sum r_jx_j=r,\ \boldsymbol{x}\in X\} \tag{7}$$

とし, 区間 $[z_{t1},z_{tm+1}]$ を m 等分することで, 歪度と分散の項に対し区分線形近似を行う (図 1).



(a) 分散



(b) 3次モーメント

図 1. 分散と歪度の区分線形近似

このように, 非線形の項を区分線形近似することで, 問題 (4) を 0-1 混合整数線形計画問題に直すことができる. しかしながら, この問題の解はあくまで問題 (4) の近似解である. 近似誤差が許容できない場合には 近似精度を向上させる必要がある.

アルゴリズム

1° 問題 (4) を区分線形近似した問題を解き, その最適解を z^* とする.

2° 近似誤差が許容誤差 ε 以内なら終了, そうでない場合は 3° へ.

3°

$$z_{ts} = \{z_{tk} \mid z_{ts} \leq z_t^* \leq z_{ts+1},\ k = 1, 2, \ldots, m\} \quad (8)$$

となる区間 s を選び (図 2), $z_{t1} := z_{ts-1}$, $z_{tm+1} := z_{ts+2}$ として 1° へ.

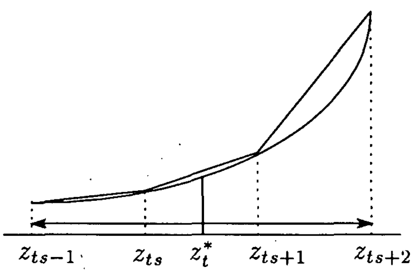


図 2. 区分区間の絞込み

4 計算機実験

以下に, 実際のデータを扱った計算機実験について示す. 使用したデータは東証 1 部の 900 社の月次収益率, インサンプル期間 T=36, 投資上限 u_j=5%, 区分区間数 m=10 である. また, 最適化には ILOG 社の CPLEX8.0 を使用した.

表 1 に, 投資対象銘柄数 n を変化させた場合の, 最適解と計算時間の変化を示す.

n	歪度	t 値	CPU(秒)	反復回数
200	1.82	4.86	73	2
300	2.33	6.21	42	2
400	2.87	7.66	67	2
500	3.26	8.70	66	2
600	3.34	8.91	58	2
700	3.52	9.38	139	2
800	3.77	10.05	115	2
900	3.88	10.34	350	2

表 1. 計算機実験結果

これより, 投資対象銘柄数 900 でも 350 秒で計算できていることがわかる. また, t 値は歪度に関する正規性の検定を行ったもので, 投資対象銘柄数 200 程度でも, 十分歪度の大きいポートフォリオを構築できていることもわかる.

5 考察と結果

以上の結果より, これまでの研究では解くことが困難であるとされてきた, 実務的な規模の平均・分散・歪度モデルを, 実用的な時間で求解できることを実証した. また, 過去の研究では, 投資対象銘柄数 100 程度しか扱うことができなかったが, 900 銘柄程度まで広げることで, かなり大きい歪度を持つポートフォリオが構築できるようになったといえる.

今後の課題としては, このモデルを用いたアウトオブサンプルでのパフォーマンス検証, ポートフォリオに歪度を取り入れることの有効性の検証があげられる.

参考文献

今野 浩, 「理財工学 I, II」, 日科技連出版, 1995, 1998.