

1. 一定半径の円と、この円からはみ出さないような数種の矩形とが与えられていて、この円から矩形の若干個をくり返しを許して切り取り、歩留りを最高にする（切り取る矩形の面積の和を最大にする）にはどう取ればよいか。
 2. 整数の最適解が必要な場合に、小数部を有する解を条件にふれないように丸める一般的な方法。
 3. 上のようにして丸めた解が整数解の中の最適解であるための条件。
- 最後に種々の便宜を与えて頂いた国鉄名古屋工場の管調査課長、羽澄正彦氏等に感謝の意を表します。

引用文献

- 1) Houthakker, H. S., "On the Numerical Solution of the Transportation Problem," *J. Opns. Res. Soc. Am.*, 3 (1955), pp. 210~214.
- 2) Nyles V. Reinfeld, "Vogel's Approximation Method," *Tooling and Production*, April, 1957.
- 3) Kurt Eisemann, "The Trim Problem," *Management Science*, 3 (1957), No. 3, pp. 279~284.

カメラ修理サービスにおける待合わせの問題

山 田 隆 一*

I ま え が き

この研究は、当社のカメラ修理部門で、そこに配置すべき修理工の人員を、修理カメラの到着状況とその修理所要時間との関連において、待合わせの問題の一例として考察したものである。われわれの周囲には、たとえば販売の第一線における顧客の受付係や、品出係の適正要員の問題とか、フィルム現像設備の適正規模の問題とか、その他多くの待合わせ行列の問題があり、それぞれ興味ある研究対象であると思う。ここに報告するカメラ修理の問題は、カメラメーカーにとってはアフターサービスの重要な一分野であり、近來各メーカーは、こぞって良好な品質とサービスを顧客に提供することに努力するようになった。そこで会社のポリシーとして、顧客の待合わせ時間を一定限度以内に押さえたとき、修理カメラの到着数の変動に対して、修理工を何人位持つたらよいかを決める必要がおこってきた。そこで修理カメラの到着数およびその修理所要時

* 小西写真工業(株)管理本部、昭和32年11月2日講演、11月25日原稿受理

間の分布を調べ、これと待合わせ時間および修理工の人員との関係を明らかにして、適正な人員配置と、良好なサービスを行うための計画を、グラフにより容易に行う方法を考察した。考察の内容には未だ検討を要する点もあると思うが、企業における一つのケーススタディとして、何かの参考になれば幸である。

なおここに使用されているデータは、すべて現実の数にある倍数を掛けたデータであることをおことわりしておく。

II 考察の理論

修理サービスにおける待合わせの問題を考えるにあたって、まず修理所要時間についての分布および修理カメラの到着数についての分布を調べると、後述するように、前者は指数分布で、後者はポアソン分布で十分近似できることがわかった。そこで

a : 修理工の数 人

λ : 修理カメラの平均到着数 個/時

μ : 同平均修理数 個/人時

n : 修理中のカメラの数と待っているカメラの数との合計

P_n : 上のような状態のおこる確率

とすると、 $n > a$ の場合は、 $(n-a)$ 個のカメラが待合わせの状態にある。したがって時刻 t において、行列の長さが $(n-a)$ である確率 P_n の満足すべき微分方程式は、

$$P_n' = -(\lambda + a\mu) P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + a\mu P_{n+1}(t) \quad (1)$$

となる。

定常状態では $P_n' = 0$ となるから、つぎの方程式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} P_0' = 0 &= -\lambda P_0 + \mu P_1 \\ P_1' = 0 &= \lambda P_0 - (\lambda + \mu) P_1 + 2\mu P_2 \\ P_2' = 0 &= \lambda P_1 - (\lambda + 2\mu) P_2 + 3\mu P_3 \\ &\dots\dots\dots \\ P_a' = 0 &= \lambda P_{a-1} - (\lambda + a\mu) P_a + a\mu P_{a+1} \\ P_{a+1}' = 0 &= \lambda P_a - (\lambda + a\mu) P_{a+1} + a\mu P_{a+2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

輻輳が修理工の数 a に達すると

$$\left. \begin{aligned} P_a' = 0 &= \lambda P_{a-1} - (\lambda + a\mu) P_a + a\mu P_{a+1} \\ P_{a+1}' = 0 &= \lambda P_a - (\lambda + a\mu) P_{a+1} + a\mu P_{a+2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

(2)式を順次にとくと、定常解は、

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 \quad (n \leq a) \quad (3)$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{a! a^{n-a}} P_0 \quad (n \geq a) \quad (4)$$

となる。

待合わせのおこるのは (4) 式の場合であるから、

$$\sum_{n=a}^{\infty} P_n = \frac{a^a}{a!} P_0 \sum_{n=a}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{a\mu} \right)^n \tag{5}$$

この式において $\lambda/\mu > a$ のときは、 $\sum_{n=a}^{\infty} (\lambda/a\mu)^n$ は発散し、待合わせの状態は無限に増大する。したがって少くとも待合わせの状態をある限度内に押さえたいときには、修理工の人数 a は λ/μ より大きい値でなくてはならないことがわかる。

なお P_0 は全確率 1 から、(4) (5) 式より

$$P_0 = \left[e^{\lambda/\mu} + \frac{1}{(a-\lambda/\mu)} \cdot \frac{(\lambda/\mu)^a}{(a-1)!} \cdot \sum_{n=a}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right]^{-1} \tag{6}$$

で求められる。

上記の如く、 $n > a$ となると $(n-a)$ 個のカメラが待合わせの状態になるので、カメラ 1 個当たり平均待合わせ時間は、単位時間内の待合わせ時間の総和 $\sum_{n=a+1}^{\infty} (n-a) P_n$ を、単位時間に来る修理カメラの平均数 λ で割って、

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=a+1}^{\infty} (n-a) P_n = \frac{1}{\mu(a-\lambda/\mu)^2} \cdot \frac{(\lambda/\mu)^a}{(a-1)!} P_0 \tag{7}$$

となる。

顧客が修理カメラを持参してから、修理が完了して顧客の手に渡るまでの時間は、修理所要時間と、修理にかかる迄の待合わせ時間の 2 つの部分にわけられる。したがってその平均値 K は、

$$K = \bar{\tau} + 1/\mu \tag{8}$$

であらわされる。

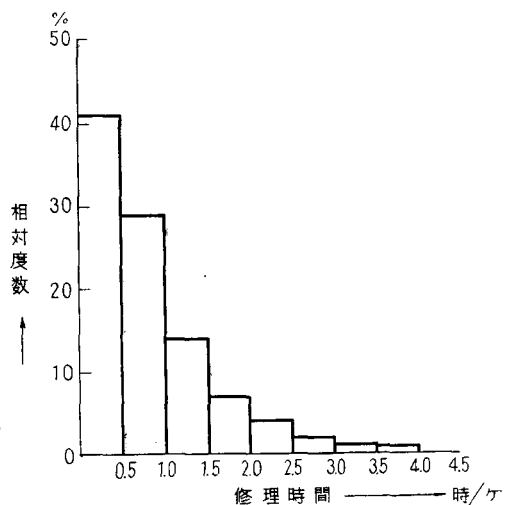
■ 計 算

以上の理論にしたがって、当社のカメラ修理部門におけるある時期のデータを使用して計算した結果は、つぎの通りである。

1. 修理所要時間の分布

5,696 台の修理カメラについて、1 台ごとに修理所要時間のデータを取り、その分布をヒストグラムに表わすと第 1 図のようになる。

ヒストグラムから、修理所要時間の分布は指数分布をもつて極めて良く近似できることが推定される。そこでセミログペーパーに相対度数をとってみると、第 2 図のようにほぼ直線に乗ることがわかった。



第 1 図

図から $\mu=1.15$ ケ/人時と求められるので、
分布関数は

$$P(t) = P_0 e^{-1.15t}$$

とあらわされる。

2. 修理カメラの到着数の分布

修理カメラの到着数の分布を同様にヒストグラムに表わすと、第3図のようになり、ポアソン分布で十分近似できることが推定される。

計算から到着数の平均値は、

$$\lambda = 8.19 \text{ 個/時}$$

と求められるので、分布関数は

$$P_n = \frac{(8.19t)^n}{n!} e^{-8.19t}$$

とあらわされる。

上記の μ および λ の値から、

$$\lambda/\mu = 8.19/1.15 = 7.12$$

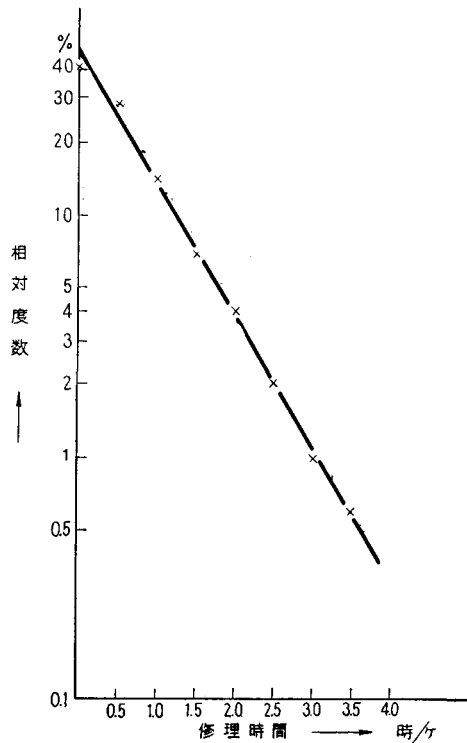
となる。

3. モンテカルロ法によるシミュレーション

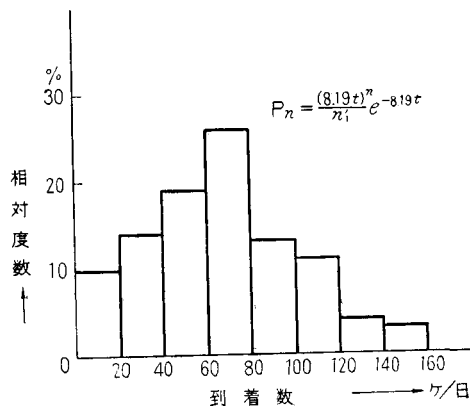
考察の理論における(5)式において、 $a > \lambda/\mu$ すなわち修理工の人員が7.12人より多いときは、 $\sum_{n=a}^{\infty} (\lambda/a\mu)^n$ は収斂するが、 $a < \lambda/\mu$ すなわち修理工の人員が7.12人より少ないときは、 $\sum_{n=a}^{\infty} (\lambda/a\mu)^n$ は発散し、待合わせの状態にあるカメラの個数は無限に増大する。

そこでつぎのような諸点について知るため、モンテカルロ法による考察を行った。

- イ. われわれのとりあげた時期における待合わせ行列の状態が、どのような姿をしていたか。
- ロ. そのような状態下においては、修理工の実質人員（修理工の実際人数×稼働率）はほぼ何人であつたか。
- ハ. 修理工の人員（以下実質人員のことをいう。したがって修理工の実際人数は、これを基準



第2図



第3図

稼働率で割つた上で、端数をまるめて整数とする必要が生ずるであろう。)を現在の人員からある数に増減した場合、待合わせ行列の状態はどのようになるであろうか。

考察の狙いが凡その傾向を知ることにあつたので、つぎのような簡略な方法をとった。

まず100枚のカードを作り、これにポアソン分布表から ($\lambda=8.19=8$) それぞれつぎのような枚数で、番号を打つたカードを作つた。

| 番号 | カード枚数 | 番号 | カード枚数 | 番号 | カード枚数 | 番号 | カード枚数 |
|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|
| 2 | 1 | 6 | 12 | 10 | 10 | 14 | 2 |
| 3 | 3 | 7 | 14 | 11 | 8 | 15 | 1 |
| 4 | 5 | 8 | 14 | 12 | 5 | 16 | 1 |
| 5 | 8 | 9 | 13 | 13 | 3 | | |

これに乱数表で索引番号をふり、このカードを単位時間当りに到着する修理カメラのモデルとした。

ほぼ同様な方法で別の100枚のカードを、1台当りカメラ修理所要時間のモデルとし、両者を組合わせて、乱数表を使つて、修理サービスにおいて生ずる待合わせ行列の状態のシミュレーションモデルによる考察を行つた。

まず $a < \lambda/\mu (=7.12)$ の場合の一例として、 $a=7$ とした場合の待合わせ行列の状態をモデル化してみた。実際の作業方法を再現するため、乱数表によつて7人の作業者に修理カメラを与えることにし、1日7時間稼働して、仕掛中および未着手のため翌日廻しになつたカメラの個数を待合わせ行列の個数とした。

計算値はつぎのようになり、待合わせ行列の数は当然増大する一方であつた。

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 第1日 | 第2日 | 第3日 | 第4日 | 第5日 | ... |
| 2個 | 3個 | 18個 | 32個 | 57個 | ... |

つぎに $a > \lambda/\mu (7.12)$ の場合の一例として、 $a=8$ とした場合を同様に計算すると、

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 第1日 | 第2日 | 第3日 | 第4日 | 第5日 | ... |
| 5個 | 2個 | 0個 | 3個 | 1個 | ... |

となり、ほぼ定常状態であると考えられる。

この期間における毎日の実測値は、待合わせ行列にあるカメラが僅かに増大する傾向を示しているので、この期間における修理工の人員は、7~8の値更に細かくいえば $\lambda/\mu (=7.12)$ より小さくしかも7.12に非常に近い値であったことが推測された。

4. 平均待合わせ時間 ($\bar{\tau}$) の計算

以上の考察により、待合わせカメラの増大の傾向をなくし、会社の方針として決めた一定の時間内に修理を完了して、顧客に返送しうするためには、 λ, μ が上記の値の場合に7.12人以上の

修理工が必要であることが判つた。

しかし μ は6カ月～1年程度ではほぼ一定であるが、 λ は日々変化するから、 λ およびこれに応ずる人員 a を種々に変えた場合の、平均待合わせ時間 $\bar{\tau}$ を算出する必要がある。

$\bar{\tau}$ は II-(7) 式で示されるが、この式の中には P_0 が入っているのので、 $\bar{\tau}$ を計算するためには、まず II-(6) 式により P_0 を算出しなければならない。

計算結果の一例を第1表に示す。

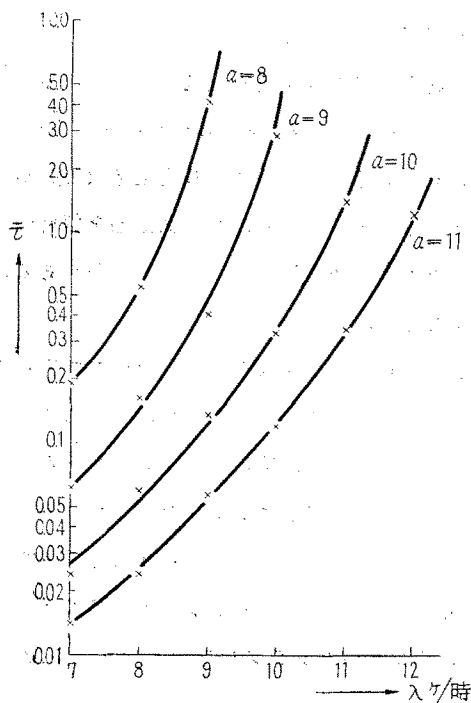
第1表 P_0 の計算値の一例

| $a \backslash \lambda$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 8 | 1.9×10^{-3} | 5.5×10^{-4} | 5.5×10^{-5} | | | |
| 9 | 2.1×10^{-3} | 7.6×10^{-4} | 2.3×10^{-4} | 4.3×10^{-5} | | |
| 10 | 2.2×10^{-3} | 8.2×10^{-4} | 3.1×10^{-4} | 9.4×10^{-5} | 1.8×10^{-5} | |
| 11 | 2.2×10^{-3} | 8.8×10^{-4} | 3.7×10^{-4} | 3.1×10^{-4} | 4.8×10^{-5} | 1.1×10^{-5} |

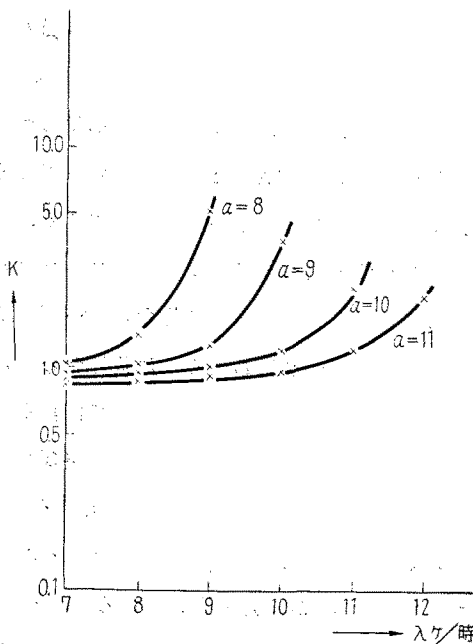
この P_0 の値を使つて $\bar{\tau}$ を計算した結果の一例を第2表に示す。

λ および a が種々に変化した場合の $\bar{\tau}$ の値をグラフに表わすと、第4図のようになる。

なお $\bar{\tau}$ および $1/\mu$ の値から K を計算し、同様にグラフに表わすと第5図のようになる。



第4図



第5図

第2表 $\bar{\tau}$ の計算値の一例

| $a \backslash \lambda$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 8 | 0.196 | 0.547 | 4.250 | | | |
| 9 | 0.062 | 0.165 | 0.402 | 2.940 | | |
| 10 | 0.024 | 0.061 | 0.137 | 0.331 | 1.436 | |
| 11 | 0.014 | 0.024 | 0.058 | 0.123 | 0.350 | 1.230 |

IV 考 察

第2表の $\bar{\tau}$ の値および第4図のグラフからわかることは、

イ. a が λ/μ 入に近づくと、 $\bar{\tau}$ は急速に増大すること。

ロ. a がある程度以上大きくなると $\bar{\tau}$ の減少傾向が鈍くなり、遂に飽和点に達すると思われること。

このことは、平均待合わせ時間を、このサービス系の能率を示す1つの測度として判断すれば修理工の数が λ/μ に近くなるほど、サービス系の能率が急速に落ちること、また逆にある程度の修理工がおれば、それ以上修理工を増員しても、待合わせ行列の状態は殆んど変わらないことを意味している。

特に顧客からカメラが到着してから、修理が完了して返すまでの時間 K について考えた場合には、 $\bar{\tau}$ がある値以下になると $1/\mu$ が大ききいて来て、 K の値は殆んど変らなくなる。したがって修理工をこの飽和点以上に増員することは、不経済なこととなる。

待合わせ時間との関連で修理工の適正人員をきめる場合、当然経済的な問題が入ってくる。しかし修理工の人員の費用計算はともかく、ポリシーとして待合わせ時間をどの辺に押さえるかは、それによつて顧客に良好なサービスを提供して、満足を与える程度、更にこの満足感(好感)が、会社の全般的な販売実績にどのように響いてくるかということにもよる。この満足感を貨幣価値的に表現するのは仲々むずかしいことである。また現実には同業他社とのサービス競争もあるので、これらを種々勘案してポリシーをきめなければならない。

しかし一旦ポリシーによつて待合わせ時間の基準が決まれば、第4図のグラフを使つて容易に修理サービスの管理が行われる。勿論待合わせ時間の基準を決める場合には、平均待合わせ時間と共に、ある危険率(たとえば5%)で信頼限界を出し、その両者の値からポリシーを決めるべきである。また情勢の変化から μ の値が変つた場合には、再計算してグラフを書きかえる必要がある。勿論グラフとしては、 λ/μ に対するのグラフを作ることによつて μ の変化も折りこめる訳である。実際に現場で使うときには、そのつど λ/μ を計算してからグラフを引くことになるので、むしろ μ が一定と考えられる間はその μ の値を用いたグラフを与えておき、 μ が変つたとき取りかえる方法の方が誤りが少いと思う。

V 結 論

以上の考察の結論は、

1. 待合わせ行列の手法を活用して、平均待合わせ時間と、修理カメラの到着数および修理所要人員との関係を知るため、第4図のグラフを作った。このグラフを修理部門の管理者に与えておけば、面倒な計算は一切することなく、図によつて容易に以下に記す管理を行うことができる。

2. 顧客の待合わせ時間を、会社の方針として一定時間以内に押さえた場合、修理カメラの到着数のある値に対する修理工の適正人員は、当該の $(\lambda, \bar{\tau})$ の点を通る a 曲線の値によつて容易に決定することができる。

3. 種々の理由から修理工の人員 (a) が一定という制約のあるときは、 λ の増減に応じて $\bar{\tau}$ が増減するが、 λ のある値に対する $\bar{\tau}$ の値は当該の λ および a 曲線に対応する $\bar{\tau}$ の値として、グラフから容易に知ることができる。

4. 修理工の人員が一定であり、かつ待合わせ時間も方針として一定限界内に押さえるためには、能力をオーバーする分を外注しなければならないが、その外注すべきカメラの台数は、所定の $\bar{\tau}$ および a 曲線に対応する λ と、実際の到着数との差として容易に知ることができる。これによつて日々の λ の変動に対して合理的な対策を行うことができるようになった。

勿論 $\bar{\tau}$ のグラフの代りに K のグラフを書いても同様なことがいえるが、 $\bar{\tau}$ の値が小さいところでは、 K のグラフは近接して使いにくいので $\bar{\tau}$ のグラフを用いた。

終りにこの研究に当り、種々熱心なる御指導を頂いた慶応大学の林喜男氏および、考察にあつて非常に参考になった伏見康治教授の著書に、深く感謝いたします。