DPの林業への応用

——間伐量の決定の一考察——

清家　正，小田中敏男*

1. 緒　　言

制御過程を一般的に定式化すると

（1）　$\dfrac{dx}{dt}=G(x,\ y)$,

（2）　$x(0)=C$,

なる制約条件のもとで

（3）　$J(y)=\int_0^T F(x,\ y)\,dt$

なる量を Max ならしめる $y(t)$ を求めるという変分方の問題になるものが多い．ここに $x(t)$ は状態函数 (state function)，$y(t)$ は制御函数 (control function)，$x(t)$ は初期函数 (initial state) である．

本論文においてはこの種の問題を先ずDPの手法により計算する方法を説明し，つぎに林業において最大の収獲量を得るためには如何なる間伐法を実施すべきかという問題を，土佐地方ひのき林林分収穫表を例として論ずるものである．

2. 変方法と DP[1)]

1)　$\dfrac{dx}{dt}=G(x,\ y)$,

2)　$x(0)=C$,

3)　$J(y)=\int_0^T F(x,\ y)\,dt$,

において

4)　$\underset{y}{\mathrm{Max}}\ J(y)=f(C,\ T)$,

とおけば，

5)　$$f(C,\ T)=\underset{y[0\cdot S]}{\mathrm{Max}}\left[\int_0^S F(x,\ y)\,dt+f(C(S))\right]$$
$$=\underset{y[0\cdot S]}{\mathrm{Max}}[F(c,\ y(0))S+f(C+SG(c,\ y(0))+0(S)]$$

が成立する．

いま

6)　$0\leqq y\leqq Ax$

なる制約条件のもとで，1)，2)，3)，6) 式を離散的に考えれば，

---

* 東京都立工業短期大学，昭和33年4月20日講演，11月21日受理

$$1)' \quad x_{k+1}=x_k+\Delta G(x_k,\ y_k), \qquad x_0=C,$$

$$2)' \quad x_0=C,$$

$$3)' \quad J(\{y_k\})=\Delta\sum_{k=0}^{N}F(x_k,\ y_k),$$

$$6)' \quad 0\leqq y_k\leqq Ax_k, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\cdot\cdot\cdot\cdot N,$$

となる，ここに $x_k=x(k\cdot\Delta)$，$y_k=y(k\cdot\Delta)$，$N\Delta=T$，である．

いま

$$4)' \quad f_N(C)=\underset{y_k}{\mathrm{Max}}\ J(\{y_k\})$$

とおけば，5) 式は近似的に

$$5)' \quad f_{N+1}(c)=\underset{0\leqq v\leqq Ac}{\mathrm{Max}}\left[\Delta F(c,v)+f_N(c+\Delta G(c,v))\right],$$

とおき換えることができる．ここに $y_0=v$ とした．

また F と G に対する適当な条件のもとで

$$\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{lins}}\ f_N(C)=f(C,\ T)$$

なることが証明せられるので，われわれは変分法の問題を DP を用いて解くことができるわけである．

3. 問題とその定式化

つぎの表は土佐地方国有林のひのき人工林の林分収穫表である．[4)]

第1表（その1）　（1等地）

林令	主林木幹材積	副林木幹材積	主副幹材積	材木幹材積連年成長量	合計総収穫量
10	19.7	11.8	19.7	9.9	19.7
15	57.3	25.1	69.1	15.5	69.1
20	109.8	34.5	134.9	18.2	146.7
25	166.4	30.2	200.9	16.4	237.8
30	218.2	25.5	248.4	13.8	319.8
35	261.7	23.9	287.2	11.8	388.8
40	296.7	23.0	320.6	10.5	447.7
45	326.1	22.0	349.1	9.5	500.1
50	351.5	20.3	373.5	8.5	547.5
55	373.8	18.5	394.1	7.6	590.1
60	393.3	16.6	411.8	6.7	628.1
65	410.2	15.0	446.8	6.0	661.6
70	425.0	14.0	440.0	5.4	691.4
75	437.8	13.4	451.8	4.9	718.2
80			462.5		742.9

第1表（その2）　（2等地）

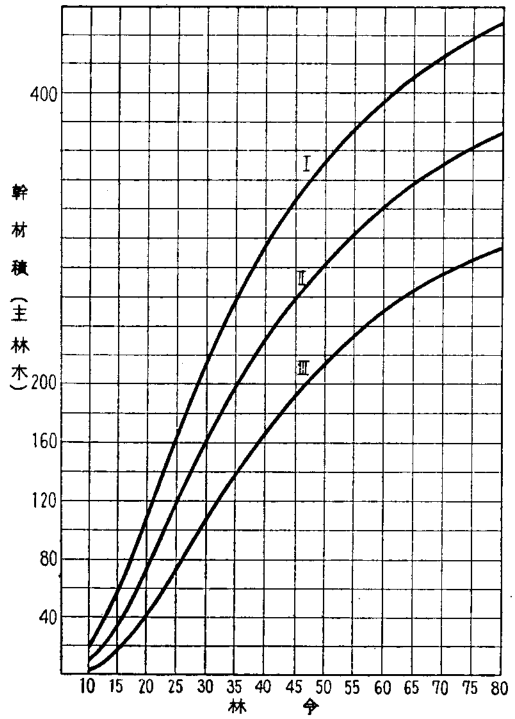
林令	主材木幹材積	副材木幹材積	主副幹材積	材木幹材積連年成長量	合計総収穫量
10	10.6		10.6	5.3	10.6
15	33.6	3.5	37.1	9.8	37.1
20	73.0	9.4	82.4	12.7	85.9
25	120.8	15.7	136.5	12.5	149.4
30	163.2	18.0	181.2	11.0	209.8
35	199.5	18.6	218.1	10.1	364.7
40	231.2	18.6	249.8	9.2	315.0
45	259.1	17.9	277.0	8.2	360.8
50	283.5	16.6	300.1	7.2	401.8
55	304.5	15.1	319.6	6.3	437.9
60	322.8	13.3	336.1	5.5	469.5
65	338.4	11.9	350.3	4.8	497.0
70	351.7	10.9	362.6	4.4	521.2
75	363.0	10.5	373.5	4.1	543.0
80	373.0	10.5	383.5		563.5

第1表（その3）　（3等地）

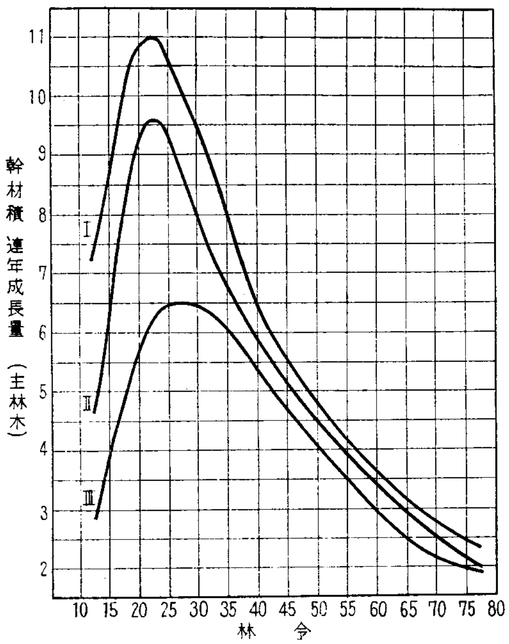
林令	主材木幹材積	副材木幹材積	主副幹材積	材木幹材積連年成長量	合計総収穫量
10	4.8		4.8	3.0	4.8
15	18.8	1.0	19.8	5.5	19.8
20	43.2	3.0	46.2	7.2	47.2
25	74.4	5.0	79.4	7.8	83.4
30	107.0	6.5	113.5	7.8	122.5
35	138.7	7.5	146.2	7.4	161.7
40	167.2	8.4	175.6	6.7	198.6
45	192.3	8.6	200.9	6.1	232.3
50	214.4	8.2	222.6	5.3	262.6
55	235.5	7.6	241.1	4.6	289.3
60	249.6	7.1	256.7	4.1	312.5
65	263.3	6.6	269.9	3.6	332.8
70	275.0	6.3	281.3	3.3	350.8
75	285.3	6.1	291.4	3.1	367.2
80	294.7	6.1	300.8		382.7

本収穫表より最大の総収穫量を得るには如何なる間伐法を実施すべきかを求める．

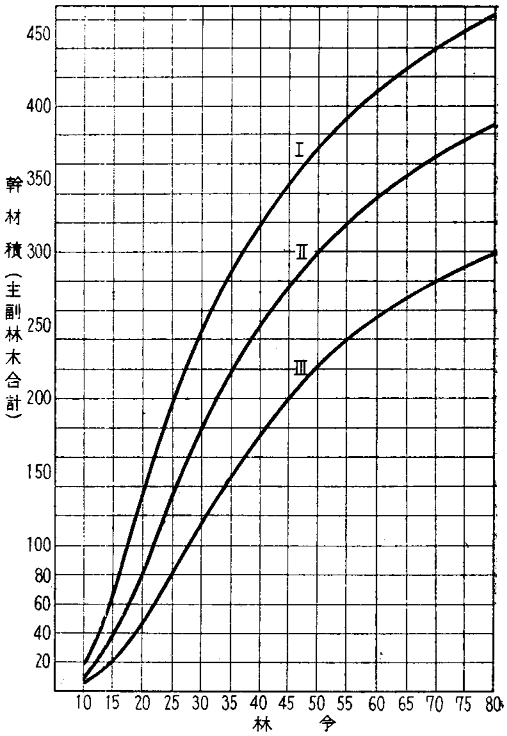
ここに主林木とはある方式により，間伐を施行した場合残存される林木をいう．副林木とはその際伐採される林木をいう．われわれの問題は最終期末における主林木幹材積 $x(t)$ と，それまでに間伐された副林木幹材積 $y(t)$ の合計すなわち総収穫量を最大ならしめる各林令に対する副林木の幹材積 $y(t)$ を求める



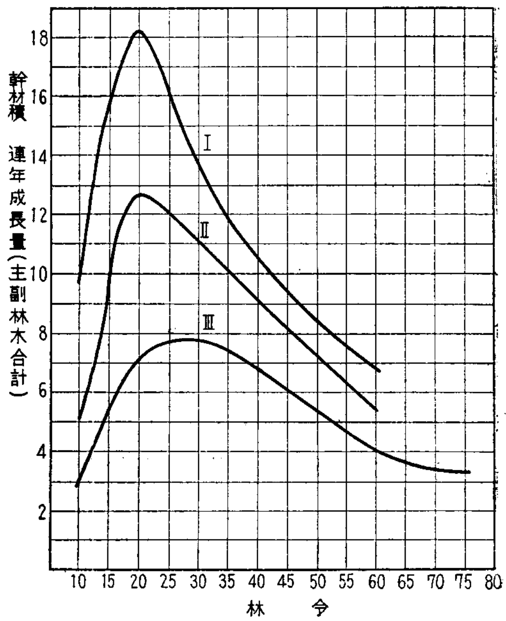
第 1 図(その 1)



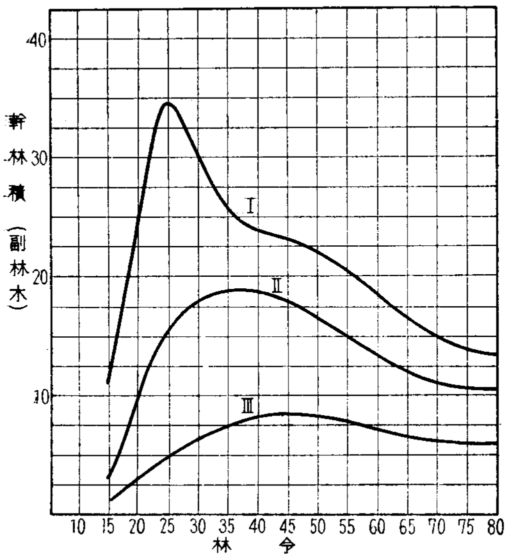
第 1 図(その 2)



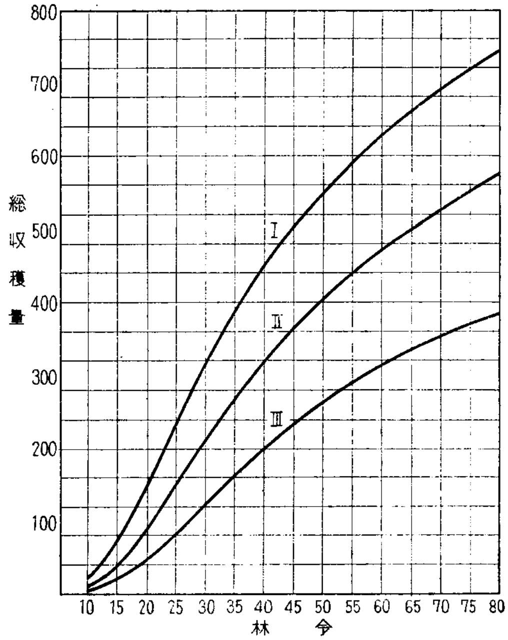
第 1 図(その 4)



第 1 図(その 5)



第 1 図(その 3)



第 1 図(その 6)

にある.

また幹材積連年成長量 $z(t)$ は，主林木の場合，前期および後期の主林木幹材積の差を期間年数（5年）で割ったものであり，主副林木合計の場合は前期の主林木幹材積と後期の主，副林木合計幹材積の差を期間年数（5年）で割ったものである.

近似的に

$$Z(t)=\frac{x(t+\Delta)-x(t)}{\Delta}\fallingdotseq\frac{dx}{dt}$$

と考えられる.

勿論この間伐法は林令の地況，林況，経営方針，済事情に応じて適当に定むべきであるが，本方法は国有林等経済事情の影響を余り受けぬ場合において，総収穫量を最大ならしめる目的の場合において特に有効と思われる.

またこの場合収穫林令は一定60年としたが，最適な収穫林令を求めることも問題である．この点については後に論ずる.

いま寺崎式B種間伐法を施行した場合

$$0\leqq y(t)\leqq 0.2x(t)$$

であり，主林木幹材積連年成長量が

$$\frac{dx}{dt}=G(x,y)$$

で定まったとする．ここに $x(0)=C$ と仮定する．

いま総収穫量

$$7)\qquad J(y)=x(\tau)+\lambda\int_0^T y(t)\,dt,$$

を最大ならしめる $y(t)$ を求めることである．

$$8)\qquad f(C,\ T)=\underset{y}{\mathrm{Max}}\,T(y)$$

とおけば

$$f(C,\ \Delta)=\underset{0\leqq y(0)\leqq 0\cdot 2c}{\mathrm{Max}}\left[C+\left|\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}\Delta+\lambda y(0)\,\Delta\right]$$

$$9)\qquad f(C,\ T)=\underset{0\leqq y(0)\leqq 02\cdot c}{\mathrm{Max}}\left[\lambda y(0)\,\Delta+f\left(c+\left|\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}\Delta,\ T-\Delta\right)\right]$$

が成立する．

4. $G(x,\ y)$ の推定と数値計算法

主林木幹材積は第１図より明らかなる如く Logistic 曲線[5] に適合すると考えられる．

したがって主林木連年成長量 $\dfrac{dx}{dt}$

は

$$10)\qquad \frac{dx}{dt}=\alpha x-\beta x^2$$

と表わすことができる．

これに対して間伐量が如何なる関係を有するかを推定することは重要な問題であるが，林業において未研究のようである．実際若しこれを正確に求めんとするには長年月に亘り，各種の間伐法を同一条件のもとに施行し，その結果より実験式を推定することが必要になるわけである．OR の問題にはこのように，ある system に属する state function と control function の関係が明確につかまれているものが多い．特に DP においてはこのような DP 以前の問題が準備されていないためその実施が困難になっているようである．

さてわれわれは林業の間伐法より推容して

$$10)'\qquad \frac{dx}{dt}=\alpha(x-y)-\beta(x-y)^2$$

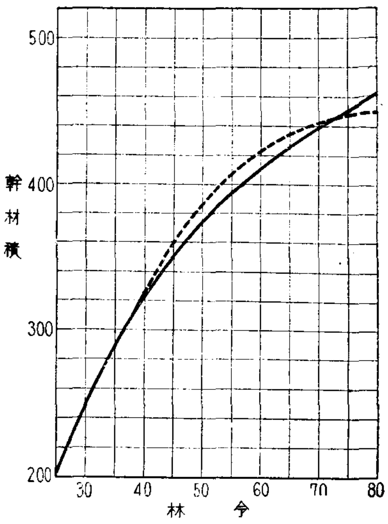
と仮定した．ただし $x(t)$ は間伐直前の主林木幹材積にとる．

すなわち第二項は幹材積の増加に対する抵抗を減少するという間伐法本来の目的を表わす項であり，第一項は余り間伐量が多すぎるとかえって生長を妨害すると云うことを暗示している．このことは実際の林業経営の常識と合っているわけである．いま第１表（その１）の主副林木合

計幹材積の増加傾向に対して Logistic 曲線をあてはめて計算してみると第2表，第2図のようになる．この場合間伐直前の主林木幹材積がわからぬため近似的に主副林木合計幹林積をとった．

第 2 表

林 令	t	幹材積収穫量	計算値
25	0	200.9	204.4
30	1	248.4	244.8
35	2	287.2	285.5
40	3	320.6	323.9
45	4	349.1	357.8
50	5	373.5	385.8
55	6	394.1	407.6
60	7	411.8	423.7
65	8	426.8	435.1
70	9	440.0	443.0
75	10	451.8	448.3
80	11	462.5	451.8



第 2 図

さてわれわれは 9) 式を離散的に考えて

$$f_1(c) = \underset{0 \leqq y \leqq 0 \cdot 2c}{\mathrm{Max}} \left[\lambda y(0) + c + \left| \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} \right] \tag{11}$$

$$f_N(c) = \underset{\leqq y(0) \leqq 02 \cdot c}{\mathrm{Max}} \left[\lambda y(0) + f_{N-1}\left(c + \left| \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} \Delta\right) \right], \tag{12}$$

を得る．

いま $\lambda=1$, $c=200\sim450$ として f_1, f_2, f_3, f_4, y_1, y_2, y_3, y_4 を求めれば第3図，第3表のようになる．

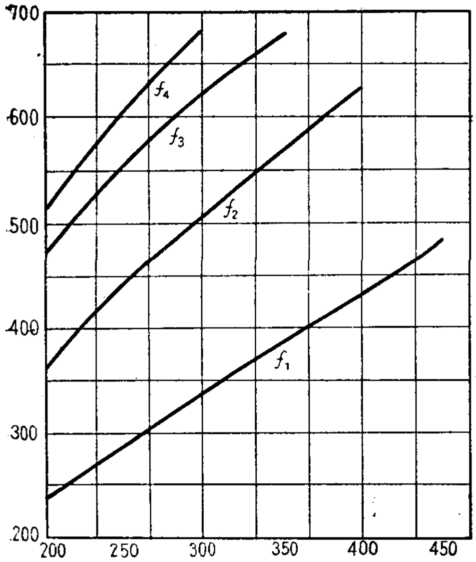
f_N, y_N 夫々 N 期間全体に亘る最先の総収穫量，N 期間全体を考慮した場合の全期の最適な間伐量を表わしているわけである．われわれは $N=10$ すべきであるが計算の都合上 $N=4$ としたが，それはそれとして以上のような意味を有するわけである．

第3表（その1）

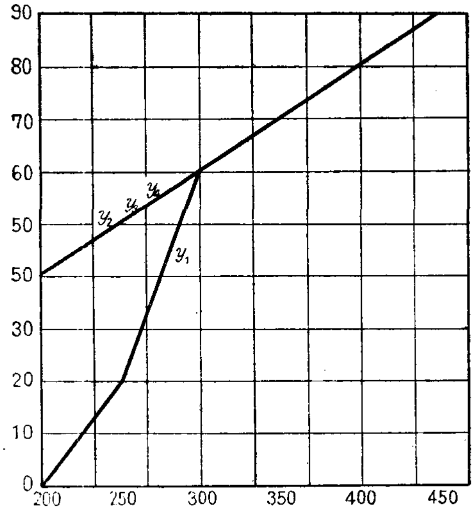
c \ f	f_1	f_2	f_3	f_4
200	240	363	472	512
250	291	439	556	606
300	341	508	628	688
350	389	571	682	752
400	434	630	710	790
450	478	685	775	865

第3表（その2）

c \ y	y_1	y_2	y_3	y_4
200	0	40	40	40
250	20	50	50	50
300	60	60	60	60
350	70	70	70	70
400	80	80	80	80
450	90	90	90	90



第 3 図 (その 1)



第 3 図 (その 2)

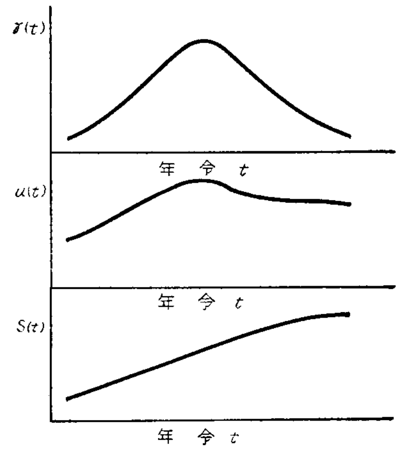
5. 議　　論

この最適政策と実際の間伐量（一等地副林木幹材積）を比較すると相当の差異がめ認られる．

この原因については 1) $\frac{dx}{dt}=G(x,\ y)$ の推定の不備と 2) $\lambda=1$ としたことに原因ありと思われる．1) に関しては林業における今後の研究にまつとし，2) は主林木幹林積と副林幹材積の価値の比較による定まるもので，当然林令の関数として表現すべきである．これ等の点についてはつぎの機会に改めて考察することにする．

更に一等地，二等地，三等地の計算は，別のものとして考える必要はなく，$\alpha\ \beta\ C$ を媒介変数として夫々多等地に応じて変化させれば，同一方法で処理できるわけである．

以上収穫林令を一定とした場合の総収穫量を最大ならしめる間伐法を求めたのであるが，前述のようにかかる間伐法を実施した場合，最適な収穫年数を決定することも一問題である．この問題に対して R. Bellman による設備取替政策の方式を利用することも可能と思われる．[3]



すなわち今回のように時間の函数として，

$r(t)$； 年令 t の副林木幹材積売却値，

$u(t)$； 〃 主林木副林木管理費用，

$S(t)$； 〃 主主林木幹材積売却値，

P ； 〃 新しい苗の購入費用，

が測定された場合，任意の年において，主林木を維持するか，または新しい苗を購入するかのいずれかであるとする．

いま $f(t)$；最適政策を用いた場合年令の主林木副林木からの全収益とすれば，$f(t)$ はつぎの函数方程式を満足せねばならぬ．

$$f(t)=\mathrm{Max}\begin{bmatrix} r(t)-u(t)+af(t+1) \\ S(t)-p+r(0)-u(0)+af(1) \end{bmatrix}$$

こゝに a は割引率で $0<a<1$ である．

上式を解けば最適な収穫年数を決定することができる．

本論文で論じた問題は林業の問題であるが，この種の型は OR の他の問題たとえば，生産工学に多く起る管理問題等に応用される可能性が多いと思われる．

最後に貴重な資料を提出下さった林業試験所の有水彊技官と間伐法についての有益な忠言を賜わった寺崎博士に感謝するものである．

参　考　文　献

1) R. Bellman; "Dynamic Programing" Princton Univercity Press (1957)

2) R. Bellman; "On the Application of the theory of Dynanic Programing to the Study of Control Process" "Proceding of symposium on non liner circuite analysis (1956)

3) R. Bellman; "Equipment replacement policy" *J. Soc. Induat. Appl. math.* **3** No. 3 September, (1955)

4) 土佐地方；ひのき林林分収穫表，林野庁林業試験所（昭和33年3月）

5) たとえば Hald; "*Statidtical Theory With Engineering Applications*" John Wiley Sons (1951)