〈講演記録〉

リニアーグラフ(フローグラフ)とその応用について

〔M. I. T. の特別講演記録〕

R. H. Howard*

本日，私は線型な確率的システムを視察によって解く方法についてお話申上げたいと思う．はじめに，簡単なマルコフ過程から考えていこう．

一般に，マルコフ過程は遷移確率 p_{ij} の集合によって記述するのであるが，p_{ij} については，

$$p_{ij} \geqq 0, \qquad \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \qquad (i, j = 1, \cdots, N)$$

が，N ケの状態をもつシステムについて成立することはよく知られている．この p_{ij} を要素とする $N \times N$ の行列をつくると，たとえば貨幣を投げるような場合には，表と裏の2つの状態について

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

となる．

$\pi_{ij}(n)$ によって，はじめ状態 i にあったシステムが n 回遷移をした後で状態 j にある確率を表わすとすると，この定義とマルコフ過程についての性質から，

$$\pi_{ij}(n) = \sum_{k=1}^{N} \pi_{ik}(n-1) \cdot p_{kj}$$

であることはすぐにわかる．そこで，$\pi_{ij}(n)$ を要素にもつ $N \times N$ 行列 $\boldsymbol{\pi}(n)$ を定義すると，

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1) \cdot \boldsymbol{P}$$

となることもわかる．

$\boldsymbol{\pi}(0)$ は，システムが状態 i から状態 j に零回の遷移で移ることを意味しているから，これは単位行列，即ち，主対角線上のすべての要素が1で，他はすべて零の行列で表わすことにする．$\boldsymbol{\pi}(0)$ が単位行列であることから，

$$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0) \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{\pi}(2) = \boldsymbol{\pi}(1) \cdot \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^2$$

となり，一般に $\boldsymbol{\pi}(n)$ は，

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{P}^n$$

であることが出て来る．

ここで，離散的変数 $n=0, 1, \cdots$ の上で定義された任意の函数 $f(n)$ の離散変換，

---

* M. I. T. 昭和 37 年6月1日 経営科学第6巻第1号

$$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\cdot z^n$$

を定義する.

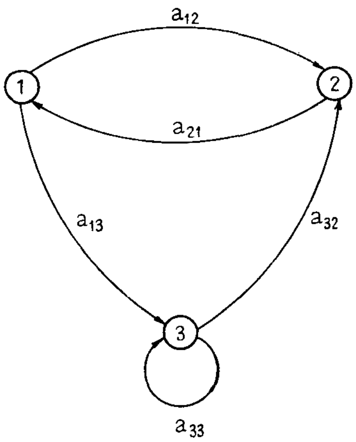
同様に，行列 $\pi(n)$ についても離散変換,

$$\boldsymbol{\pi}^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{\pi}(n)\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\boldsymbol{P}z)^n$$

を定義しよう．この式で，$\boldsymbol{P}$ は遷移確率行列であるから，その要素は一定の値であるが，それは丁度，$F^*(z)$ において，もし $f(n)$ が一定の値，たとえば a であるとすると，$F^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(az)^n=[1-az]^{-1}$ と出来るように，$\boldsymbol{\pi}^*(z)$ は,

$$\boldsymbol{\pi}^*(z)=[\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P}]^{-1}$$

と表わすことが出来よう．ここに，$\boldsymbol{I}$ は単位行列である．この両者の違いは，$F^*(z)$ は逆数をもとめることであるが，$\boldsymbol{\pi}^*(z)$ は逆行列をもとめることであり，逆数をもとめるのに比べると大変困難であるという点であろう．しかし，このようにして $\boldsymbol{\pi}^*(z)$ をもとめられれば，それは $\boldsymbol{\pi}(n)$ の離散変換なのであるから，離散変換の表から逆に $\boldsymbol{\pi}(n)$ をもとめれば，$\pi_{ij}(n)$ を知ることが出来よう．



第1図

このような場合，$\boldsymbol{\pi}^*(z)$ の各要素の逆変換はたとえ表によっても，必らずしも容易なことではないので，もっと簡単に高次の遷移確率をもとめる方法が必要になって来る訳である．

いま，要素 a_{ij} からなる正方行列 $\boldsymbol{A}$ から，第1図ののような図示をしよう．すなわち，状態を節とし，その間を矢線で示して，a_{ij} をその矢線につけておくのである．このようにして作られた第1図をリニアーグラフ，またはフローグラフという．

このリニアーグラフの性質は，節 i から節 j へのトランスミッション T_{ij} についてつぎの式が成立することである．

$$T_{ij}=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]^{-1}{}_{ij}$$

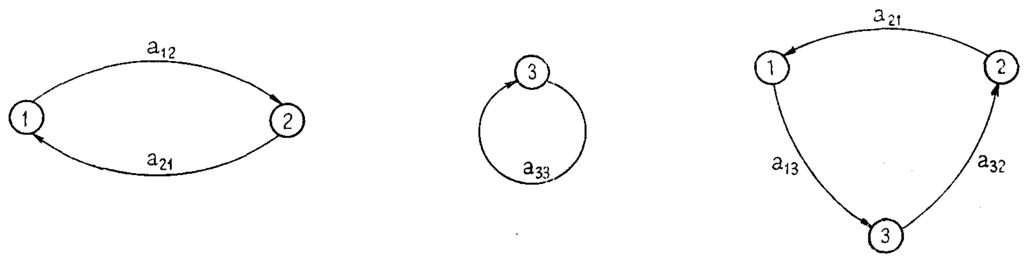
ただし，右辺は $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ という行列の逆行列の ij 要素である．そこで，もしこの行列 $\boldsymbol{A}$ の各要素に $z\boldsymbol{P}$ の各要素を対応させて見れば，この方法が，直接にさきのマルコフ過程の計算に応用出来ることがわかる．

リニアーグラフの節 i と j との間のトランスミッションを計算する方法は沢山あるが，今日はその中の一つの簡便法を例によって説明して行きたい．はじめに，3つの節のあるシステムで，第1図のような場合から考えて行こう．この場合の $\boldsymbol{A}$ はつぎのようになる．

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

いま，節1から節2へのトランスミッション T_{12} を見出だそう．そのために，第2図のグラフにおけるループを全部取り出して見よう．

ループとは，2度以上1つの節を通らないで一回りしている矢線の集合である．第2図の例で



(i)　　(ii)　　(iii)

第2図

は3つのループがあってそれらはつぎのようである．そして，各ループのループ積，すなわち，そのループの各矢線の数字の積に－の符号をつけたものを計算する．それらはつぎのようになる．

$$\text{(i)}\quad -a_{12}a_{21},\qquad \text{(ii)}\quad -a_{33},\qquad \text{(iii)}\quad -a_{21}a_{13}a_{32}$$

このようにループを全部挙げ終るとつぎに，重ループというものを定義しよう．それは，互いに共通な節のないループの集合であって，この例では，(i)と(ii)とが，互いに共通した節のない2つのループである．(i)と(iii)では節1，2が共通しているし，(ii)と(iii)では節3が共通している．つまり，この例では重ループは(i)と(ii)という1組である．重ループのループ積は，それを構成しているループのループ積の積，この場合には$(-a_{12}a_{21})(-a_{33})$と表わされる．

また，もう1つ仮想ループというものをいれ，それはどのループとも接触していない(共通の積のない)ループであって，そのループ積は1であるものである．

このようにすべてのループを作れたので，つぎのように表にしておく．

添 字 (r)	ループ積 (L_r)	種 類
1	1	仮想ループ
2	$-a_{12}a_{21}$	ループ
3	$-a_{33}$	〃
4	$-a_{32}a_{21}a_{13}$	〃
5	$a_{12}a_{21}a_{33}$	重ループ

つぎに，パス(path)を定義しよう．パスとは1つの節を2度以上通らないである節から他の節へ行く矢線の集まりである．これは，例について見ると，

添字 (f)	パ ス	パストランスミッション(P_f)
1	①→②	a_{12}
2	①→③→②	$a_{13}a_{32}$

ここに，パストランスミッションとは，そのパスを構成している矢線についている数字の積である．

ここで，節 i から節 j へのトランスミッションを計算する式を導入しよう．それは，つぎのような形になる．

$$T_{ij}=\sum_{f\cap r=\phi}(P_f)(L_r)/\sum_r(L_r)$$

ただし，分子の総和のとり方 $f\cap r=\phi$ は，互いに共通な節をもたないすべての節 i から節 j へのパスとループとについて，パストランスミッションとループ積の積和をとることを意味する．この例で T_{12} を見ると，パス1は仮想ループおよびループ3とは互いに共通な節がないし，また，パス2は仮想ループとは共通な節を持っていないから，上式の分子は，

$$a_{12}\times 1+a_{12}\times(-a_{33})+a_{13}a_{32}\times 1$$
$$=a_{12}(1-a_{33})+a_{13}a_{32}$$

となるし，分母は，すべてのループ積の総和であるから，

$$1-a_{12}a_{21}-a_{33}-a_{21}a_{13}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}$$

である．

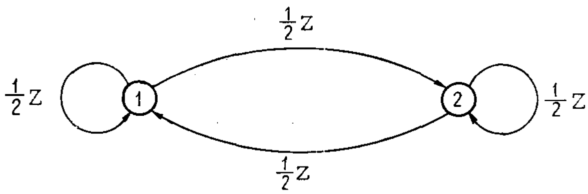
このように，トランスミッションの計算は視察によって行なわれることがわかったので，もう1つ別の例で，このトランスミッションと $\boldsymbol{\pi}^*(z)$ との関連を見ることにしよう．

公平な貨幣を投げて，表(状態1)，裏(状態2)が出る通常の例で見よう．$\pi_{12}(n)$ によって，はじめに表が出てから n 回目に投げて裏の出る確率としよう．(我々は，この確率が，「最初表が出てから」ということに依存しないということを知ってはいるが)．

$\pi_{12}{}^*(z)$ は，行列 $\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P}$ の逆行列の第1行第2列の要素に等しい．これは，フローグラフでいうと，その $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ の代りに，$z\boldsymbol{A}=(a_{ij}z)$ というフローグラフにおいて，節1から節2へのトランスミッション T_{12} とも等しいことがわかる．このトランスミッションが見出だせると，$\pi_{12}(n)$ をもとめることが出来る(第3図)．

このフローグラフから目視によって，ループ，重ループなどのループ積をもとめると，仮想ループ(ループ積は1)のほかに，節1，節2でそれぞれループ(ループ積は $-z/2$) があり，節1と2との間にループ(ループ積 $-z^2/4$) と，重ループが節1と節2との2つのループ(ループ積 $z^2/4$) がある．また，節1から節2へのパスは $z/2$ に，そのパスと触れていない(共通の節のない)仮想ループがあるから，T_{12} はつぎのようにすぐ書き下せることがわかる．

$$T_{12}=\frac{z/2\cdot 1}{1-z/2-z/2-z^2/4+z^2/4}$$
$$=\frac{z/2}{1-z}$$



第3図

右辺を，z の巾級数に展開すると，

$$z/2+z^2/2+z^3/2+\cdots$$

となる．

すでにのべたように，トランスミッション T_{ij} はそのフローグラフで $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]_{ij}^{-1}$ と等しく，また，$\pi_{ij}^*(z)=[I-zP]_{ij}^{-1}$ であるから，$\boldsymbol{A}$ の代りに $z\boldsymbol{A}$ とし，$\boldsymbol{A}$ があたかも $\boldsymbol{P}$ のように考えると，$T_{ij}=\pi_{ij}^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{ij}(n)\cdot z^n$,

すなわち

$$T_{12}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{12}(n)z^n$$

となることがわかる．

ところで，

$$T_{12}=z/2+z^2/2+z^3/2+\cdots$$

であることがわかったから，上式の右辺と z のおなじ巾の係数を比較すると，

$$\pi_{12}(0)=0$$
$$\pi_{12}(n)=1/2 \qquad n>0$$

であることがわかる．

この例は，きわめて単純なものであるが，フローグラフによる $\boldsymbol{\pi}(n)$ の目視による計算手順が，行列の逆転をふくまない点で簡単化されていることが分ろう．

ここで，もう少し現実に近い問題を考察して行こう．ある会社が A，B 2種の製品を市販しているとする．A は B より優れているので，2度つづけて A を買った客はその後 A ばかりを買いつづけるようになる．

状態としてつぎの3つを取り上げよう．

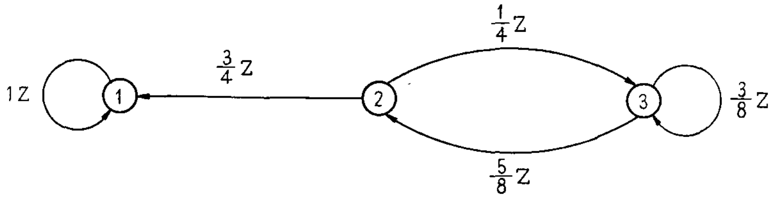
$AA\cdots$，いままでに2度つづけて A を買った状態．この状態にある客は，以後引き続いて A を買いつづける．

A　丁度1度 A を買った状態．この状態にある客は，確率 3/4 でもう1度 A を買って，$AA\cdots$ に入いるか，確率 1/4 で B を買って下の状態に入いるかのいずれかである．

B　丁度，B を買った状態．何回その前につづけて買ったかには関係なしに，この状態に

ある客は，確率 5/8 で A に，確率 3/8 で B に移る.

問題は，客が丁度 B を1度買ってから，A ばかりを買う客になる確率はいくらかということである．上にのべた3つの状態をそれぞれ 1, 2, 3 と書くと，すでに何回かやって来たように，T_{31} をもとめることが必要である．T_{31} を第4図から視察によって書き下すとつぎのようになる.



第4図

$$T_{31}=\frac{\frac{15}{32}z^2}{1-z-\frac{3}{8}z-\frac{5}{32}z^2+\frac{3}{8}z^2+\frac{5}{32}z^3}$$

(分母は，第1項が仮想ループ，第2項から第4項までがループ，第5，6項は重ループである．分子は，パス(3から1への)トランスミッションが $(15/32)z^2$ のもの1つしかなく，それと共通な節を持たないループは仮想ループであるから，そのパストランスミッションそのものの値と等しい)

このように得られた T_{31} の分母を因数分解すると，$(1-z)$ という項はかならずふくまれる．実際，

$$\begin{aligned}&1-z-\frac{3}{8}z-\frac{5}{32}z^2-\frac{3}{8}z^2+\frac{5}{32}z^3\\&=1-\frac{11}{8}z-\frac{7}{32}z^2+\frac{5}{32}z^3\\&=(1-z)\left(1-\frac{5}{8}z\right)\left(1+\frac{1}{4}z\right)\end{aligned}$$

である.

このように，分母を因数分解した上で T_{31} の右辺を部分分数に展開して，係数をきめるとつぎのようになる.

$$\frac{a}{1-z}+\frac{b}{1-\frac{5}{8}z}+\frac{c}{1+\frac{1}{4}z}\equiv\frac{\frac{15}{32}z^2}{(1-z)\left(1-\frac{5}{8}z\right)\left(1+\frac{1}{4}z\right)}$$

この恒等式が成立するような a, b, c は，

$z=1$ に対し，

$$a\left(1-\frac{5}{8}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{32},\ \text{すなわち}\ \ a=1$$

$z=\frac{5}{8}$に対し,

$$b\left(1-\frac{5}{8}\right)\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{32}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2, \quad \text{すなわち} \quad b=\frac{-10}{7}$$

$z=-4$ に対し

$$c(1+4)\left(1+\frac{20}{8}\right)=\frac{15}{32}\times 16, \quad \text{すなわち} \quad c=\frac{3}{7}$$

となる．よって,

$$T_{31}=\frac{1}{1-z}+\frac{3}{7}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z}-\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{8}z}$$

この右辺の各項を z の巾級数に展開して,

$$T_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{31}(n)\cdot z^n$$

なる関係をつかって, $\pi_{31}(n)$をもとめる．よく知られているように,

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}z^i$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{4}z}=1-\frac{1}{4}z+\left(\frac{1}{4}z\right)^2-\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^i z^i$$

$$\frac{1}{1-\frac{5}{8}z}=1+\frac{5}{8}z+\left(\frac{5}{8}z\right)^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^i z^i$$

から,

$$T_{31}=\sum_{i=0}^{\infty}\left\{1+(-1)^i\cdot\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^i-\frac{10}{7}\left(\frac{5}{8}\right)^i\right\}z^i$$

よって,

$$\pi_{31}(n)=1+(-1)^n\frac{3}{7}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{10}{7}\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^n$$

である．$n=0$, 1, 2…と計算すると,

$$\pi_{31}(0)=1+\frac{3}{7}-\frac{10}{7}=0$$

$$\pi_{31}(1)=1-\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}-\frac{10}{7}\cdot\frac{5}{8}=0$$

$$\pi_{31}(2)=1+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{16}-\frac{10}{7}\cdot\frac{25}{64}=\frac{15}{32}$$

$$\cdots$$

である．

状態1から状態3に移るには，この場合にすくなくとも2回の遷移が必要であることはすぐわかるから, $\pi_{31}(0)=0$ と $\pi_{31}(1)=0$ とは明らかであるし，また, $\pi_{31}(2)=\frac{15}{32}$ も容易に検証され

よう.

うさらに，$n\to\infty$となると，

$$\pi_{31}(n)\to 1$$

であることから，状態1は所謂 recurrent state であることがわかる.

このように，たとえ客がはじめ B を購入したとしても，この客はこの社の製品を買っているうちにやがて，製品 A ばかりを買う客になる(状態1になる)ことがわかった.

このように，状態3から遷移をはじめて，平均して何回位の遷移の後に状態1に入いるかということを考えて見よう．それには，transient な状態を表わすフローグラフ(第4図で，節1で回っている 1z というループのないもの)を考えればよい.

いま，つぎのような量を定義しよう.

u_{ij}=状態iから遷移をはじめて，無限に多くの遷移をするときに状態 j に入いる平均回数.
recurrent state (この例の状態1)では，この値は∞である．さらに，

$$x_{ij}(n)=\begin{cases}1 & \text{状態}\,i\,\text{から遷移をはじめて，丁度}\,n\,\text{回目の遷移で状態}\,j\,\text{にある}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

という量をも定義すると，

$$\overline{\sum_{n=0}^{\infty}x_{ij}(n)}=u_{ij}$$

である．ところで，

$$\overline{\sum_{n=0}^{\infty}x_{ij}(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}x_{ij}(n)\ \overline{x_{ij}(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}1\times\pi_{ij}(n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{ij}(n)$$

となることがわかる.

一方，$\pi_{ij}(n)$と $\pi_{ij}{}^*(z)$という変換関係を見てみると，

$$\pi_{ij}{}^*(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{ij}(n)z^n$$

$$=[\boldsymbol{I}-z\boldsymbol{P}]_{ij}^{-1}$$

ここで，$z=1$ とおくと，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{ij}(n)=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}]_{ij}^{-1}$$

この左辺は，u_{ij} にひとしいから，結局

$$u_{ij}=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}]_{ij}^{-1}$$

である．この右辺の計算に，さきの節1でのループを取り除いたフローグラフを考えれば良いことがわかる．つまり，transient states について，u_{33} と u_{32} とをもとめ(それは，上式の関係から，T_{33} と T_{32} という2つのトランスミッションを計算することで良い)，それらの和をとると所要の，状態3から状態1への遷移の平均回数を与えるのである.

ところで，このフローグラフから T_{33} と T_{32} とはすぐに書き下せてつぎのようになる．

$$T_{33}=\left.\frac{(1)\left(\frac{3}{8}z\right)}{1-\frac{3}{8}z-\frac{5}{8}z^2}\right|_{z=1}$$

$$=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}-\frac{5}{32}}=\frac{4}{5}$$

$$T_{32}=\left.\frac{(1)\left(\frac{5}{8}z\right)}{1-\frac{3}{8}z-\frac{5}{32}z^2}\right|_{z=1}$$

$$=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{3}{8}-\frac{5}{32}}=\frac{4}{3}$$

よって，

$$u_{33}+u_{32}=T_{33}+T_{32}$$

$$=\frac{4}{5}+\frac{4}{3}=\frac{32}{15}$$

すなわち，はじめて製品 B を買ったお客が製品 A ばかりを買うようになるには，平均して2回強の買物をした後であるということが言えるわけである．

以上のべて来た方法は，何回か例についてやったように，トランスミッションが目視で書き下せるような，少ない数の状態から成るシステムに対しては，極めて便利であることが分ったと思う．本来，フローグラフは電気通信工業の分野で発展した来たことであるが，このような応用も興味ある一つであるので紹介した．なお，たとえば MIT の Notes on Operations Research, 1959, Technology Press, にもこの方法のもっと別な応用が書かれているので参照されたい．

(拍手)

〔記録　出居　茂〕