文 献 抄 録

FABENS, A. J. : THE SOLUTION OF QUEUEING AND INVENTORY MODELS BY SEMI-MARKOV PROCESSES. *Jour. Roy. Statist. Soc., Ser. B, Vol.* 23 *pp. 113—127. (1961)*

$M/G/1$ のような型の queue に対しては Kendall による imbedded Markov process の technique が有効に使えることはよく知られているが, $E_k/G/1$ という場合にはうまく使えない. ところが, もし regenerative point を service 完了時点だけでなく到着時点もこみにして考えると, その imbedded process はその推移の起る時間間隔の長さを問題にしない限り Markov Chain を作る. $M/G/1$ のような場合とその点は変らないわけである. 違うのはある時点における imbedded chain の state i から次の時点における state j への推移確率が i だけに depend するのでなく, i と j との両方に depend する点である. それで, こういう場合を含むような process, 即ち semi-Markov process (imbedded Markov もまた semi-Markov の特別な場合である) の議論を使うと, E_k/G/1 などの問題の解決には役立つ.

semi-Markov process $Z(t)$ とは, regenerating point$\{t_i\}$ をとると $\{Z(t_i+)\}$ が可付番個の state のうちのただ1つをそのときの値としてとるような Markov Chain を作り, その推移の起る時点間の長さ$\{t_{i+1}-t_i\}$は互いに独立で$Z(t_i+)=j, Z(t_{i+1}+)=k$ の2つの値にのみ depend する分布 $W_{jk}(t)$ を持つような process のことである. これについては Smith (Proc. Roy. Soc. A, vol. 232, p. 6-31, 1955) 及び Lévy (Proc. Int. Congress. Math. (Amsterdam) Ⅲ, 416-426, 1954) の研究があるが, この論文では Smith の基本定理を用いて更に2つの定理をまず証明し, それを用いて, 上記 queue の問題を解いている. queue size の極限分布, 待ち時間の極限分布, および busy period の長さの平均値などを求めている.

$E_k/G/1$ は考え方を変えると, k 人たまるごとにサービスをするというシステムの bulk queue で Poisson 到着の場合と全く同じであるし, これはまた lead time が一般分布 (queue のサービス時間分布に当る) の場合の (S, S) policy の在庫問題にも飜訳される. (森村英典)

D. V. LINDLEY: "PROFESSOR HOGBEN'S CRISIS —A SURVEY OF THE FOUNDATIONS OF STATISTICS" *Applied Statistics Vol. 7 (1958) pp. 186—198.*

Lindley は所謂 Bayesian の立場を正当化するための数多くの論文を発表して来ている. この論文もその一つで, 特に体裁としては, Hogben の書物 "Statistical Theory" に対する書評であるが, その中では "統計学の基盤" についての彼の積極的な見解を表明しており, 極めて注目すべき論文となっている. 彼は, Hogben が専ら J. Neyman の立場に依って現代統計学の危機を云々することは的外れであるとしている. Lindley によれば問題の本質は所謂直観的確率及び頻度的確率と云う二つの確率の概念の対立に根ざすものであって, Hogben に於ける様に専ら後者の枠内での問題の取上げ方自体が誤っているのである. そしてその意味において Hogben の書物の大体の欠陥は L. J. Savage "Foundations of Statistics" に言及していないと云う点にあると述べる. かくて彼は自らの立場を Savage に従って明らかとするのであるが, ここで注目すべきことは Savage の確率主観説を拒否していることである. Lindley によれば, 確率は少くとも科学の問題を取扱う際には何らかの客観性を持たねばならず, その意味で確率は個人的なものではなく社会的な性格を持たねばならないとしている. そしてこの点では Savage よりはむしろ H. Jeffreys の見解に一致するものであることを述べている. 従って彼にあっては Savage の "合理的な人間" を "個人" とは考えず, sure-thing principle を始めとする合理的な行動の基準の定式化も上述の枠内で妥当なものと見做している. 詳細な議論を経て後, Lindley は Savage の所説を "いかなる人も, あたかも彼が Bayes の確率分布と効用函数とを持っているかの様に行動しなければならない" と云う言

葉に要約する．そして更にこれが人間行動の解釈として，決定に対して彼が用いるいかなるルールも上述の解釈を与え得ると云う意味で全く合理的なものであることを指摘している．次いで彼は通常の接近と，“Bayes-効用函数” による接近との差異を明らかにするためにいくつかの例を詳細に検討する．ここでは有意性検定の例をとり上げて彼の所説の一端をみよう．通常の接近ではある統計量を考え，その値が実験で得た値と等しいか又はそれ以上となる確率を仮説の下で計算しなければならない．この場合我々は現在得た値のみならず，我々が得たかもしれなかった或いは同じ実験をくり返せば得られるかもしれない様な他の値をも考慮していることになる．他方 Bayes 流の考え方では事後確率を計算するために必要なのは，事前分布と得られた観測値にのみ基づく尤度だけである．このことと関連して前者に於ては観測値を得るための抽出手続きの相異が問題となるが，後者ではそうはならないことが理解されよう．例えば今，二項母集団から n ケの観測値を得たとし，そのうち r ケが 1，$n-r$ ケが 0 であったとする．この様な特定の観測値を得る確率は，母集団比率を p とすれば $p^r(1-p)^{n-r}$ である．ところでこの観測値が，(1) n を予め定める，(2) r を予め定める（所謂逆2項抜取），と云う二つの異った観測手続きから得られた同一の結果であるとすると，通常の接近ではこの各々について異った確率計算を示唆する．一方 Bayes 流の行き方では (1)，(2)の観測手続きをとる実験家がいずれも同一の事前分布 $f(p)$ をとることに同意したとすれば，この時事後確率は c を常数として $c\cdot f(p)p^r\cdot(1-p)^{n-r}$ となって一致しなければならない．これと関連して不偏性の概念が Bayesian では歓迎されないことを注意している．推定の場合 (1) では p の不偏推定値は $\frac{r}{n}$ であるが，(2) では $\frac{r-1}{n-1}$ となっている．Bayes 流の行き方ではこの様な相違があってはならないであろう．又この様な Bayes 流の考え方からすれば抽出の手続きが非常に単純化されることを注意している．

（関谷　章）

D. V. LINDLEY: “BINOMIAL SAMPLING SCHEME” *Biometrika Vol. 44 (1957)*

この論文では以前 (A. M. S. 1956) 彼によって提唱された逐次抽出プラン即ち予め定められた精度 (Shannon の情報による) を得るまで抽出すると云う手続きを特に二項母集団からの抽出について詳細に吟味したものである．この様な抽出手続き自体は彼の Bayesian としての立場から自然に導かれるものであることが強調されている．

今，θ についての，抽出の各段階における知識が $p(\theta)$ で表現され得るものとすれば，Shannon の情報量の概念は

$$I_\theta=\int p(\theta)\log p(\theta)\,d\theta$$

である．抽出の各段階で事後確率についてこの量を考えれば，I_θ は段階毎に変化することになる．問題はかかる情報量が一定の値に達する迄抽出を続けると云うルールを特に二項母集団について考察することである．今専ら計算の便宜上から事前分布をベータ函数 $p_{a,b}(\theta)$ とする．この時事後確率の計算は a，b を得られた標本に従って変更するだけでよい．ここで先ず上述のルールが θ の変換の下で不変性を持たないことが示される．即ち $\phi=\phi(\theta)$ を θ の単調な函数とすると

$$I_\phi=I_\theta+\int p(\theta)\log\frac{d\theta}{d\phi}\,d\theta$$

となり，一般には $I_\theta=\text{const.}$ なる計画と，$I_\phi=\text{const.}$ なる計画とは異ったものとなることが判る．このことを明確にするために彼は次の様な考察をする．即ちこの抽出プランの境界を $a-b$ 平面上で考えると，$\phi_1=2\sin^{-1}\sqrt{\theta}$，$\phi_2=\{l_n(\theta/1-\theta)\}$ では θ の境界が $(a+b)^3=\lambda ab$ と表現されるのに対し，ϕ_1 では $a+b=\lambda_1$ 又 ϕ_2 では $\frac{ab}{a+b}=\lambda_2$ ($\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ はある常数) となることが示される．この様な θ の選択は，彼によれば，本質的には損失函数の選択と同等であって，このことが Shannon の情報のユニーク性は $d\theta$ の選択に自由が残されていると云う事実から説明されている．

次に彼はこの情報量と Fisher の情報量との関連を以下の様に議論する．Bayes の定理から簡単な計算によって

$$-\frac{\partial^2 L(\theta|x)}{\partial\theta^2}=\left(-\frac{\partial^2 L(x|\theta)}{\partial\theta^2}\right)-\frac{\partial^2 L^2(\theta)}{\partial\theta^2}$$

なることが示される（ここで L は密度函数の対数）．ここで左辺を常数とする計画を考えれば，

$$-\frac{\partial^2 L(\theta|x)}{\partial\theta^2}=\varepsilon_x\left(-\frac{\partial^2 L(x|\theta)}{\partial\theta^2}\right)-\frac{\partial^2 L^2(\theta)}{\partial\theta^2}$$

（ここで ε_x は x の空間上での期待値）．右辺の第一項は Fisher の情報に他ならず，又第二項は大標

本の際には無視してよいから，かかる抽出計画では漸近的に両者は同等となると考えてよいことが判る．このことは θ の事後の分散と θ の漸近的に有効な推定量の分散との間の漸近的な同等性を意味している．具体的には後のものは $\frac{\theta(1-\theta)}{a+b}$ であるが $\theta=\frac{a}{a+b}$ とすればこれは前のものと一致している．

他の計画についても全く同様の結果が得られる．最後に事前分布と Shannon の情報量の概念が果す役割を議論してこの論文は終っている．(関谷　章)

KIEFER, J. AND WOLFOVITZ, J.: ON THE EQUIVALENCE OF TWO EXTREMUM PROPERTIES *Canad. Jour. Math. Vol. 12. 1961.*

著者達とくに Kiefer は最近，実験計画における最適配置の問題を研究しているが，この論文ではその過程で得られた一つの注目すべき定理を示している．

観測値 Y は，ある compact な集合 X の中を動く変量 x によって影響され，

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{k}\beta_i f_i(x)$$

と表わされるものとする．ここに f_i は x の連続函数，β_i は未知の母数とする．

このとき X の中から N 個の点 $x_1, x_2\cdots x_N$ を適当にえらんで，B_i をなるべくよく推定するにはどうしたらよいかというのが問題の趣旨である．

Y については分散が一定，異る Y については相関0と仮定すると，B_i を推定する正規方程式の係数行列 $D=\{d_{ij}\}$ は

$$d_{ij}=\sum_{h=1}^{N}f_i(x_h)f_j(x_h)$$

と表わされる．

ところで，このような形では問題が扱いにくいので，$N\to\infty$のときを想定して，点 x_i を X の中から一定の比率でえらぶ，あるいはもっと一般的に X の上の確率測度 ξ に対応する比率でえらぶとする．そうすると正規方程式の係数行列 $M(\xi)=\{M_{ij}(\xi)\}$ は，

$$M_{ij}(\xi)=\int f_i(x)f_j(x)d\xi(x)$$

となる．

$M(\xi)^{-1}=\{M_{ij}(\xi)\}^{-1}=\{M^{ij}(\xi)\}$ は推定量の分散共分散行列を与える．そこで ξ をえらぶ基準として，

1°　推定量の一般化分散，すなわち $|M(\xi)^{-1}|$ を最小，いいかえれば $|M(\xi)|$ を最大にする．

2°　回帰式の $x\epsilon X$ の範囲における分散の最大値を最小にする．いいかえれば

$$d(x,\xi)=\sum_i\sum_j M^{ij}(\xi)f_i(x)f_j(x)$$

とするとき $\max_{x\varepsilon X}d(x,\xi)$ を最小にする．

ところがこの2つの基準が実は同値になることを示したのがこの論文である．f_i が x の多項式であるような場合にこの2つの基準による最適配置がたまたま一致することは，すでに知られていたが，この論文ではそのことが一般的に成立することが証明されている．

実は 1°, 2° の条件を満すような配置 ξ^* は更に，次の条件を満している．

3°　すべての x に対して，$d(x,\xi^*)\leqq k$

証明は，まず 2° に 3° が同値であることを示す．そのために η をやはり X 上の確率測度として，

$$M(\eta,\xi)=\mathrm{tr}\,M(\xi)^{-1}M(\eta)$$

を payoff とする zero-sum 2人 game を考える．そうすると，この game は payoff が ξ に関して convex, η に関して linear だから value が存在し，また optimal strategy の存在を示される．ところで，

$$M(\xi,\xi)=\mathrm{th}\,M(\xi)^{-1}M(\xi)=k$$

だから，一般に

$$\max_\eta M(\eta,\xi)\geqq k,\qquad \min\max M(\eta,\xi)\geqq k$$

$$\min_\xi M(\eta,\xi)\leqq k,\qquad \max\min M(\eta,\xi)\leqq k$$

従って

$$\min\max M(\eta,\xi)=\max\min M(\eta,\xi)=k$$

ξ^* を optimal strategy とすると，すべての η について，　$M(\eta,\xi^*)\leqq k$

このことは $\max_{x\varepsilon X}d(x,\xi^*)\leqq k$ を意味する．

任意の ξ について，

$$\max_x d(x,\xi)=\max_\eta M(\eta,\xi)\geqq k$$

だから ξ^* は 2° の意味で最適な配置になる ξ^* が 1° の意味でも最適であることは，

任意の η に対して

$$\mathrm{tr}\,M(\eta)^{-1}M(\xi^*)\geqq k$$

から　$|M(\eta)^{-1}M(\xi^*)|\geqq 1\quad |M(\xi^*)|\geqq|M(\eta)|$

となって証明される．また 1° の意味で最適なものはこの game の optimum strategy となることは $M(\eta,\xi)$ の ξ に関する convexity から証明さ

れる.

この定理はその結果自体意義あるものであるのみならず，その証明の過程もまた minimax 定理の威力を示すものとして興味深い　　(竹内　啓)

DANTZIG, G. B. &. MADANRKY, A.: ON THE SOLUTION OF TWO-STAGE LINEAR PROGRAMS UNDER UNCERTAINTY *Proceedings of 4 th Berkeley Symposium Vol. 1. 1961.*

この論文では次のような問題を扱っている.

$$Ax+By=b \quad x\geqq 0 \quad y\geqq 0$$

ベクトル b が確率変数であるとき,

$$\min_y E \min_x (c'x+f'y)$$

を求める．あるいはこれを達成するベクトルを定める.

すなわち戦略変数が x, y の2組に分かれていて，y は確率変数 b の値に合わせて決定し，x は事前に決めておくという形である．このような問題は実際にしばしば生ずるという．例えば在庫問題において，x が予め用意しておく数量，y が需要に対して調整する数量と考えることができる.

この問題を考えるのに，まず x を固定して考えると,

$$By=b-Ax, \ f'y=\min, \ y\geqq 0$$

となる．この問題の dual の解を $\bar{\pi}=\pi(b,x)$ と表わすと，一般に

$$\min f'y=\bar{\pi}'(b,x)(b-Ax)$$

となり，x は

$$E\min_y (c'x+f'y)=c'x+E\bar{\pi}'(b,x)(b-Ax)$$

を最小にするように定めればよい.

この第2項は x に関する凸函数であることが証明されるので，これについては普通の convex programming の理論が適用できることになる.

とくに，b が有限個の値 $b_1, b_2 \cdots b_N$ をとるならば，問題は

$$\begin{aligned}
&Ax+By_1 &&=b_1\\
&Ax+\quad By_2 &&=b_2\\
&\cdots\cdots &&\cdots\cdots\\
&Ax+ \qquad\quad By_N&&=b_N\\
&c'x+p_1f'y+p_2f'y_2+\cdots\cdots+p_nf'y_N=\min\\
&x\geqq 0, \ y_1\geqq 0\cdots\cdots y_N\geqq 0
\end{aligned}$$

という形の LP 問題になる．これの dual をとると,

$$\begin{aligned}
&p_1A'\pi_1+p_2A'\pi_2+ \qquad +p_NA'\pi_N\leqq c\\
&B'\pi_1 \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq f\\
&\quad B'\pi_2 \qquad\qquad\qquad \leqq f\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad B'\pi_N\leqq f\\
&p_1b_1'\pi_1+p_2b_2'\pi_2+ \qquad +p_Nb_N'\pi_N=\max
\end{aligned}$$

この形には，Dantzig-Wolfe の decomposition principle が適用できる．すなわち $\tilde{B}$ を行列 B を対角線に N 個ならべた行列，$\tilde{f}'=[f'\cdots f']$, $\tilde{\pi}=[\pi',\cdots,\pi']$, $\tilde{A}'=[p_1A'\cdots p_NA']$, $\tilde{b}'=[p_1b_1'\cdots p_Nb_N']$ とすると，$\tilde{A}'\tilde{\pi}\leqq c \quad \tilde{B}'\tilde{\pi}\leqq\tilde{f} \quad \tilde{b}'\tilde{\pi}=\max$

となるから，$\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_k$ を $\tilde{B}'\tilde{\pi}\leqq\tilde{f}$ を満足する集合の端点とすると，この解は $P_j=\tilde{A}'\tilde{\pi}_j, r_1=b\tilde{\pi}_j$ として,

$$\begin{aligned}
&p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+ \qquad +p_k\lambda_k\leqq c\\
&\lambda_1+\lambda_2+ \qquad +\lambda_k=1\\
&r_1\lambda_1+r_2\lambda_2+ \qquad +r_k\lambda_k=\max\\
&\lambda_1\geqq 0\cdots\cdots\lambda_k\geqq 0
\end{aligned}$$

の解 $\lambda_1\cdots\lambda_k$ を求め，$\tilde{\pi}=\sum\lambda_i\tilde{\pi}_j$ とすればよい.

端点の数 k は一般に大きくなるが，解に入るものの数は少いから，くり返えし計算によって解が得られる.　　(竹内　啓)

BREIMAN, L.: OPTIMAL GAMBLING SYSTEMS FOR FAVORABLE GAMES *Proceedings of 4 th Berkeley Symposium Vol. 1. 1961.*

例えば貨幣を投げて，表が出るか裏が出るかをあてる賭けを考える．あたれば賭金が2倍になるとするとき，もし表が出る確率 $p\fallingdotseq\frac{1}{2}$ をわれわれが知るならば，この賭けにおいて確実に利益を収めることができる．といってもし始めから所持金を全額賭けてしまえば，一度に所持金を無くしてしまう確率が小さくないから好ましくない．といってあまり小額ずつ賭けるといつまでたっても所持金が増して行かないことになるかもしれない.

今上の例で，$p>\frac{1}{2}$ とし，最小の所持金の額を S_0, n 回賭けを行った後の所持金の額を S_n, とする．n 回目のときに所持金の λ_n 倍 $(0>\lambda_n>1)$ の額を賭けるとすると,

$$P_r\{S_n=(1+\lambda_n)S_{n-1}|S_{n-1}\}=p$$

$$P_r\{S_n=(1-\lambda_n)S_{n-1}|S_{n-1}=q)\}=1-p$$

となる．故に

$S_0=1$ と仮定すると

$$\log S_n = W_1 + W_2 + \quad + W_n$$

ここに W_i は

$$P_r\{W_i=\log(1+\lambda_i)\}=p$$
$$P_r\{W_i=\log(1-\lambda_i)\}=q$$

となるような，互いに独立な確率変数である．そこで

$$E(W_i)=p\log(1+\lambda_i)+q\log(1-\lambda_i)$$

を最大にするようにすれば，$\lambda_i\equiv p-q$ となる．λ_i をこのようにとったとき，所持金の額が $S_0{}^*$, $S_1{}^*, S_2{}^*\cdots S_n{}^*\cdots$ と変化するものとすれば，大数の強法則により，

$$P_r\{S_n{}^*\to\infty\}=1$$

そうして他の任意の strategy と比較してこの strategy が次の 2 つの意味で“よい”ことが示される．

1. $T(x)$ を S_n が x をこす最初の n の値 $T^*(x)$ を $S_n{}^*$ が x をこす最初の n の値とすると
$$\lim_{x=\infty} E(T(x))-E(T^*(x))\geqq 0$$
2. $\lim\limits_n S_n/S_n{}^*$ が確率 1 で存在し，かつ
$$E(\lim S_n/S_n{}^*)\leqq 1$$

この論文では賭けの対象が 2 つ以上のいくつかの場合にわけられている(例えばルーレット)場合について証明してある．証明は WALD の逐次解析の関係式に導びいたのと同様な議論を用いている．

なお最後の節で n が有限のとき

$$P_r\{S_n\geqq 1|S_0=\xi\}\quad 0<\xi<1$$

を最大にするような賭けの仕方が DP の形で論ぜられている．そうして上のような賭け方は $n\to\infty$ のときこの確率を最大にするという点でも漸近的に最適になることが示されている．　　　　(竹内　啓)

ROOT, W. L.,: COMMUNICATION THROUGH UNSPECIFIED ADDITIVE NOISE *Information and Control, Vol. 4 (1961), pp. 15—29.*

2 種類の信号 MARK と SPACE とが等確率 1/2 ずつで送られる．雑音のために確率 1 で

$$\text{MARK}\to 1+\alpha,\quad \text{SPACE}\to\alpha$$

となって receiver に観測される．{信号を MARK なら $s(t)=b\cos\omega t\left(\int_0^T b^2\cos^2\omega t\,dt=1\right.$ とする$\left.\right)$, SPACE なら $s(t)=0$, 加法的無相関雑音 $z(t)$ の power を $\int_0^T (z(t))^2dt=\alpha$ とする．受信者が受信信号の power $\int_0^T(s(t)+z(t))^2dt$ をみているとするとこうなる}

α は受信者(I とかく)に未知で，Nature(II とかく)が $0\leqq\alpha\leqq a$ $(a>1$ とする．$a\leqq 1$ ならば問題は無意味)のようにえらぶとする．I は観測値 y にもとづき．送信信号が MARK だったか SPACE だったかを当てる．I の戦略は決定函数．

$\gamma(y)\cdots[0, 1+a]$ で定義され 0 or 1 の値をとる函数．意味は，y を受取ったときに，$\gamma(y)=1$ ならば MARK, $\gamma(y)=0$ ならば SPACE だと decide する．

で規定される．この game の payoff を I にとり，当れば 1, 外れれば 0 とすると payoff ft. は

$$P(\gamma,\alpha)=\{\gamma(1+\alpha)+(1-\gamma(\alpha))\}/2$$

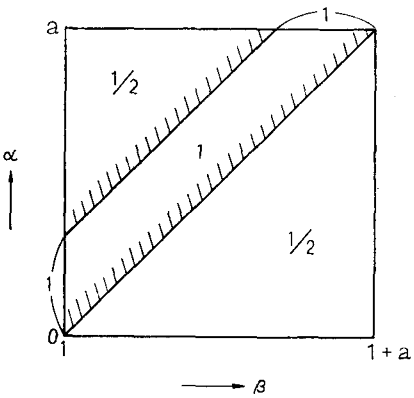
となる．

いま I の戦略を

$$\gamma_\beta(y)=\begin{cases}0, & 0\leqq y<\beta\\ 1, & \beta\leqq y\end{cases}$$

の形のものに限定する．γ_1 は $\gamma_\beta(0<\beta<1)$ より一様によいから $1\leqq\beta\leqq 1+a$ と考えてよい．すると

$$P(\gamma_\beta,\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \beta\leqq\alpha\\ 1, & \alpha<\beta\leqq 1+\alpha\\ \frac{1}{2}, & 1+\alpha<\beta\end{cases}$$



となるが(図参照)

［定理］ この game の値は $\frac{1}{2}+\frac{1}{2[1+a]}$ I (II) の最適戦略は $\gamma_1(y), \gamma_2(y), \cdots, \gamma_{(1+a)}(y)$ を $(\alpha=0, 1, \cdots, [a]$ を) 等確率 $1/[1+a]$ ずつで mix したも

のである．

この game の値≒$1/2+1/2a$ を correct transmission の確率にもった channel を考えると，その情報伝送率は

$$R=1-(p\log 1/p+(1-p)\log 1/(1-p))$$

(ただし $p=1/2+1/2a$) である．いろいろの雑音の場合に対して a と R とを計算してある．

(坂口　実)

RADNER, R.: THE APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING TO TEAM DECISION PROBLEMS

Manag. Sci., Vol. 5 (1958/59), 143—150.

team decision problem というのは2個以上の決定変数があって，2個以上の未知状態変数についての情報にもとづいて，それらの決定が決定者の team により最適になされるような問題である．

例で説明しよう．ある企業に2部門: 生産と promotion とがあるとする．各々の activity level をそれぞれ x, y (r. v. である状態変数)；各々への投下資金をそれぞれ a, b (決定変数)；資金投下の限度額を k；投下資金の k を超える分に対しては単位額当り f の調達費用がかかるとする．すると投下資金 a, b のときの企業への収益は

$$u(a,b;\ x,y)=\min(xa,yb)-(a+b)-f\max(0,a+b-k) \quad (1)$$

となる．

(i)　もし状態変数 x, y の値が既知ならば (full-information case)，(1) を最大にするには $a=yk/(x+y)$，$b=xk/(x+y)$ にとればよいことは容易にわかる．

(ii)　x, y が確率変数でその分布が既知ならば

$$E\{u(a,b;\ x,y)\}\to\max_{a,b}$$

にすればよい (routine-operation case)

(ii)　前2者の中間として Marschak 教授のいう "決定と情報との cospecialization" が考えられる．特に2人の決定者相互の通信が高くつく場合には，a の決定者は x のみの情報，b の決定者は y のみの情報を集めて決定を行なうのがよい (decentralization case)．

数値例について (i) (ii) (iii) の場合を比較してある．

次に任意に与えられた情報構造のもとでの team decision problem を一般的に定式化する．

$R(x,y)$，$S(x,y)$ …それぞれ a, b の決定者の情報様式

$A(\cdot), B(\cdot)$ …それぞれ a, b の決定者の決定函数，・は情報を表わす．

とすると問題は

$$Eu(a(R(x,y)),B(S(x,y))\ ;\ x,y)\to\max_{A(\cdot),B(\cdot)} \quad (2)$$

となる．

x, y が有限個の値をとる r. v. であり，かつ

$$u(a,b;\ x,y)=\min_{n=1,\cdots,N} u_n(a,b;\ x,y) \quad (3)$$

(ただし u_n は皆 a, b につき linear) とかけるならば (2) は線型計画の問題に帰する．(1) はちょうど (3) のように ($N=4$) かけることがすぐわかる．これの decentralization case，すなわち $R(x,y)=x$，$S(x,y)=y$ のときの L. P. 定式化が与えてある．

(坂口　実)

BACH, Jr, R. E., DOLANSKY, L. AND STUBBS, H. L.: SOME RECENT CONTRIBUTIONS TO THE LANCHESTER THEORY OF COMBAT

Opns. Res., Vol. 10 (1962), 314—326.

対抗する2軍の戦斗に関する Lanchester 方程式が始めて提出されて以来 (Lanchester 1916)，この理論は Brown, Engel, Snow, Weiss その他の学者により発展拡張されてきているが，この論文は NUMERICS Project の研究結果である．赤軍 (Red) と青軍 (Blue) とが戦斗する．

e_r, e_b …それぞれ赤・青軍の1兵員当りの effectivenss

m_r, m_b …　〃　operational loss

r_0, b_0 …　〃　初期兵力

$r(t), b(t)$ …　〃　時刻 t における兵力

とおくと Lanchester 方程式は

$$\left.\begin{aligned}\dot r&=-e_b b-m_r r, & r(0)&=r_0\\ \dot b&=-e_r r-m_b b, & b(0)&=b_0\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

である．この解の形から容易につぎのことがわかる．

(i)　$r(t), b(t)$ のうち，一方は >0 for all $t>0$ だが，他方は $=0$ for some $t_0>0$．この t_0 を戦斗終結時刻としその軍を負軍とすると，青軍が負軍となる条件は

$$(r_0/b_0)e_r-m_r>(b_0/r_b)e_b-m_b, \quad (2)$$

戦斗終結時刻は

$t_b = n^{-1}\tanh^{-1}[n/\{(r_0/b_0)e_r+(m_b-m_r)/2\}]$
(ただし $n=\{e_re_b+(m_r-m_b)^2/4\}^{1/2}$)．特別な場合として

$$m_r=m_b=0$$

のときは(2)は

$$r_0^2e_r > b_0^2e_b$$

となる．これが有名な Lanchester の2乗法則である．

(ii) 例えば青軍が負軍として，勝軍の relative loss $L_r/b_0 \equiv (r_0-r(t_b))/b_0$ を r_0/b_0 の函数として表わしてみると，ちょっと驚いたことには
$\lim_{r_0/b_0\to\infty} L_r/b_0 = m_r/e_r$, indep. of e_b, m_b

(iii) 赤軍が勝軍となる条件(2)をかき直すと

$$-\left[\frac{d}{dt}\log b\right]_{t=0} > -\left[\frac{d}{dt}\log r\right]_{t=0}$$

となる．故に磨滅係数 e_r, e_b, m_r, m_b などの数値を知らずとも initial performance から勝負の予測ができる．

最後に，この戦斗の model について analog 電気回路を構成し simulation をやっている．

(坂口　実)

WAGNER, D. H.: A DECISION PROBLEM WITH A DEADLINE *Opns. Res., Vol. 10(1962), 335—344.*

予定された期限(deadline)前に攻撃時刻をきめる問題を DP で解く．防御側(IIとかく)は一つの検出装置より成り，それはすべての $t>0$ に対して故障中 (failed) かまたは作動中 (operating) かの何れかである．故障は母数の Poisson 過程で起り，修理能力は函数 $D(\alpha)$ ——故障が起ってから時間 α の間に修理が終らない確率を表わす——で規定されるとする．

攻撃側(Iとかく)は(例えばIIの検出装置からの電波を伝受することによって)絶えずIIが今故障中か作動中かを知っている．IはIIの故障中に攻撃を始め攻撃を終りたい(攻撃完成には時間 v だけかかるとする)．このときIにとって得点1，その他の場合，すなわち攻撃開始より時間 v 以内にIIが修理を終ったとき，または予定された期限 T までにIが攻撃を始めなかったときは何れも，Iにとって得点0とする．問題は，IIが故障を起したのを見て後，Iがどれ程待ってから攻撃を始めたらよいか．最適待機政策を求めることである．

$F(t)$…期限まであと時間 t だけ残っているときにIが最適待期政策を使って期待できる得点

とすると，小さい $h>0$ に対して

$$F(t+h)=(1-\lambda h+o(h))F(t)+\lambda h\max_{w\geqq 0}\times[D(v+w)+(1-D(w))F(t)]+0(h)$$

$$\therefore\quad F'(t)=\lambda\max_{w\geqq 0}[D(v+w)-F(t)D(w)] \qquad (1)$$

が成立する．

［定理］ 最適待機政策 $w^*(t)$ の性質として
(i) $w^*(t)$ は非減少函数，(ii) $w^*(t)\equiv 0$ ならば $D(v)=\max_{w\geqq 0} D(v+w)/D(w)$ とかける．

が示されている．最後に特殊な $D(\alpha)$ (2つの減少直線の max) に対して定理を利用して (1) を解いている．

(坂口　実)

WALSH. J. E.: OPTIMUM PROPERTIES FOR DEFENSE STRATEGY OF EQUAL ATTACK AGAINST ALL TARGETS *Opns. Res., Vol. 7(1959), 249—256.*

攻撃と防御との関係を解析する数学 model によれば,多くの場合 equal-attack condition, すなわち攻撃軍の各員は防御側から同量づつの反撃をうける，という事実が成立する．これは防御側にとって攻撃軍の各員が識別不可能，かつ出現時刻の random なためである．この equal-attack-per-raid-member-procedure が game 論的に考えても optimal なものであることを次に示す．

G 個の防御地点があり，攻撃軍が全兵力 M をそこへ $m_k(k=1,\cdots,G)$ ずつ配分する．これが攻撃軍の pure strategy である．防御軍は total potential K を $\sum_1^G a_k m_k=K$ のように配分する．kill potential a_k のときの raid member の生存確率を $S(a_k)$，生存の価値が攻撃側にとって $W_k(m_kS(a_k))$ とする．そうすると game の問題としては

$$\sum_{k=1}^{G} W_k(m_kS(a_k)) \to \min_{\substack{(a,\cdots,a_G)\\ \sum_{a_k>0} a_km_k=K}}\ \max_{\substack{(m_1,\cdots,m_G)\\ \sum_{m_k>0} m_k=M}}$$

となる．

$W_k(y)$ は皆微分可能・単調増加函数とする．$S(x)$ は正値・微分可能・単調減少かつ $S'(x)/S(x)$ が単調な函数とする．例えば $S(x)=1-(1-e^{-Ax})/A$

$(1 \leqq A < \infty)$.

［定理］ 上の目的函数のとき，(任意の saddle point に対して $a_1 = a_2 = \cdots = a_G$ になっている．が示されている． （坂口　実）

BOMBERGER, E. E.: OPTIMAL INVENTORY DEPLETION POLICIES

Manag. Sci., Vol. 7 (1960/61), 294—303.

Derman-klein が Manag. Sci. Vol. 4 (1957/58), 450～456 で提示した問題で stock-issuing problem というのがある．同種のものを n 個貯蔵している．それらのものの年令を一般性を失うことなく $S_1 \leqq S_2 \leqq \cdots \leqq S_n$ とする．field-life ft. を $L(S)$ とする．(これは $S \geqq 0$ に対して定義された非負値函数で年令 S のものの field life を表わす)．1個ずつ取り出し(issue)ダメになったらすぐ他の1個と取り替える．$i_1, i_2, \cdots i_n$ の順に取り出す policy の total field-life は

$$L(S_{i_1}) + L(S_{i_2} + L(S_{i_1})) + L(S_{i_3} + L(S_{i_2}) + L(S_{i_2} + L(S_{i_1}))) + \cdots + L(S_{i_n} + \cdots)$$

であるが，特に政策 *LIFO* (last-in-first-out すなわち 1, 2, …, n の順に取り出す) または *FIFO* (first-in-first-out すなわち $n, n-1, \cdots, 2, 1$ の順に取り出す) が最適 (total field-fife 最大) となるための $L(S)$ の条件を求めよ．

Derman-Klein (1958), Lieberman (1958) などが簡単な充分条件を与えたが何れも不備がある．この論文は更に充分条件についての6定理を証明している．その中で重要と思われる3定理は

［定理 I］ $\{L(S)\}^{-1}$ が concave な増加函数ならば *LIFO* が最適

［定理IV］ すべての $h>0$ に対し $L_-(S) \equiv (L(S) - L(S-h))/h \leqq -1$ ならば *LIFO* が最適

［定理VI］ $L(S)$ が2回微分可能, convex, 増大かつ

(*a*) $L''(S)/L'(S)$ が非増大

(*b*) $L'(L(0))/\{L'(0)(1+L'(L(0)))\} \leqq 1$

ならば *FIFO* が最適． （坂口　実）

MILLS, H. D.: INVENTORY VALUATIONS—AN ANALYTIC TECHNIQUE

Manag. Sci., Vol. 8 (1961/62), 58—68.

状態 s_t のときに決定 d_t をくだすと，immediate return $R(s_t, d_t)$ を生じ新しい次の状態 $s_{t+1} = S(s_t, d_t)$ に移るとする．return ft. $R(s, d)$ および successor-state ft. $S(s, d)$ は所与の2変換である．r.v. であってもよろしい．policy とは

$$d_t = p_t(s_t) \qquad (t = 0, 1, 2, \cdots)$$

のような函数列 $p(\cdot) = \{p_t(\cdot)\}_{t=0}^{\infty}$ のことがある．$0 < \alpha < 1$ を割引率として

$$F(s_0) \equiv \max_{p(\cdot)} E\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t R(s_t, d_t)\right] \qquad (1)$$

(ただし $s_t = S(s_{t-1}, d_{t-1}), t = 1, 2, \cdots$) とおいて，これを state valuation とよび，*DP* の基本的事実．

［定理］ $F(s)$ を (1) で定義すれば

$$F(s) = \max_{d} E[R(s, d) + \alpha F(S(s, d))] \qquad (2)$$

が成立する．逆に函数方程式 (2) の解は (1) で与えられる．

この簡単な証明がある．

函数方程式 (2) を解くのは難しくても (1) を計算するのは容易だという場合があろうから，多くの実際の場合で (1) を計算するのは価値がある．最適在庫管理におけるその2例が説明されている．その一つ：注文費用・在庫保持費用・backlog 費用が何れも比例的(比例係数がそれぞれ c, h, k)，配達が2期遅れるような在庫管理を考える．

$s = (i_0, i_1) \cdots i_0$ は当期の在庫量，i_1 は既注文の未配達量

$q_2 \cdots\cdots$ 当期の注文量

$x \cdots\cdots$ 需要量

とすると

$$R(i_0, i_1;\ q_2) = -cq_2 - h\max(0, i_0 - x) - k\max(0, x - i_0)$$

$$S(i_0, i_1;\ q_2) = (i_0 + i_1 - x, q_2)$$

となる．この例で (1) の計算とその結果の分析をやっている． （坂口　実）

DERMAN, C.: ON MINIMAX SURVEILLANCE SCHEDULES

Naval Res. Logist. Quart., Vol. 8 (1961), 415—420.

作動中の機械の監視計画として，時間 $(0, T)$ の間に適当な n 個の時点

$$(0<)\, x_1 < x_2 < \cdots < x_n \,(<T)$$

を選んで点検することにする．

1回の点検で費用 c がかかりもし故障のとき，に確率 p で故障を検出できるとする．また故障が起ってからそれが検出されるまで機械は能率低下す

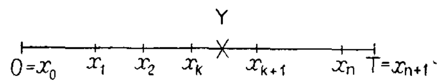
るため，それに伴う単位時間当り損失を v とする．

機械の寿命を確率変数 Y で表わすと，監視計画 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ に伴う全費用は

$$G_x(Y)=\begin{cases} p\sum_{i=k+1}^{n}(1-p)^{i-k-1}\{ic+v(x_i-Y)\} \\ \quad +(1-p)^{n-k}\{nc+v(T-Y)\}, & x_i<Y\leqq x_{k+1};\ k=0,1\cdots,n-1;\ x_0=0 \\ nc+v(T-Y), & x_n<Y\leqq T \\ nc & Y<T \end{cases}$$

となる．右辺上式の第1項は時点 $x_i(k+1\leqq i\leqq n)$ で故障検出のとき，第2項は最後まで検出不能のときの費用である．

Y の分布函数 $F(y)$ が未知のときには



$$\operatorname*{Sup}_F \int_0^\infty G_x(y)\,dF(y) \longrightarrow \min_x$$

が問題となる．

［定理］ 不等式

$$cp^2+cp(2-p)n+2(c-pvT)\leqq 0$$

を満足する最大整数を n とする．min-max 監視計画は

$$x_t=ip\left\{\frac{T}{np+1}+\frac{c}{2v}\,\frac{n[(n+1)p+2]}{np+1}-(i+1)\right\}$$

$$(i=l, \cdots, n)$$

で与えられる

が証明されている． （坂口 実）

第12回研究発表会のお知らせ

(1) 研究発表会

(イ) 日　時 10月31日（水）9時～16時
11月 1日（木）9時～15時

(ロ) 場　所 電気ビル（九州電力）小ホール
福岡市渡辺通2の35

(2) 公開講演会

(イ) 日　時 11月1日（木）15時～17時

(ロ) 場　所 電気ビル小ホール

(3) 懇 親 会

(イ) 日　時 11月1日（木）17時～19時

(ロ) 場　所 電気ビル地下室第2サロン

(ハ) 会　費 700円

(4) 見 学 会

(イ) 日　時 11月2日（金）10時～16時

(ロ) 場　所 八幡製鉄戸畑製造所及び若戸大橋

(ハ) 会　費 300円

(5) 会員は研究発表の有無，研究発表会，懇親会及び見学会に出欠の御希望を返信ハガキで9月20日までに御連絡下さい．

(6) 研究発表申込者は，400字詰原稿用紙（1枚位）に講演アブストラクトを書いて学会あて9月末日までにお送り下さい．研究発表の時間は1題目につき20分以内の予定です．

(7) 宿舎は学会シーズンですので各自早目に御準備下さい．準備不可能の方は9月末日までに福岡市天神町九州経済調査会大塚圭介氏宛にお申込下されば，あっせん致します．

(8) 公開講演には会員外の方々も多数お誘いの上御出席下さい．