# 複線区間における線路容量の求め方

山田　孜*

## 1. 序

複線区間のある一定の線区における線路容量の算出方法を与える．問題の線区を走る列車は何種類かあるが，それらの種類別の需要の割合がきまっている場合，列車を最大何本走らせることができるかという問題に対する一つの解答を与えようと思う．その際，単なる最大数を求める問題を一歩進めて待避による待時間をどれだけ許すかということに関連して定まる新しい線路容量の概念を与えようと思う．

本文は次の三つの部分から成立っている．最初の3節は第1部ともいうべき部分で，列車種が高速及び低速の二種類に限られる場合を取扱い，まず限界線路容量を与え次に待時間を考慮した線路容量及びその近似式が与えられる．$n$ 種類の列車への拡張は限界容量の場合には殆ど直接に行われるが，待時間を考慮した場合は，そのままの形では困難なのでやや異る考えの下に行われる．これらの拡張とその近似式が残りの3節で取扱われ，これが本文の第2部をなす．第3の部分は，数学的基礎を与える二つの附録である．附録Iでは，本文で取扱う分布が実際上は truncated 指数分布とみなしてよいことの根拠を与える．また附録IIでは，第2部で用いた待時間の算出を行う．

実際上の要求を考慮しながら，しかもできるだけ問題を簡単にして本質のみを示すために次の仮定を設ける．

I．ダイヤの周期は1日＝24 時＝1440 分とする．

II．列車は速度によって幾つかの種類に分類される．

III．同一種類の列車は何れの待避駅間も一定時間で運行する．

IV．同一種類の列車は同一駅で一定の停車時間を有するが，待避駅において後続の高速列車による追越しを待つ場合にのみ停車時間が延長される．（この延長部分を待時間という．）

V．列車の種類別の本数の割合は一定であるが，ダイヤへの組込みは高速列車を優先する．

この他に §3 の後半で仮定VI，§6 の後半で仮定VII，仮定VIII，が追加される．

次に技巧上の問題として，待時間以外の停車時間は運行時間中に繰入れることにする．従って，我々の運行図表に現れる列車の筋（運行の軌跡）は隣接待避駅間では直線となる．

註．以下，運行図表における距離軸の尺度を適当にかえることにより，待避駅間を等間隔に直して論ずる．従って待避待を行わない場合は同一種類の列車の筋は勾配一定の直線になる．

---

* 岐阜大学工学部　昭和37年6月7日受理　経営科学第6巻2号

## 2. 限界線路容量

まずはじめ高速列車と低速列車の二種類の列車しかない場合を考える．即ち高速列車数を $N_1$，低速列車数を $N_2$ とすれば，全列車数 $N$ は $N=N_1+N_2$ である．高速列車の平均時隔を $\mu_1$ とすれば

$$N_1=\frac{1440}{\mu_1}. \tag{1}$$

更に，高速列車の時隔を一つの確率変数とみなして，これを $X_1$ で表すことにし，その分布を $F(x)$ とすれば

$$\mu_1=EX_1=\int_0^\infty x\,dF(x).$$

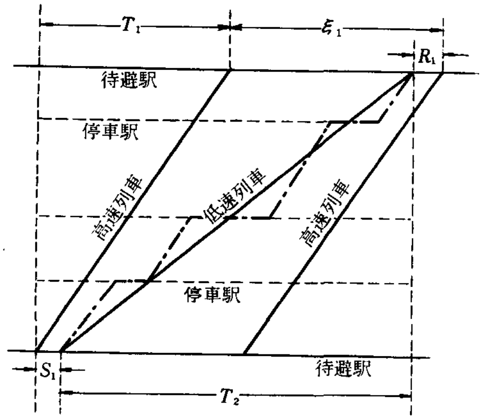
また，高速列車の最小時隔を $t_1$ とすれば

$$F(x)=0,\ \ for\ \ x\leqq t_1.$$

高速列車の運行図表がきまったとき，我々の仮定から，二つの定まった高速列車は平行線で表される．（第1図参照．以下時間軸を横に，距離軸を縦にとる．）高速列車の待避駅間通過時間を $T_1$，低速列車の待避駅間通過時間を $T_2$ とし，二つの高速列車を入れることのできる最小時隔を $\xi_1$ とすれば

$$\xi_1=T_2-T_1+s_1+R_1 \tag{2}$$

である．ここに $s_1$ は出発最小時隔，$R_1$ は到着最小時隔である．（第1図参照）




**第1図** 低速列車が入るための最小時隔 $\xi_1$

次に，$t_2$ を低速列車の最小時隔とすれば，高速列車の時隔 $X_1$ が不等式

$$\xi_1=\leqq X_1<\xi_1+t_2$$

をみたすとき，時隔 $X_1$ 内には低速列車を一本入れることができる．また不等式

$$\xi_1+t_2\leqq X_1<\xi_1+2t_2$$

をみたす $X_1$ 内には，低速列車を二本入れることができる．同様に進んで

一般に

$$\xi_1+(n-1)t_2\leqq X_1<\xi_1+nt_2$$

をみたす $X_1$ 内には，$n$ 本の低速列車を入れることができることがわかる．

従って，高速列車の時隔の総数 $N_1$ のうち，低速列車を $n$ 本入れることのできるものは

$$N_1P[\xi_1+(n-1)t_2\leqq X_1<\xi_1+nt_2]$$

だけあるとみなせるので，低速列車の総数は

用語の注意） 以下，時隔といえば時間的間隔を意味するものとする．

$$N_2=N_1\sum_{n=1}^{\infty}nP[\xi_1+(n-1)t_2\leqslant X_1<\xi_1+nt_2]$$

で表され，仮定Vより配分比 $N_1:N_2=\gamma_1:\gamma_2$ $(\gamma_1+\gamma_2=1)$ が与えられるとき

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\sum_{n=1}^{\infty}nP[\xi_1+(n-1)t_2\leqslant X_1<\xi_1+nt_2],$$

或いは，

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\sum_{n=0}^{\infty}\{1-F(\xi_1+nt_2)\}. \tag{3}$$

$F(x)$ は一般にパラメータ $\mu_1$ を含む函数であるから，上の関係式から $\mu_1$ が求められ

$$N=\frac{1440}{\gamma_1\mu_1}$$

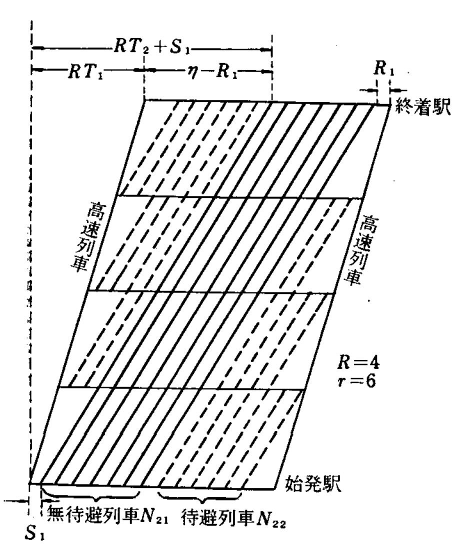
により線路容量が求まるわけである．

こうして求めた線路容量 $N$ は，各待避駅間に列車の筋を引けるだけ引いたのであって，待避の可能性や待避による遅延等はまだ考慮していないので，これを限界線路容量と呼ぶことにして，より実際的な後に述べる線路容量と区別しておこう．

限界線路容量一杯に列車を走らせる線区においては，ある駅で高速列車の一つの時隔中に到着する低速列車数と，その時隔中から出発して行く低速列車数とは等しくなるので，同一高速列車を同時待避する低速列車の本数は，高々

$$K=\left]\frac{T_2-T_1}{t_2}\right[ \qquad \text{(但し ]}x\text{[ は }x\text{ の小数以下繰上げを表す)}$$

である．線区の各駅に $K$ だけの待避線数があれば限界線路容量の列車を走らせることが可能である．




**第2図** 無待避列車が入るための最小時隔 $\mu_1$

各駅の待避線数を $\alpha$ とするとき $\alpha<K$, 即ち $(T_2-T_1)/\alpha>t_2$ の場合は，次節で述べるように低速列車を始発駅より終着駅まで無待避のものとそうでないものとに分けて考えねばならない．それらを夫々，無待避列車及び待避列車と呼ぶことにする．線区の待避駅間数を $R$ として，

$$\eta_1=R(T_2-T_1)+s_1+R_1 \tag{4}$$

とおけば，$\eta_1$ より小さい高速列車の時隔 $X_1$ 内に入る低速列車はすべて待避列車となり，その最小時隔は $(T_2-T_1)/\alpha$ と改めるべきである．さもないと高速列車を待避できなくなるからである．$\eta_1$ より小さい時隔 $X_1$ を更に大きさによって分類すれば，時隔 $X_1$ に入る低速列車の数は

記号の注意） 記号 $]x[$ は不等式 $x\leqslant y<x+1$ をみたす整数 $y$, 即ち $x$ の小数以下繰上げを意味する．

$$\xi_1 \leqq X_1 < \xi_1 + (T_2 - T_1)/\alpha \quad のとき1本,$$

$$\xi_1 + (T_2 - T_1)/\alpha \leqq X_1 < \xi_1 + 2(T_2 - T_1)/\alpha \quad のとき2本,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_1 + (n-1)(T_2 - T_1)/\alpha \leqq X_1 < \xi_1 + n(T_2 - T_1)/\alpha \quad のとき n 本,$$

となる. 但し $n \leqq (R-1)\alpha$.

$\eta_1$ より大きい時隔 $X_1$ 中には $(R-1)\alpha$ 本の待避列車が必ず入ることがわかるが, (第2図点線) それらの時隔はやはり $(T_2-T_1)/\alpha$ としなければならない. この場合は $X_1$ 中に入るのは待避列車だけでなく

$$\eta_1 + (m-1)t_2 \leqq X_1 < \eta_1 + mt_2 \qquad (m=1, 2, \cdots\cdots)$$

に応じて, $m$ 本の無待避列車が時隔 $t_2$ で入ることになる.

従って, 待避線数 $\alpha$ が $(T_2-T_1)/t_2$ より小さいとき(3)式は

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \sum_{n=1}^{(R-1)\alpha} nP\left[\xi_1 + (n-1)\frac{T_2-T_1}{\alpha} \leqq X_1 < \xi_1 + n\frac{T_2-T_1}{\alpha}\right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \{(R-1)\alpha + m\} P[\eta_1 + (m-1)t_2 \leqq X_1 < \eta_1 + mt_2]$$

$$= \sum_{n=0}^{(R-1)\alpha-1} \left\{1 - F\left(\xi_1 + m\frac{T_2-T_1}{\alpha}\right)\right\} + \sum_{m=0}^{\infty} \{1 - F(\eta_1 + mt_2)\} \qquad (3')$$

となる.

## 3. 線 路 容 量

前節で求めた限界線路容量一杯に列車を走らせるならば, 低速列車は高速列車を待避するために, 終着までに相当の遅れを余儀なくされるかもしれない. 実際上, あまり遅れの大きい列車は, 列車としての機能を果さなくなってしまうので, それらは容量 $N$ の中から除外しなければならない.

そこで待避列車のうち待時間の大きいものを除くことにより, 総列車数を減らし, 低速列車一列車当りの待時間を予め定められた時間 $W$ を超えないようにすることが考えられる. そのような待時間の制限の下に求められる線路容量は前節のものよりも, より実際的であろう.

註. 待避列車のうち待時間の大きいものを選び出す方法は, 複雑すぎるので, 我々は単に待避列車数を減少させることにした. 待避列車の一駅における平均待時間を制限する方法は第6節で述べられる. 待避列車の一駅における最大待時間を制限することも考えられるが, それについては後の機会にゆずる.

低速列車のうち高速列車を待避しないものの本数を $N_{21}$ とし, 待避するものの本数を $N_{22}$ として $N_2$ をそれらの和に分解する:

$$N_2 = N_{21} + N_{22}.$$

無待避列車は, 前節(4)式で定義される $\eta_1$ より大きい時隔 $X_1$ 中に第2図の実線のように入るので, その総数 $N_{21}$ は次式で与えられる.

$$N_{21}=\sum_{m=1}^{\infty} mN_1P[\eta_1+(m-1)t_2 \leqslant X_1 < \eta_1+mt_2]$$

$$=N_1\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F(\eta_1+mt_2)\}. \tag{5}$$

一方，待避列車は $\eta_1$ より大きい間隔 $X_1$ 中には第2図の点線のように

$$r=\left[\frac{(R-1)(T_2-T_1)}{t_2}\right] \qquad \text{(但し } [x] \text{ は } x \text{ の整数部分を表す.)}$$

本入り，$\eta_1$ より小さい時隔 $X_1$ の中には，

$$\xi_1+(m-1)t_2 \leqslant X_1 < \xi_1+mt_2 \qquad (m=1, 2, \cdots, r-1)$$

に応じて $m$ 本入る．$m=r$ のときは，不等式の右辺は $\xi_1+rt_2$ の代りに $\eta_1$ となり，$r$ 本の待避列車が入る．従って

$$N_{22}=\sum_{m=1}^{r-1} mN_1P[\xi_1+(m-1)t_2 \leqslant X_1 < \xi_1+mt_2]+rN_1P[\xi_1+(r-1)t_2 \leqslant X_1 < \eta_1]+$$

$$+rN_1P[\eta_1 \leqslant X_1]$$

$$=N_1\sum_{m=0}^{r-1}\{1-F(\xi_1+mt_2)\}. \tag{6}$$

そこで $N_{22}$ に利用率 $f$ をかけて，低速列車を

$$N_2(f)=N_{21}+fN_{22} \qquad (0 \leqslant f \leqslant 1)$$

に減少させ，(5) (6) 式を代入し，$N_1 : N_2=\gamma_1 : \gamma_2$ を用いれば

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F(\eta_1+mt_2)\}+f\sum_{m=0}^{r-1}\{1-F(\xi_1+mt_2)\}^{*)} \tag{7}$$

を得，これより $\mu_1=\mu_1(f)$ を求め

$$N(t)=\frac{1440}{\gamma_1\mu_1} \tag{8}$$

から，利用率 $f$ に対する容量が求まる．

利用率 $f$ の場合は同時待避数も

$$K(f)=\left]f\cdot\frac{T_2-T_1}{t_2}\right[ \qquad \text{(次の註を参照)}$$

に減少すると考えることができるので，待避線数 $\alpha$ が $K(f)$ より小さい場合即ち前節で述べたのと同様に待避列車の時隔を $f(T_2-T_1)/\alpha$ に拡大しなければならない．そこで(7)式は

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F(\eta_1+mt_2)\}+f\sum_{m=0}^{r-1}\left\{1-F\left(\xi_1+m\cdot f\cdot\frac{T_2-T_1}{\alpha}\right)\right\} \tag{7'}$$

となる．

註．以下待避線数の制限について，一々断るのは煩雑なので

---

*) 当然のことながら $f=1$ のとき，(7)，(7′) は (3)，(3′) 式になる．但し (7) から (3) に移るときは $(R-1)(T_2-T_1)=rt_2$ とみなす．

$$\mu_2=\max\left(t_2, f\frac{T_2-T_1}{\alpha}\right) \tag{9}$$

を用いることにする．即ち $\alpha<K(f)$ と $\alpha<f(T_2-T_1)/t_2$，或いは $t_2<f(T_2-T_1)/\alpha$ とが同等の条件を表すことに注意すれば，$\mu_2$ は $\alpha\geqq K(f)$ のとき $t_2$ に等しく，$\alpha<K(f)$ のとき $f(T_2-T_1)/\alpha$ に等しい数を表している．これによれば，(7)，(7′)は統一され

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_1(\mu_1+mt_2)\}+f\sum_{m=0}^{r-1}\{1-F_1(\xi_1+m\mu_2)\} \tag{7''}$$

とかけるわけである．更に $K(f)$ の定義も $t_2$ を $\mu_2$ におきかえて

$$K(f)=\left]f\frac{T_2-T_1}{\mu_2}\right[=\min\left(\left]f\frac{T_2-T_1}{t_2}\right[, \alpha\right)$$

を用いることにする．

次に $N(f)$ だけの列車を走らせたときの低速列車の待時間の総和(期待値)を求めよう．中間待避駅の数は $R-1$ であり，我々の仮定により，それらの各駅での待時間は等しいと考えられるので，求める待時間の総和は一つの中間駅での待時間の $R-1$ 倍である．そこで今，一待避駅 A を取上げ，二つの高速列車 $l$ 及び $g$ が A 駅でつくる時隔 $X_1$ のみに注目し，その中での低速列車の待時間の総和を求めることにする．その際，問題の時隔 $X_1$ 内での低速列車の待時間は $l$ の出発のための遅れと $g$ の到着のための遅れとに分類して取扱われる．

ところで，待避列車の本数 $N_{22}$ を $f$ 倍に減ずることは，待避列車の平均時隔を 1/f 倍することと同じである．しかもそのとき待避列車の時隔を確率変数と考えるべきであるが，計算が複雑になるので，そうすることはまた後の機会にゆずり，我々は待避列車時隔を等時隔と仮定する．

仮定VI．待避列車(同志)の時隔は $\mu_2/f$ とする．

註．上の仮定の下では，待避列車数 $N_{22}$ は正確には $fN_{22}$ に減ずるのではなく，直接それを計算することにより

$$N_{22}(f)=N_1\sum_{m=0}^{s-1}\left\{1-F\left(\xi_1+m\frac{\mu_2}{f}\right)\right\} \qquad (\text{但し } s=[fr]) \tag{10}$$

となることが容易にわかる．従って(7″)式は

$$\boxed{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F(\mu_1+mt_2)\}+\sum_{m=0}^{s-1}\left\{1-F\left(\xi_1+m\frac{\mu_2}{f}\right)\right\}} \tag{7'''}$$

となる．時隔 $X_1$ に入る待避列車数は $X_1>\eta_1+\mu_2/f$ のとき最大数に達するが，その数が

$$S=[fr]=\left[f\frac{(R-1)(T_2-T_1)}{\mu_2}\right]$$

である．(この関係を示す図は第2図から容易に類推できよう．)

各駅で $l$ の出発後第一番目に出発する低速列車は，$l$ の出発後一定時隔 $t_l$ を保って出発するものとすれば，利用率 $f$ のときの最大同時待避数は，先にも述べたように $K(f)$ と考えられる．(第3図参照)最大同時待避数 $K(f)$ の列車を $X_1$ 中から出発させうるには，$X_1\geqq\xi_1+(K-1)\mu_2/f$ でなければならない．(以下簡単のため $K(f)$ を単に $K$ とかくことにする．) 不等式の向きが逆の場合には $K$ 本の列車を出発させるわけにはいかない．後続の高速列車に追着かれてしまうからである．(第4図の $X_1$ 参照)最大同時待避数の列車を $X_1$ 内から出発させうるか否かによって $X_1$ を二種に大別して論ずる．第一の場合には $X_1$ 内の待避列車が最大数 $s$ に達する場合に特別な

注意が必要であり，第二の場合には $X_1$ 内から一列車も出発できない場合に注意しなければならない．

**［第一の場合］** $(X_1 \geqq \xi_1+(K-1)\mu_2/f$ の場合)

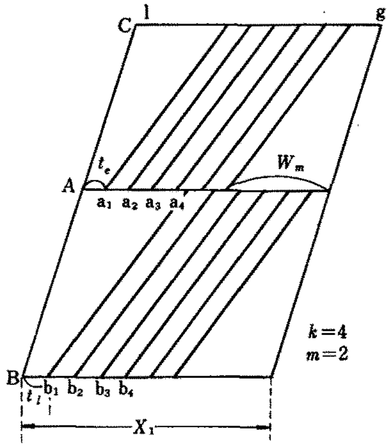
更に $\varepsilon_m^K$: $\xi_1+(K+m-1)\mu_2/f \leqq X_1 < \xi_1+(K+m)\mu_2/f$ $(m=0,1,2,\cdots,s-K-1)$ 及び $\varepsilon_{s-K}^K$: $\xi_1+(s-1)\mu_2/f \leqq X_1$ の $s-K+1$ 種の場合に分類し，以下において一つの $\varepsilon_m^K$ に対する．待時間を計算する．

註．上記不等式で定義される事象 $\varepsilon_m^K$ は，$X_1$ がその中に $K+m$ 本の待避列車をもち，$K$ 本はA駅で待避するが，$m$ 本はA駅では待避しないという事象である．(勿論，待避列車が，我々の仮定に従って $X_1$ 中に組入れられているという前提の下での話である．) $X_1$ 内の待避列車の最大数は $s$ であったので，$K+m \leqq s$ であるが，等号の場合，即ち $m=s-K$ の場合は，$\varepsilon_{s-K}^K$ の定義式が特別の形となる．そうしさえすれば，以下の議論は $m=s-K$ の場合にも，そのまま通用する．

A駅で $l$ に追越される列車は $K$ 本あるが，それらを $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_K$ とすれば，夫々の待時間は $t_l$, $t_l+\mu_2/f, t_l+2\mu_2/f, \cdots, t_l+(K-1)\mu_2/f$ であるから，(第3図)それらの和は

$$Kt_l+\frac{K(K-1)}{2}\cdot\frac{\mu_2}{f}.$$

A駅で $g$ を待つ列車数も $K$ であることが容易にわかるが，それらの列車を $a_1', a_2', a_3', \cdots, a_K'$ とするとき，夫々の待時間は第3図からわかるように，$W_m, W_m-\mu_2/f, W_m-2\mu_2/f, \cdots, W_m-(K-1)\mu_2/f$ (但し $W_m=X_1-(T_2-T_1+t_l)-m\mu_2/f$) となるから，それらの和の期待値は




**第3図** $\varepsilon_m^K$ の場合

$$KE^{\varepsilon_m^K}X_1-K(T_2-T_1-t_l)-Km\frac{\mu_2}{f}-\frac{K(K-1)}{2}\frac{\mu_2}{f}$$

である．

上記二種類の待時間の和は

$$KE^{\varepsilon_m^K}X_1-K(T_2-T_1)-Km\frac{\mu_2}{f}.$$

しかし，A駅及びB駅では独立に低速列車を発車させるために第3図の $b_1, b_2$ のように，A駅では $l$ も $g$ も待避しないが，前の低速列車の遅れの影響で出発が遅れることがある．その待時間は

$$m(K\mu_2/f-(T_2-T_1))$$

と考えられるので，すぐ前の式と併せて $\varepsilon_m^K$ の場合の待時間

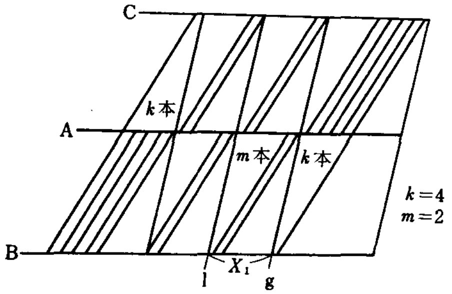
$$KE^{\varepsilon_m^K}X_1-(K+m)(T_2-T_1) \tag{11}$$

を得る．

**［第二の場合］** ($X_1<\xi_1+(K-1)\mu_2/f$ の場合)

更に $\varepsilon_m$: $\xi_1+(m-1)\mu_2/f\leqslant X_1<\xi_1+m\mu_2/f$ ($m=1,2,\cdots,K-1$) 及び $\varepsilon_0$: $X_1<\xi_1$ の $K$ 種の場合に分類し，以下において一つの $\varepsilon_m$ に対する待時間を計算する．

註．$\varepsilon_0$ の場合にも $m=0$ として，以下の議論が成立つが，そのとき後半の議論だけでよいのであって，前半は単なる形式となる．




第4図　$\varepsilon_m$ の場合

まず，$l$ の出発のため出発を遅らされて，時隔 $X_1$ 内から（$g$ とは無関係に）出て行く列車の待時間を考えよう．それは $l$ に近いものから順に $t_l, t_l+\mu_2/f, t_l+2\mu/f,\cdots,t_l+(m-1)\mu_2/f$ であるから，それらの和は

$$mt_l+\frac{m(m-1)}{2}\frac{\mu_2}{f}.$$

次に，$X_1$ 内に（$l$ の出発後）到着して $g$ を待避する列車について考えると，夫々の待時間は $W_0, W_0-\mu_2/f, W_0-2\mu_2/f,\cdots,W_0-(m-1)\mu_2/f$ であるから，それらの和の期待値は

$$mE^{\varepsilon_m}X_1-m(T_2-T_1+t_l)-\frac{m(m-1)}{2}\frac{\mu_2}{f}.$$

上記二種類の待時間の和は

$$mE^{\varepsilon_m}X_1-m(T_1-T_2).$$

上式は $l,g$ の一方のみに関して待避する列車の待時間の和であるが，$\varepsilon_m$ の場合には，その外 $l,g$ に両方を待つ列車を生ずる．（殊に $\varepsilon_0$ の場合は，すべて $l,g$ 両方に関係し，上記のような $l,g$ 一方のみに関係する列車はないので上式の値は0になるのであって，待時間は以下に述べるものだけである．）前の時隔から時隔 $X_1$ に繰越してくる列車は，時隔 $X_1$ の初めには $K$ 本あるということは容易にわかるが，このうち $m$ 列車が時隔 $X_1$ 内で出発してしまい，残りの $K-m$ 列車が更に次の時隔まで繰越されるわけである．その待時間は $(K-m)X_1$ であるから，期待値は

$$(K-m)E^{\varepsilon_m}X_1,$$

これと前式とを併せれば，$\varepsilon_m$ の場合の総待時間として

$$KE^{\varepsilon_m}X_1-m(T_2-T_1) \tag{12}$$

を得る．

以上ですべての場合を尽したので，(11)，(12)両式に基いて，それらの総和 $\Sigma$ を計算する．そのとき $\varepsilon_m^K=\varepsilon_{K+m}$ であることに注意すれば

$$\Sigma=K\sum_{m=0}^{s-K}P(\varepsilon_m^K)E^{\varepsilon_m^K}X_1-(T_2-T_1)\sum_{m=0}^{s-k}(K+m)P(\varepsilon_m^K)+K\sum_{m=0}^{K-1}P(\varepsilon_m)E^{\varepsilon_m}X_1-(T_2-T_1)\sum_{m=0}^{K-1}mP(\varepsilon_m)$$

$$=K\sum_{m=0}^{s}P(\varepsilon_m)E^{\varepsilon_m}X_1-(T_2-T_1)\sum_{m=1}^{s}mP(\varepsilon_m)$$

となる．しかるに $\sum\varepsilon_m$ は全事象であるから

$$\sum_{m=0}^{s} P(\varepsilon_m) E^{\varepsilon_m} X_1 = EX_1 = \mu_1,$$

また，$1-F(\xi_1+m\mu_2/f)=a_m$ とおけば

$$\sum_{m=1}^{s} mP(\varepsilon_m) = \sum_{m=1}^{s-1} m(a_{m-1}-a_m) + sa_{s-1} = \sum_{m=0}^{s-1} a_m = N_{22}(f)/N_1.$$

(最後の等式は(10)式による．)従って，全線区で一日についての待時間の総和の期待値 $EW(f)$ は

$$\boxed{EW(f)=(R-1)\{1440K-(T_2-T_1)N_{22}(f)\}} \tag{13}$$

となる．また一待避駅一低速列車当りの待時間の期待値を $w(f)$ とすれば

$$w(f)=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left\{K\mu_1-(T_2-T_1)\frac{N_{22}(f)}{N_1}\right\}.$$

(7‴)式の右辺第二項が $N_{22}(f)/N_1$ であることに注意して上式から $N_{22}(f)/N_1$ を消去すれば

$$\boxed{w(f)=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left\{K\mu_1+(T_2-T_1)\sum_{m=0}^{\infty}(1-F(\eta_1+mt_2))\right\}-(T_2-T_1)} \tag{14}$$

従って

$$w(f) \leqslant W \qquad (0 \leqslant f \leqslant 1) \tag{15}$$

の条件の下に(7‴)及び(14)式をみたす最小の $\mu_1$ を求めれば，待時間制限 $W$ の線路容量が求まるわけである．(14)式の中の $K$ に，まだ $f$ が含まれているので，(7‴)が必要なのである．もし(7‴)が $f$ について解けるならば，これを(14)式の $K$ の中に代入することにより，(14)式を $w(f)=w(\mu_1(f))$ の形に書き換え，(15)式と共に用いて我々の問題を解くことができる．しかし，$f$ と $K$ との関係をもう少し詳しく調べれば(7‴)が $f$ について解けなくても，$f$ の可能な範囲に対応する $\mu_1$ の可能な範囲さえわかればよいことがいえる．

$f>\alpha t_2/(T_2-T_1)$，即ち $f(T_2-T_1)/t_2>\alpha$ ならば $K=\alpha$ で(14)式は $f$ に関係しなくなる．$f \leqslant \alpha t_2/(T_2-T_1)$ の場合には，$0<f\leqslant f_2 t_2/(T_2-T_1)$ ならば $K=1$，$t_2/(T_2-T_1)<f\leqslant 2t_2/(T_2-T_1)$ ならば $K=2, \cdots, (\alpha-1)t_2/(T_2-T_1)<f\leqslant \alpha t_2/(T_2-T_1)$ ならば $K=\alpha$ となるので，(7‴)から $(i-1)t_2/(T_2-T_1)<f\leqslant it_2/(T_2-T_1)$ $(i=1,2,\cdots,\alpha)$ をみたす $f$ に対する $\mu_1$ の範囲 $D_i$ $(i=1,2,\cdots,\alpha)$ がわかれば，(14)式の $K$ の代りに $i$ を入れた式と(15)式，即ち

$$\boxed{\begin{aligned} &w(f(\mu_1))=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left\{i\mu_1+(T_2-T_1)\sum_{m=0}^{\infty}(1-F(\eta_1+mt_2))\right\}-(T_2-T_1) \\ &w(f(\mu_1))\leqslant W, \qquad \mu_1 \varepsilon D_i \qquad (i=1,2,\cdots,\alpha) \end{aligned}}$$

をみたす $\mu_1$ のうち最小のものを求めれば，我々の問題を解くことができるのである．

## 4. 近 似 式

我々の仮定の下に高速列車が優先してダイヤに組込まれるとき，高速列車の間隔の分布 $F(x)$ は平均値 $\mu_1$ の $t_1$-truncated 指数分布になる．(附録 I 参照)

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x_1-t_1}{\mu_1-t_1}} & for\ x\geqslant t_1,\\ 0 & for\ x\leqslant t_1\end{cases}$$

により無待避低速列車及び待避低速列車の本数を計算すれば

$$N_{21}=N_1e^{-\frac{\eta_1-t_1}{\mu_1-t_1}}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-\frac{mt_2}{\mu_1-t_1}}=N_1\frac{e^{-\frac{\eta_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{t_2}{\mu_1-t_1}}}$$

$$N_{22}=N_1e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}\sum_{m=0}^{r-1}e^{-\frac{m\mu_2}{\mu_1-t_1}}=N_1\frac{e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{\mu_2}{\mu_1-t_1}}}(1-e^{-\frac{\gamma\mu_2}{\mu_1-t_1}}) \tag{16}$$

$$N_{22}(f)=N_1e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}\sum_{m=0}^{s-1}e^{-\frac{m\mu_2}{(\mu_1-t_1)f}}=N_1\frac{e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{\mu_2}{(\mu_1-t_1)f}}}(1-e^{-\frac{s\mu_2}{(\mu_1-t_1)f}})$$

となるので(7″)及び(7‴)は夫々

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{e^{-\frac{\eta_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{t_2}{\mu_1-t_1}}}+\frac{fe^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{\mu_2}{\mu_1-t_1}}}(1-e^{-\frac{(R-1)(T_2-T_1)}{\mu_1-t_1}}) \tag{17}$$

及び

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{e^{-\frac{\eta_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{t_2}{\mu_1-t_1}}}+\frac{e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{\mu_2}{(\mu_1-t_1)f}}}(1-e^{-\frac{(R-1)(T_2-T_1)}{\mu_1-t_1}}) \tag{18}$$

となる．但し，$\mu_2=\max\left(t_2,f\dfrac{T_2-T_1}{\alpha}\right)$であり，$r\mu_2=(R-1)(T_2-T_1)=s\mu_2/f$ とした．

また待時間の式(14)は

$$w(f)=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left\{K\mu_1+(T_2-T_1)\frac{e^{-\frac{\eta_1-t_1}{\mu_1-t_1}}}{1-e^{-\frac{t_1}{\mu_1-t_1}}}\right\}-(T_2-T_1) \tag{19}$$

となる．但し，$K=\min\left(\left]f\dfrac{T_2-T_1}{t_2}\right[,\ \alpha\right)$.

従って(17)式又は(18)式から $\mu_1=\mu_2(f)$ を求め $N(f)=1440/\gamma_1\mu_1$ に代入すれば利用率 $f$ に対する線路容量を得る．また

$$0\leqslant f\leqslant 1,\qquad w(f)\leqslant W$$

なる条件の下に(18), (19)をみたす最小の $\mu_1$ を求め，$N=1440/\gamma_1\mu_1$ に代入すれば待時間制限 $W$ に対する容量が求まるわけである．

種々の定数が多いために一般的な解を得ることは困難であるが，箇々の例については比較的簡単に解が求められる．以下二，三の例を示しておく．(実際は $\mu$ の値が小数以下一位まで正しく読め

るように大きい図を用いた.）

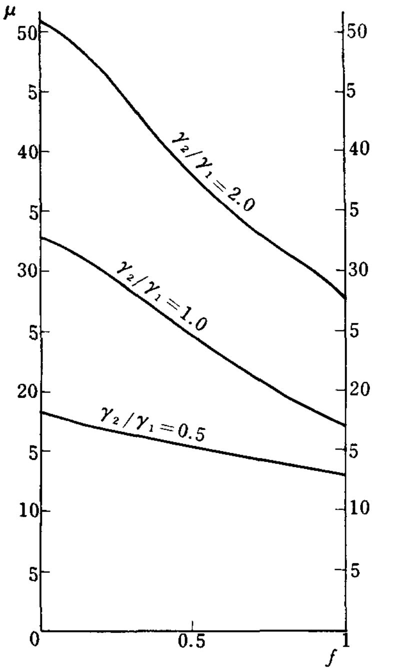
例 1.　$t_1=4$, $\xi_1=14$, $\eta_1=64$, $T_2-T_1=5$, $R=11$, $t_2=10$, $\alpha=1$ の場合.

$$\mu_2=\max(10, 5f)=10$$

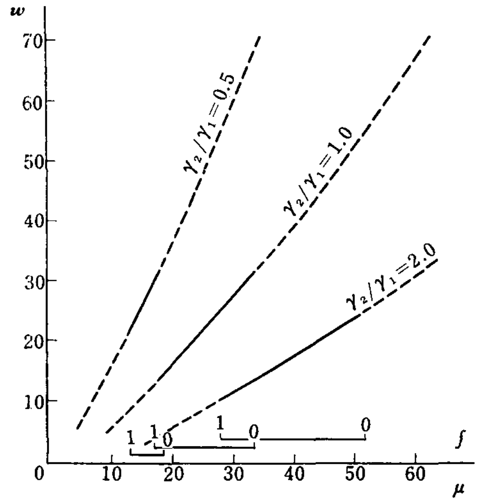
となるから(18)式から $f$ と $\mu$ との関係を示すグラフを作れば第5図のようになる．また

$$K=\left]\frac{5}{10}f\right[=1$$

となるので(19)式は $f$ には直接関係しなくなり $\mu_1$ と $w$ との関係は第6図のグラフに示すようになる．ところが第5図からわかるように $f$ の可能な値に対する $\mu_1$ の範囲が制限されるので，その範囲を第6図の下に線分で示し，その範囲内の $w$ の値を示す曲線の部分を実線によって表し他の部分と区別した.




第5図　$f$ と $\mu$ との関係




第6図　$\mu_1$ と $w$ との関係(例1)

第6図から $\mu_1=13.1$, $\mu_1=17.1$, $\mu_1=28.1$ が $\gamma_2/\gamma_1$ の各値 0.5, 1.0, 2.0 に対する最小の $\mu_1$ の値であることがわかる．それにより容量 $N$ を計算すれば，夫々の場合に対して

165, 168, 153

を得る.

これらに対するが平均待時間は第6図からわかるように 20, 12, 10 であるが，$W$ がそれらの値より小さいときには，そのような条件の下での線路容量を求めることは不可能である．また $W$ が 20, 12, 10 以上ならば条件式 $w(f)\leqslant W$ はこの例では利いてこなかったことになる.

そこで制限式 $w(f)\leqslant W$ が利いてくる例を次に示そう.

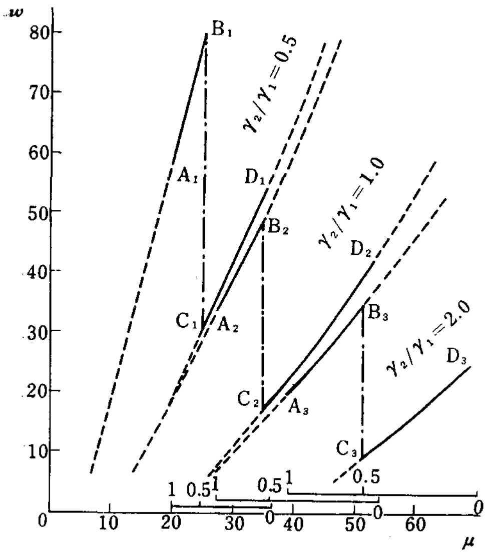
例 2.　$t_1=3$, $\xi_1=28$, $\eta_1=128$, $T_2-T_1=20$, $R=6$, $t_2=10$, $\alpha=2$ の場合.

$$\mu_2=\max(10, 10f)=10$$

となるから，例1と同様に(18)式から $f$ と $\mu$ との関係をグラフにかく．(省略)

$$K=\min(]2f[,2)=\begin{cases}1 & for\ f\leqslant 0.5,\\ 2 & for\ f>0.5\end{cases}$$

となるので $\mu$ と $w$ との関係を示す曲線は二つに分れる．第7図はこれを示し，勾配の急のものから順に $\gamma_2/\gamma_1=0.5,\ 1.0,\ 2.0$ に対する曲線が二つづつ，計六本並んでいる．(第二と第三，第四と第五は接近しているので注意を要する．)




**第7図** $\mu_1$ と $w$ との関係(例2)

そこで先にかいた $f$ と $\mu$ との関係を示すグラフから，$f=0\sim0.5,\ 0.5\sim1.0$ に対する $\mu$ の範囲を求め，それを第7図の下に線分で示す．そうすると $\gamma_2/\gamma_1=0.5$ に対する曲線は $A_1B_1$ 及び $C_1D_1$ の部分にかぎられ，$\gamma_2/\gamma_1=1.0$ 対にする曲線は $A_2B_2$ 及び $C_2D_2$ の部分にかぎられ，$\gamma_2/\gamma_1=2.0$ に対する曲線は $A_3B_3$ 及び $C_3D_3$ の部分にかぎられることがわかる．従って待時間の制限のない場合には，$\gamma_2/\gamma_1=0.5,\ 1.0,\ 2.0$ の各場合の最小の $\mu_1$ は $A_1,\ A_2,\ A_3$ の三点に対応する 20，27.2，39 であり，それに対する容量 $N$ は

$$108,\ 106,\ 111$$

となる．

そのときの平均待時間は 59，34，20 となるから，制限 $W$ がそれらの値以下になるときは，$\mu_1$ の最小値は $C_1,\ C_2,\ C_3$ の三点に対応する値 24.8，35.0，51.5 を取ることになり，線路容量は

$$87,\ 82,\ 84$$

となる．その場合，平均待時間は 31，15.5，10.5 となる．

次にこの例において待避線数を $\alpha=1$ に減じてみよう．そのとき

$$\mu_2=\max(10,20f)=\begin{cases}10 & for\ f\leqslant 0.5\\ 20f & for\ f>0.5\end{cases}$$

となり(18)式に代入するとき，$f>0.5$ に対する式はすべて $f=0.5$ の式に一致してしまうことがわかるので，第6図で $\mu_1$ の範囲を示す線分は 0.5 から 0 までの範囲を示す右側の部分だけとなる．従ってこの範囲に対応する $w$ の曲線は，$\gamma_2/\gamma_1=0.5, 1.0,\ 2.0$ の各場合に対して $C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3$ となる．最小の $\mu_1$ は $C_1,\ C_2,\ C_3$ の三点に対応する値であり $N$ は

$$87,\ 82,\ 84$$

となる．これは先に求めた待時間制限のある場合に一致する．

即ち，待時間を制限すると容量を減ずるため待避線の本数が少くてすむことになる．逆にいえば，待避線数を増して低速列車を待避させることにより容量を増すときは，それに応じて低速列車の待時間が増大することがわかる．但し，高速列車と低速列車の配分比 $\gamma_1:\gamma_2$ を変え得るときは話が別である．

以上で待時間，待避線数，配分比と容量との関係が或程度わかったが，より詳しい研究は，我々の式を修正することによって得られると思う．例えば第6図，第7図の曲線の勾配は実際よりも大きく出てしまっていることに注意しておく．それは，我々が前節で待避列車の間隔に対してなした仮定が，一列車当りの待時間を減少させるのに何ら役立っていないということのためであり，この仮定をより実際的な仮定で置き換えることは今後の課題である．それにもかかわらず，$\mu$ の最小値を求めることに関する限りは，我々の式は修正を必要としないのである．

最後に(16)式に現れる $\sum_{m=0}^{\infty}e^{-am}(a>0)$ の形の級数を上，下から積分評価して，上下価式の平均を以て近似することにより

$$\frac{1}{1-e^{-a}}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{-am}\doteqdot\frac{1}{2}+\frac{1}{a}$$

とみなすことにすれば(17)式は

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=e^{-\frac{\eta_1-t_1}{\mu_1-t_1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu_1-t_1}{t_2}\right)+f\cdot e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu_1-t_1}{\mu_2}\right)\left(1-e^{-\frac{(R-1)(T_2-T_1)}{\mu_1-t_1}}\right)$$

となる．ここで $f=1$ とすれば限界容量の式を得るが，$\alpha\geqslant(T_2-T_1)/t_2$ の場合は $\mu_2=t_2$ となるので

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=e^{-\frac{\xi_1-t_1}{\mu_1-t_1}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\mu_1-t_1}{t_2}\right)$$

を得る．これは後に述べる §5(25)式から直接導かれるものであり，以前にもその方法で導いたことがあるが，本節の式従って §2(3)式の近似を与えていることをここに注意しておく．また，この式については，大月輝雄-林茂両氏共著の論文*)に実際問題への適用法が詳しく述べられているので参照されたい．

## 5. $n$ 種類の列車に対する限界線路容量

次に $n$ 種類の列車から成る場合を考える，最高速列車を第一種列車と呼び，速度の順に第二種，第三種，…とし，最低速列車を第 $n$ 種列車とする．$t_k$ 及 $T_k$ を夫々第 $k$ 種列車の最小時隔及び待避駅間通過時間とすれば，一般に

$$t_1<t_2<\cdots<t_n,\qquad T_1<T_2<\cdots<T_n,$$

$\xi_k^{k+1}$ を第 $k$ 種列車の時隔で第 $k+1$ 種列車の入りうる最小のものの大きさとすれば

$$\xi_k^{k+1}=T_{k+1}-T_k+s_k+R_k$$

である．

*) 大月輝雄-林茂：複線区間における線路容量について．国鉄岐阜工事局刊行．岐工情報　39号，1961. pp. 14-23.

さて，仮定のごとくダイヤは第一種列車から順にきめて行くことにする．運行図表中の列車の筋を高速のものから順に書き入れて行くことを想定する．($n$ 段階にわけて述べる．)

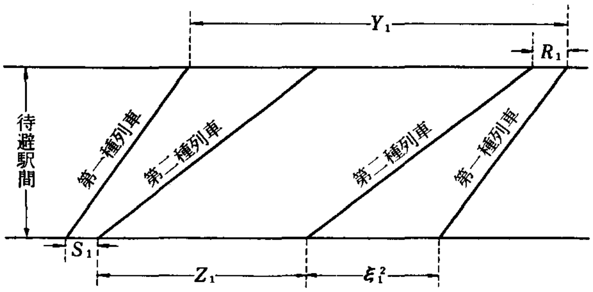
註．以下一待避駅間のみを考えるが，そこでランダムに入れられたダイヤは，次の駅間へ延長した場合，そこでもランダム性を保つものとみなした．このことに関しては，もう少し詳しく検討しなければならないが，次の機会にゆずる．

第一段．第一種列車のダイヤが任意にきめられる．即ち，第一種列車の時隔 $X_1$ の分布 $F(x)$ と平均値 $\mu_1$ とが与えられるものとする．このとき明かに

$$N_1=\frac{B_1}{\mu_1},\qquad B_1=1440 \tag{20}$$

である．

第二段．第一種列車のダイヤがきまったとき，第一種列車の間に第二種列車のダイヤを組込むことを考える．そのとき列車時隔を一定値($t_1$ 又は $t_2$) だけ保つ以外は任意に(又はある分布法則に従って)ダイヤを定めることができるものとする．(但し次節で，待時間，同時待避の制限を加える．)第一種列車の時隔のうち第二種列車の入り込み得るものは $\xi_1^2$ より大きいものであるから，これを特に $Y_1$ で表すことにする．第二種列車のダイヤは時隔 $Y_1$ の左から $t_1$ と右から $\xi_1^2-t_1$ との合計 $\xi_1^2$ の長さの部分を取除いた残りの長ら $Y_1-\xi_1^2$ の部分ならば自由に(列車時隔 $t_2$ を保って)入れることができる．(第8図参照)




**第8図** 第二種列車の組込める時間帯 $z_1$

従って第一段の $B_1$ の代りに $Z_1=Y_1-\xi_1^2$ 時間帯を用いて，この時間帯に列車を組入れて行けばよい．

$$EY_1=\frac{1}{1-F_1(\xi_1^2)}\int_{\xi_1^2}^{\infty}xdF_1(x)=\xi_1^2+\frac{1}{1-F_1(\xi_1^2)}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))dx,$$

従って

$$EZ_1=\frac{1}{1-F_1(\xi_1^2)}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))dx.$$

また $B_1$ 中におこる $Y_1$ の平均生起箇数 $m_1$ は

$$m_1=N_1P(X_1<\xi_1^2)=\frac{B_1}{\mu_1}(1-F_1(\xi_1^2))$$

であるから，$Z_1$ 時間帯中での第二種列車の時隔を $X_2$，その分布を $F_2$，平均値を $\mu_2$ とすれば

$$N_2=\frac{m_1EZ_1}{\mu_2}=N_1\frac{1}{\mu_2}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))dx=\frac{B_1}{\mu_1\mu_2}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))dx \tag{21}$$

となる．

註．右辺の整数部分をとるべきであるが，簡単のためそうしなかった．

第三段．次に第二種列車の時隔 $X_2$ 中に第三種列車を組入れることを考える．$X_2$ 時隔中 $\xi_2^3$ より大きいものを $Y_2$ とすれば，第三種列車のダイヤは $Y_2$ 時隔の左から $t_2$ と右から $\xi_2^3-t_2$ との合計 $\xi_2^3$ の長さの部分を除いた残りの長さ $Y_2-\xi_2^3$ の部分ならば，自由に（列車時隔 $t_3$ を保って）入れることができる．従って，第二段の $Z_1$ の代りに $Z_2=Y_2-\xi_2^3$ 時間帯を考えてこの時間帯に列車を組入れて行けばよい．

註．第一種列車と第二種列車との間隔は $2m_1$（これも概数であるが）ある筈であるが，これらのうち半数の $m_1$ は第二種列車の時隔とみなし，他の半数の $m_1$ ケは第三種列車を挿入する時間帯としての候補から除外した．これを入れた式は，複雑になる以外の効果がないと思われるので省略したのである．

$X_2$ の分布を $F_2(x)$ として

$$EZ_2=\frac{1}{1-F_2(\xi_2^3)}\int_{\xi_2^3}^{\infty}(1-F_2(x))\,dx.$$

また，$Z_1$ 中に起る $Y_2$ の平均生起箇数 $m_2$ は

$$m_2=\frac{EZ_1}{\mu_2}(1-F_2(\xi_2^3))$$

従って

$$m_1m_2=N_2(1-F_2(\xi_2^3))$$

であるから，

$$N_3=\frac{m_1m_2EZ_2}{\mu_3}=N_2\frac{1}{\mu_3}\int_{\xi_2^3}^{\infty}(1-F_2(x))=\frac{B_1}{\mu_1\mu_2\mu_3}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))\,dx\int_{\xi_2^3}^{\infty}(1-F_2(x))\,dx \quad (22)$$

同様に第四段，第五段，…と進んで最後に

第 $n$ 段．第 $n-1$ 種列車の時隔 $X_{n-1}$ 中に第 $n$ 種列車を組入れることを考える．$X_{n-1}$ 時隔中 $\xi_{n-1}^n$ より大きいものを $Y_{n-1}$ とすれば，第 $n$ 種列車は，$Y_{n-1}$ 間隔の左から $t_{n-1}$ と右から $\xi_{n-1}^n-t_n$ との合計 $\xi_{n+1}^n$ の長さの部分を除いた残りの部分に入ることは前と同様である．ここで §2 と同様に最低速列車をその最小時隔 $t_n$ で一杯に組入れて以上の操作に終止符を打つものとすれば，次のようになる．$m$ 本の第 $n$ 種列車を入れることのできる時隔 $X_{n-1}$ の箇数は

$$N_{n-1}P[\xi_{n-1}^n+(m-1)t_n\leqslant X_{n-1}<\xi_{n-1}^n+mt_n]=N_{n-1}F\{_{n-1}(\xi_{n-1}^n+mt_n)-F_{n-1}(\xi_{n-1}^n+(m-1)t_n)\}$$

と考えられるので

$$\begin{aligned}N_n&=N_{n-1}\sum_{m=1}^{\infty}mP[\xi_{n-1}^n+(m-1)t_n\leqslant X_{n-1}<\xi_{n-1}^n+mt_n]\\&=N_{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^n+mt_n)\}\\&=\frac{B_1}{\mu_{n-1}}\prod_{i=1}^{n-2}\int_{\xi_i^{i+1}}^{\infty}\frac{1-F_i(x)}{\mu_i}dx\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^n+mt_n)\}\end{aligned} \quad (23)$$

ここに

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_{n-1}(\xi+mt)\}\geqslant\frac{1}{t}\int_{\xi}^{\infty}(1-F_{n-1}(x))\,dx\geqslant\sum_{m=1}^{\infty}\{1-F_{n-1}(\xi+mt)\}$$

であるから

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^{n}+mt_n)\}\sim\frac{1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^{n})}{2}+\frac{1}{t_n}\int_{\xi_{n-1}^{n}}^{\infty}(1-F_{n-1}(x))dx$$

とみなすことにする.

以上まとめて

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 N=N_1=\frac{B_1}{\mu_1},\\
&\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{1}{\mu_2}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))dx,\\
&\frac{\gamma_3}{\gamma_2}=\frac{1}{\mu_3}\int_{\xi_2^3}^{\infty}(1-F_2(x))dx,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-2}}=\frac{1}{\mu_{n-1}}\int_{\xi_{n-2}^{n-1}}^{\infty}(1-F_{n-2}(x))dx,\\
&\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}=\frac{1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^{n})}{2}+\frac{1}{\mu_n}\int_{\xi_{n-1}^{n}}^{\infty}(1-F_{n-1}(x))dx,\\
&\text{但し,}\ \mu_n=t_n,\qquad \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n=1.
\end{aligned}\tag{24}$$

これらの式の一番下の式から順に上へと $\mu_{n-1},\mu_{n-2},\cdots,\mu_2,\mu_1$ を求め, 最後に $N=B_1/\gamma_1\mu_1$ を求めれば限界線路容量を得る.

特に $n=2$ の場合は

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}=\frac{1-F_1(\xi_1^2)}{2}+\frac{1}{t_2}\int_{\xi_1^2}^{\infty}(1-F_1(x))dx \tag{25}$$

となり, これに分布 $F_1(x)$ の形を入れたものは前節の終りに述べた. そこでも注意したように(24)式の最後の式を(23)式の形に戻して用いれば(25)式の代りに第2節(3)式を得るわけである.

第 $n$ 種列車が一杯に組込まれるとは限らないとき(待避線数制限や待時間制限のあるとき)には, 第 $n$ 段においても, それ以前の段階と同じ手続きで列車を組入れる方が妥当である. その場合は $Z_{n-1}$ の平均値

$$EZ_{n-1}=\frac{1}{1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^{n})}\int_{\xi_{n-1}^{n}}^{\infty}(1-F_{n-1}(x))dx$$

と $Z_{n-2}$ 中に起る $Y_{n-1}$ の平均箇数

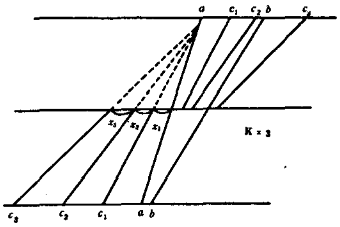
$$m_{n-1}=\frac{EZ_{n-2}}{\mu_{n-1}}(1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^{n}))$$

とから, $m_1m_2\cdots m_{n-1}=N_{n-1}(1-F_{n-1}(\xi_{n-1}^{n}))$ に注意して

$$N_n=\frac{m_1m_2\cdots m_{n-1}EZ_{n-1}}{\mu_n}=\frac{N_{n-1}}{\mu_n}\int_{\xi_{n-1}^{n}}^{\infty}(1-F_{n-1}(x))dx=\frac{B_1}{\mu_n}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\mu_i}\int_{\xi_i^{i-1}}^{\infty}(1-F_i(x))dx \tag{23'}$$

を得る. これが(23)式の代りの式であり, 次節では専らこれが用いられる.

最後に同時待避数制限について一言述べておく．同時待避の形は種々あるが第9図のような方法で高速列車を優先することにする．即ち低列車が高速列車に一度追着かれたならば，その低速列車は追着いた高速列車が先に出発するまでは出発できないものとする．また，第9図点線で示すように待避列車は次の待避駅まで逃げ切れないときのみ，待避を行うものとする．今，同時待避数 $K$ の場合に同時待避列車を最高速列車に近いものから順に $c_1, c_2, c_3, \cdots, c_K$ とし，それらの到着時隔を同じ順に $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_K$ とする．また $c_1, \cdots, c_{i_1}$ が第二種列車，$c_{i_1+1}, \cdots, c_{i_2}$ が第三種列車，$\cdots, c_{i_{n-1}+1}+\cdots+c_K$ が第 $n$ 種列車であるとすれば



**第9図** 同時待避の型

$S_2=X_2+\cdots+X_{i_1}$ は独立同一分布 $F_2$ をもつ確率変数の和であり，

$S_3=X_{i_1+2}+\cdots+X_{i_2}$ は独立同一分布 $F_3$ をもつ確率変数の和であり，

………，

$S_n=X_{i_{n-1}+2}+\cdots+X_K$ は独立同一分布 $F_n$ をもつ確率変数の和である．

$X_1=X_2,\ X_{i_1+1}=Y_3,\quad X_{i_2+1}=Y_4, \cdots, X_{i_{n-1}+1}=Y_n$ は異種列車の時隔であるから，その分布は適当にきめなければならない．

$i_1, i_2, \cdots, i_{n-2}$ の種々の値に対し

$$P_K=P[Y_2+S_2<T_2-T_1,\ Y_2+S_2+Y_3+S_3<T_3-T_1, \cdots, Y_2+S_2+Y_3+S_3+\cdots+Y_n+$$
$$+S_n<T_n-T_1]$$

を小さくすれば，$K$ 列車以上の同時待避の確率を小さくすることになり，$\alpha=K-1$ の待避線があればよいことになる．

## 6. $n$ 種類の列車に対する線路容量

前節で第一種列車から第 $n$ 種列車までを，時隔の分布が $F_1, F_2, \cdots, F_n$ に従うようにダイヤに組入れて行くと，第 $i$ 種列車の総数 $N_i$ は

$$N_i=\frac{B_1}{\mu_i}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\mu_j}\int_{\xi_j^{j+1}}^{\infty}(1-F_j(x))\,dx \qquad (i=2, 3, \cdots, n), \tag{26}$$

$$N_1=\frac{B_1}{\mu_1}$$

によって与えられることがわかった．((20), (21), (22), (23′)式参照.) $N_i$ のうち無待避のものは

$$N_i'=\frac{B_1}{\mu_i}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\mu_j}\int_{\eta_j^{j+1}}^{\infty}(1-F_j(x))\,dx \qquad (i=2, 3, \cdots, n), \tag{27}$$

$$但し\quad \eta_j^{j+1}=R(T_{j+1}-T_j)s_i+r_j$$

だけあることがわかる．以下にそれを示そう．

第一種列車は明かに無待避である．

第二種列車中，無待避のものは $\eta_1^2\leqq X_1$ なる時隔 $X_1$ 中の $\eta_1^2$ の長さを除く部分に，平均 $\mu_2$ の時隔で組込まれている筈である．従って，その総数 $N_2'$ は

$$N_2' = N_1 \frac{1}{\mu_2} \int_{\eta_1^2}^{\infty} (1 - F_1(x))\,dx = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_2} \int_{\eta_1^2}^{\infty} (1 - F_1(x))\,dx.$$

同様に第三種列車 $N_3$ 本の中で無待避のものは $\eta_2^3 \leqslant X_2$ なる時隔 $X_2$ 中の死区間 $\eta_2^3$ を取除いた部分に平均 $\mu_3$ の時隔で組込まれている筈である．従って，その総数 $N_3'$ は

$$N_3' = N_2' \frac{1}{\mu_3} \int_{\eta_2^3}^{\infty} (1 - F_2(x))\,dx = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \int_{\eta_1^2}^{\infty} (1 - F_1(x))\,dx \int_{\eta_2^3}^{\infty} (1 - F_2(x))\,dx.$$

以下，同様にして一般に(27)式を得る．

待避を行う列車を種類別に $N_2'', N_3'', \cdots, N_n''$ とすれば，明かに

$$N_i'' = N_i - N_i'. \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)$$

待避を行わない列車はそのままとし，待避を行う列車は利用率 $f_i (0 \leqslant f_i \leqslant 1)$ を掛けて，その数を減じてやり

$$N_i(f_i) = N_i' + f_i N_i'' = (1 - f_i) N_i' + f_i N_i \tag{28}$$

で，利用率 $f_i$ に対する第 $i$ 種列車数 $N_i(f_i)$ を定義すれば，それは全容量に対し $\gamma_i$ の配分比を保たねばならないから

$$N_i(f_i) = \gamma_i N. \tag{29}$$

(28), (29)式より $\gamma_i N = N_i' + f_i N_i''$, $0 \leqslant f_i \leqslant 1$ であるから

$$0 \leqslant f_i = \frac{\gamma_i N - N_i'}{N_i''} = \frac{\gamma_i N - N_i'}{N_i - N_i'} \leqslant 1.$$

$f_i$ を消去して

$$N_i' \leqslant \gamma_i N \leqslant N_i, \qquad \frac{N_i'}{\gamma_i N} \leqslant 1 \leqslant \frac{N_i}{\gamma_i N}.$$

(26), (27)式を代入して

$$\boxed{\frac{\gamma_1 \mu_1}{\gamma_i \mu_i} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\mu_j} \int_{\eta_j^{j+1}}^{\infty} (1 - F_j(x))\,dx \leqslant 1 \leqslant \frac{\gamma_1 \mu_1}{\gamma_i \mu_i} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\mu_j} \int_{\xi_j^{j+1}}^{\infty} (1 - F_j(x)). \qquad (i = 2, 3, \cdots, n)} \tag{30}$$

我々の $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ は上式をみたす範囲で変り得るわけであるが，$\mu_1$ を最小にすれば $f_i = (\gamma_i N - N_i')/(N_i - N_i')$ に対する容量 $N = B_1/\gamma_1 \mu_1$ を得るわけである．

次に待避時間の考察に通むのであるが，前の §3 の場合と異るところは，第 $i$ 種列車の一駅での待避待時間が $T_{i+1} - T_i$ を越えると，その第 $i$ 種列車は，自分よりも低位の第 $i+1$ 種列車よりも表定速度が遅くなってしまうという不合理を生ずることである．しかし，第 $i$ 種列車の目的が長距離輸送にある場合にはたとえ一駅間では，第 $i+1$ 種列車より遅くなっても，もっと長距離で考えた場合は遅れを回復し，結局，短時間で目的地へ到達するならばよいであろう．以上のようなことを考え併せて，我々は第 $i$ 種列車の一駅での平均待時間を $w_i$ とするとき

$$w_i < T_{i+1} - T_i \qquad (i = 2, 3 \cdots, n-1) \tag{31}$$

という条件を満すように，列車数を制限することにする．この他に同一種類の列車の同時待避数

$K_i$ を適当に制限しておくことも実際的であろう．我々は以下 $K_i=1$ とする．

さて待避時間の総和を求めるのに，§3のような方法では複雑すぎて取扱いが困難になるので，本節では，上記の平均待時間 $w_i$ を用いる．それは次のように考えられる．単独に待避している $(K_i=1)$ 或第 $i$ 種列車の待時間は，$h, j<i$ として，第 $h$ 種列車と第 $j$ 種列車とで狭まれる時隔のうちで

$$\xi^i_{hj}=T_i-T_j+s_{hi}+R_{ij} \text{(但し，} s_{hi},\ R_{ij} \text{はこのときの出発時隔及び到着時隔)} \tag{32}$$

より大きいものが始めて起るまでの時間 $\rho_i$ と出発時隔 $s_{hi}$ との和である．しかし我々は簡単のためこれを平均的に取扱う．

仮定VII. $i$ より上位の列車全体が作る時隔は第 $i-1$ 種列車の時隔と同一分布に従う．

仮定VIII. $i$ より上位の列車の作る時隔内に第 $i$ 種列車が入り得るための条件は，その時隔が

$$\xi^i=\sum_{h,j=1}^{i-1}\xi^i_{hj}\gamma_h\gamma_j/\beta^2_{i-1} \qquad \text{(但し } \beta_i=\sum_{j=1}^{i}\gamma_j\text{)} \tag{33}$$

より大きいことである．

註．仮定VII. は $i$ より上位の列車のダイヤが定まったとき，それらの作る時隔は，最後に組入れられた第 $i-1$ 種列車の時隔に略々等しいであろうというものである．このとき

$$\sum_{j=1}^{h}N_j(f_i)=\frac{B_1}{\mu_h},\ \text{或は}\quad \mu_h=\frac{\mu}{\beta_h} \qquad \text{(但し } \mu=\mu_n\text{)} \tag{34}$$

が成立つ．仮定VIIIは(32)式の $\xi^i_{hj}$ の代りに，その平均値を以てすることであり

$$\xi^i=T_i-\sum_{j=1}^{i-1}T_j\gamma_j/\beta_{i-1}+\sum_{h=1}^{i-1}s_{hi}\gamma_h/\beta_{i-1}+\sum_{j=1}^{i-1}R_{ij}\gamma_j/\beta_{i-1} \tag{35}$$

とかけるので，$s_{hi}$ 及び $r_{ij}$ も平均値を以てこれに替えることを暗に意味している．

上の仮定の下に $\rho_i$ は第 $i-1$ 種列車の時隔のうちで $\xi^i$ より大きいものの始めて起るまでの時間として定義されることになり，それは附録IIからわかるように，第 $i-1$ 種列車の時隔の分布によって

$$\rho_i=\frac{\mu_{i-1}-\int_{\xi^i}^{\infty}(1-F_{i-1}(t))\,dt}{1-F_{i-1}(\xi^i)}-\xi^i$$

と表わされる．第 $i$ 種列車の待時間 $w_i$ は

$$w_i=\rho_i+\sum_{h=1}^{i-1}s_{hi}\frac{\gamma_h}{\beta_{i-1}}$$

であり，利用率 $f_i$ に対する待避時間の総和は

$$W(f_i)=\sum_{i=2}^{n}f_iN_i''w_i=\sum_{i=2}^{n}(N_i(f_i)-N_i')w_i=\sum_{i=2}^{n}\left(N_1\frac{\gamma_i}{\gamma_1}-N_i'\right)w_i$$

$$=\frac{B_1}{\mu}\sum_{i=2}^{n}\left(\gamma_i-\beta_i\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\mu_j}\int_{n_j^{i+1}}^{\infty}(1-F_j(x))\,dx\right)\omega_i$$

となる．予め与えられた限界を $W$ とするとき

$$W(f_i)=\frac{B_1}{\mu}\sum_{i=2}^{n}\left(\gamma_i-\beta_i\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{\mu_j}\int_{\eta_j^{j+1}}^{\infty}(1-F_j(x))\,dx\right)\left(\frac{\mu_{i-1}-\int_{\xi^i}^{\infty}(1-F_{i-1}(t))\,dt}{1-F_{i-1}(\xi^i)}-\xi^i+\sum_{h=1}^{i-1}s_{hi}\frac{\gamma_h}{\beta_{i-1}}\right)<W \tag{36}$$

及び，(30)，(31)式を $\mu_i=\dfrac{\mu}{\beta_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ の組が満すという条件の下に $N=B_1/\mu$ を最大にすれば，それが求むる線路容量である．(36)式は複雑なので適当な $T_{n+1}$ をきめることによって $w_n<T_{n+1}-T_n$ なる条件で代用する方がよいかもしれない．(31)式と併せ

$$\boxed{w_i=\frac{\mu_{i-1}-\int_{\xi^i}^{\infty}(1-F_{i-1}(t))\,dt}{1-F_{i-1}(\xi^i)}-\xi^i+\sum_{h=1}^{i-1}s_{hi}\frac{\gamma_h}{\beta_{i-1}}<T_{i+1}-T_i\qquad i=2,3,\cdots,n} \tag{37}$$

を用いるわけである．

## 7. 近似式

第 $i$ 種列車の時隔の分布 $F_i(x)$ は平均値 $\mu_i$ の $t_i$-truncated 指数分布とみなすことができるので

$$\frac{\xi_i^{i+1}-t_i}{\mu_i-t_i}=\lambda_i,\qquad \frac{\eta_i^{i+1}-t_i}{\mu_i-t_i}=\Lambda_i$$

とおけば，第 $i$ 種列車の総数 $N_i(f)$ は(28)，(34)式により

$$N_i(f_i)=\frac{B_1\beta_i}{\mu}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\mu-t_j\beta_j}{\mu}\left\{(1-f_i)e^{-\sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_j}-f_ie^{-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j}\right\} \tag{38}$$

と表される．この式と制限 $0\leqslant f_i\leqslant 1$ とから導ける(30)式に対応する式は，この場合

$$\frac{\beta_i}{\gamma_i}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{t_j\beta_j}{\mu}\right)e^{-\sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_j}\leqslant 1\leqslant\frac{\beta_i}{\gamma_i}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{t_j\beta_j}{\mu}\right)e^{-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j}\qquad(i=2,3,\cdots,n)$$

となる．或いは対数をとることによって

$$\boxed{\log\frac{\gamma_i}{\beta_i}+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\eta_j^{j+1}-t_j)\beta_j}{\mu-t_j\beta_j}\geqslant\sum_{j=1}^{i-1}\log\left(1-\frac{t_j\beta_j}{\mu}\right)\geqslant\log\frac{\gamma_i}{\beta_i}+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{(\xi_j^{j+1}-t_j)\beta_j}{\mu-t_j\beta_j}.\quad(i=2,3,\cdots,n)} \tag{39}$$

また，

$$W(f_i)=\frac{B_1}{\mu}\sum_{i=2}^{n}\left(\gamma_i-\beta_i\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{t_i\beta_j}{\mu}\right)e^{-\sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_j}\right)w_i \tag{40}$$

$$w_i=\frac{\mu}{\beta_{i-1}}\left(e^{-\frac{(\xi^i-t_{i-1})\beta_{i-1}}{\mu-t_{i-1}\beta_{i-1}}}-1\right)+t_{i-1}-\left(T_i-\sum_{j=1}^{i-1}T_j\frac{\gamma_j}{\beta_{i-1}}\right)-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{R_{ij}\gamma_j}{\beta_{i-1}} \tag{41}$$

となるので，(31)，(36)式は

$$\frac{\mu}{\beta_i}\left(e^{-\frac{(\xi^{i+1}-t_i)\beta_i}{\mu-t_i\beta_i}}-1\right)<T_{i+2}-\sum_{j=1}^{i}T_j\frac{\gamma_j}{\beta_i}+\sum_{j=1}^{i}R_{i+1,j}\frac{\gamma_j}{\beta_i}-t_i,\qquad(i=1,2,\cdots,n-2) \tag{42}$$

$$\frac{B_1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}\left(\gamma_i-\beta_i\prod_{j=1}^{i-1}\left(1-\frac{t_j\beta_j}{\mu}\right)e^{-\sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_j}\right)w_i<W \qquad (\text{但し } w_i \text{ は(41)式による}) \tag{43}$$

となる．従って(39), (42), (43)式を同時に満す最小の $\mu$ を求めれば $N=B_1/\mu$ により線路容量が求まるわけである．(41)式の代り $w_n<T_{n+1}-T_n$ を用いるならば前節の(37)式に対応する

$$\boxed{\frac{\mu}{\beta_i}\left(e^{-\frac{(\xi^{i-1}+t_i)\beta_i}{\mu-t_i\beta_i}}-1\right)>T_{i+2}-\sum_{j=1}^{i}T_j\frac{\gamma_j}{\beta_j}+\sum_{j=1}^{i}R_{i+1,j}\frac{\gamma_j}{\beta_i}-t_i \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)} \tag{44}$$

を得る．

実際上の適用に当っては，(39)式もそれをみたす $\mu$ の範囲を直接求めることのできるほど簡単なものではないので，(44)式から求めた $\mu$ を(39)式に代入してチェックする外に仕方がない．(44)式については

$$\frac{\mu}{(\xi^{i+1}-t_i)\beta_i}=x_i, \quad \frac{t_i}{\xi^{i+1}-t_i}=\tau_i, \quad \frac{T_{i+2}-\sum_{j=1}^{i}T_j\frac{\gamma_j}{\beta_i}+\sum_{j=1}^{i}R_{i+1,j}\frac{\gamma_j}{\beta_i}-t_i}{T_{i+1}-\sum_{j=1}^{i}T_j\frac{\gamma_j}{\beta_i}+\sum_{j=1}^{i}(s_{j,i+1}+R_{i+1,j})\frac{\gamma_j}{\beta_i}-t_i}=q_i$$

とおくことにより

$$x_i\left(e^{-\frac{1}{x_i-\tau_i}}-1\right)<q_i \qquad \text{但し } x_i>\tau_i \tag{45}$$

と変形すれば，左辺は $x_i$ に関し単調減少であることがわかるので，(45)式の不等号を等号にしたときの解 $x_i^0$ によって(45)をみたす $x_i$ の範囲を

$$x_i^0<x_i$$

とかき表すことができる．従って

$$x_i^0(\xi^{i+1}-t_i)\beta_i<\mu$$

が(44)式の $i$ 番目の式をみたす $\mu$ の範囲であり(44)式全部をみたす $\mu$ の範囲は

$$\mu_0=\max_i[x_i^0(\xi^{i+1}-t_i)\beta_i]<\mu$$

で与えられる．従って $\mu_0$ が(39)式をみたしさえすれば，$B_1/\mu_0$ より小さい整数のうち最大のものが求むる線路容量である．

但し(44)式の適用に当っては，それが単独待避の条件の下に導かれた式であることに注意しなければならない．もしも待行列(２以上)を生じている場合には(44)の制限は弱すぎて利いて来ないであろう．(44)式をそのような場合に拡張すること及び(39)式を簡単化する方法は，目下我々の OR グループで研究中である．待避駅間運行時間が不等の場合や待避方式に種々の制限の課される場合については，次の機会に譲りたい．

最後に本稿について有益な討論と御忠告を賜った国鉄岐阜工事局 OR グループの皆様に対し感謝の意を表します．

# 附　録　I

ある一定の事象(以下これを単位とよぶ)が時間と共に次々と起っていくとき，この流れが次の特性を備えているとする．

1°．定常性．時間直線上の何れの点でも問題の一単位の起る可能性の程度は同等である．

2°．独立性．流れの始めの時点を $t_0=0$ として，$i$ 番目の単位が $t_i$ でおこるとすれば，単位の間隔 $X_i=t_i-t_{i-1}\,(i=1,2,\cdots)$ は独立な確率変数である．1° によれば $X_i\,(i\geqslant 2)$ は同一分布に従う．平均値を $\mu\,(\neq\infty)$ とし，分布函数を $F(x)$ とする．

3°．隔離性．続く二つの単位の間隔は一定値 $\varepsilon$ より小さくはなり得ない．即ち $F(x)=0\,(x\leqslant\varepsilon)$．

これらの条件を満す流れは，所謂 palm 型の流れに属するが以上の三条件は，$\varepsilon$-truncated 指数分布に従う独立な確率変数列 $X_i$ を間隔とする単位の流れを決定することがわかる．次にそれを示しておく．

時間直線上に任意にとった長さ $t$ の時間区間の中に一単位も起らない確率を $H(t)$ とする．長さ $t$ の時間区間 $AB$ の中に一単位も起らないことは，ある一つの長さ $x\geqslant t$ の間隔が起って，その間隔内の左から $x-t$ の部分に区間 $AB$ の左端 $A$ が入ることと同じであるから，1° によって

$$H(t)=k\int_t^\infty \frac{x-t}{x}xdF(x)=k\int_t^\infty (x-t)dF(x).$$

ここに比例定数は $H(0)=1$ により決定され $k=\dfrac{1}{\mu}$ であるから

$$H(t)=\frac{1}{\mu}\int_t^\infty (x-t)dF(x). \tag{1}$$

3° によって

$$EX=\int_0^\infty xdF(x)=\int_\delta^\infty xdF(x),\qquad 1=\int_0^\infty dF(x)=\int_\delta^\infty dF(x)\qquad (\delta\leqslant\varepsilon)$$

であるから

$$H(\delta)=\frac{\mu-\delta}{\mu}\qquad (\delta\leqslant\varepsilon) \tag{2}$$

であることに注意しておく．

区間 $AB$ 及び $BC$ を夫々長さ $x$ 及び $y$ をもった隣りあっている二つの時間区間とする．また，$AB$ が一単位も含まないことを $T_x$ で表し，$BC$ に一単位も起らないことを $U_y$ で表すことにする．もし $x+y<\varepsilon$ であれば，$T_x{}^cT_y{}^c=\phi$(但し $c$ は余事象を表し，$\phi$ は空事象を表す．)となるから $T_x\supset U_y{}^c$ であることに注意して

$$P(U_\delta{}^c|T_{\varepsilon-\delta})=\frac{P(T_{\varepsilon-\delta}U_\delta{}^c)}{P(T_{\varepsilon-\delta})}=\frac{P(U_\delta{}^c)}{H(\varepsilon-\delta)}.$$

$P(U_\delta{}^c)=1-H(\delta)$ であることに注意すれば，(2)を用いて

$$P(U_\delta{}^c|T_{\varepsilon-\delta})=\frac{\delta}{\mu-\varepsilon+\delta}. \tag{3}$$

$t>\varepsilon$ とするとき

$$-\Delta H(t)=H(t)-H(t+\Delta t)=P(T_t)-P(T_tU_{\Delta t})=P(T_tU_{\Delta t}{}^c)$$
$$=P(U_{\Delta t}{}^c|T_t)P(T_t).$$

$t$ より大きい間隔が起ったという条件の下に $t+\Delta t$ より小さい間隔が起る確率は，$\varepsilon$ より大きい間隔が起ったという条件の下に $\varepsilon+\Delta t$ より小さい間隔が起る確率に等しいことが，1° 及び 3° によってわかるので

$$P(U_{\Delta t}{}^c|T_t)=P(U_{\Delta t}{}^c|T_\varepsilon)$$

である．また隣接して並ぶ長さ $x, y, z$ の時間区間の夫々の内で一単位も起らないという事象を $S_x, T_y, U_z$ で表すことにすれば

$$P(U_{\Delta t}{}^c|S_{\Delta t}T_{\varepsilon-\delta})=\frac{P(S_{\Delta t}T_{\varepsilon-\delta}U_{\Delta t}{}^c)}{P(S_{\Delta t}T_{\varepsilon-\delta})}=\frac{P(T_{\varepsilon-\delta}U_{\Delta t}{}^c)+O(\Delta t)}{P(T_{\varepsilon-\delta})+O(\Delta t)}=P(U_{\Delta t}{}^c|T_{\varepsilon-\delta})(1+O(\Delta t))$$

である．但し $P(S_{\Delta t})=(\mu-\Delta t)/\mu$ であるから $0\leqslant P(A)-P(AS_{\Delta t})=P(A-S_{\Delta t})\leqslant P(\Omega-S_{\Delta t})=\Delta t/\mu$（式中の $\Omega$ は全事象を表す）であることを利用した．以上によって

$$-\Delta H(t)=P(U_{\Delta t}{}^c|T_{\varepsilon-\Delta t})(1+O(\Delta t))H(t).$$

(3)を用い，$\Delta t$ で両辺を割り

$$-\frac{\Delta H(t)}{\Delta t}=\frac{1+O(\Delta t)}{\mu-\varepsilon+\Delta t}(Ht).$$

$\Delta t\to 0$ として

$$-\frac{dH(t)}{dt}=\frac{H(t)}{\mu-\varepsilon}.$$

この微分方程式を初期条件(2)で解けば

$$H(t)=\frac{\mu-\varepsilon}{\mu}e^{-\frac{t-\varepsilon}{\mu-\varepsilon}} \tag{4}$$

を得る．$t\geqslant\varepsilon$ のとき(1)式の左辺を部分積分することによって

$$H(t)=\frac{1}{\mu}\int_t^\infty(1-F(x))\,dx \tag{5}$$

であるから

$$\frac{-dH(t)}{dt}=\frac{1}{\mu}(1-F(t)) \qquad (t\geqslant\varepsilon). \tag{6}$$

(4)，(6)により

$$F(t)=1-e^{-\frac{t-\varepsilon}{\mu-\varepsilon}} \qquad (t\geqslant\varepsilon).$$

## 附　録　II

前述した附録 I の条件 1°～3° のうち 3° だけを次の条件

3°°. 孤立性. $\Delta t$ 時間内に二単位以上起る確率は $\Delta t$ と共に零に行く.

に弱めたものを Palm 型の流れというが, Palm 型の流れは相隣る単位の起る時点間の間隔の分布 $F(x)$ できまることが知られている*. 一地点を通過する列車の流れを Palm 型と考えたとき列車の間隙 $\xi$ を生ずるまでの時間 $L$ の平均値を求めよう.

$t$ 時間中に間隙 $\xi$ がない確率を $G(t)$ で表せば

$$EL=\xi+\int_{\xi+0}^{\infty}G(t)dt$$

である. 今 $t>\xi$ とし, 長さ $t$ の時間区間内に $n$ 列車入る確率を $P_n(t)$ で表せば

$G(t)-G(t+\Delta t)=P[t$ 時間中に間隙 $\xi$ が起らないが, $t+\Delta t$ 時間中には間隙 $\xi$ が起る.$]$

右辺の確率は $t$ 時間中の列車数が $n$ なら, 最初の列車までの間隔を $X_0$, それから次々の列車間隔を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とするとき, 不等式の系

$$X_i<\xi\ (i=0,1,2,\cdots,n-1),\quad X_n\geqslant\xi,\quad t-\xi<\sum_{i=1}^{n-1}X_i\leqslant t-\xi+\Delta t$$

が成立つ確率に等しい. 従って $P_n(t)$ を $t$ 時間中の列車数が $n$ になる確率とするとき, 間隔の独立性 2° に注意すれば

$$G(t)-G(t+\Delta t)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(t)P[X_i<\xi\ (i=0,1,2,\cdots,n-1),\ t-\xi<\sum_{i=1}^{n-1}X_i\leqslant t\xi+\Delta t]P(X_n\geqslant\xi)\ .$$

間隔の分布は同一で

$$P(X_n\geqslant\xi)=1-F(\xi)\qquad n=1,2,\cdots$$

であるから

$$\begin{aligned}G(t)-G(t+\Delta t)&=(1-F(\xi))\sum_{n=1}^{\infty}P_n(t)P[X_i<\xi(i=0,1,2,\cdots,n-1),\ t-\xi<\sum_{i=0}^{n-1}X_i\leqslant t-\xi+\Delta t]\\&=(1-F(\xi))P[\exists_n:\ X_i<\xi(i=0,1,2,\cdots,n-1),\ t-\xi<\sum_{i=0}^{n=1}X_i\leqslant t-\xi+\Delta t]\\&=(1-F(\xi))P[\Delta t\ \text{時間中に一列車あり, 且つその時点まで}\ t-\xi+\delta\ \text{の間}\ \xi\ \text{間隙なし}]\\&=(1-F(\xi))P[\Delta t\ \text{中に一列車あり}]P[\Delta t\ \text{時間中に一列車来るという条件の下にその前}\ t-\xi+\delta\ \text{時間中に}\ \xi\ \text{間隙が起らない.}]\\&=(1-F(\xi))P[\Delta t\ \text{中に一列車あり}]P[0<\delta<\Delta t\ \text{なる}\ \delta\ \text{があって,}\ t-\xi+\delta\ \text{内に}\ \xi\ \text{間隙が起らない}]\\&=(1-F(\xi))\frac{\Delta t}{\mu}(G(t-\xi)+O(\Delta t)).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{dG(t)}{dt}=-\frac{1-F(\xi)}{\mu}G(t-\xi), \tag{8}$$

或いは

*) Palm 型の流れについては A. Y. Hincin 著(森村英典訳): 待ち合わせ理論入門 参照. 但し, 我々は定常性の定義をやや異る形としたことを注意しておく. $F(x)$ の形は附録 I に示した $\varepsilon$-truncated 指数分布 $F_\varepsilon$ のあらゆる $\varepsilon$ の値についての混合形 $\int_0^x F_\varepsilon(x)dB(\varepsilon)$ で与えられるであろう.

$$G(t)=-\frac{\mu}{1-(\xi)}\frac{dG(t+\xi)}{dt}.$$

後の式を(7)に代入して

$$EL=\xi+\mu\frac{G(2\xi)}{1-F(\xi)}. \tag{9}$$

しかるに $G(t)$ は上記微分方程式(8)によって $F(t)$ で表すことができる.

明かに $G(t)=1$ 　for　$0\leqslant t<\xi$ 　であるから $\xi\leqslant t<2\xi$ に対して(8)式は

$$\frac{dG(t)}{dt}=-\frac{1-F(\xi)}{\mu}$$

となる. 即ち,

$$G(t)=k-\frac{1-F(\xi)}{\mu}t \qquad for\ \xi\leqslant t<2\xi.$$

また明かに $t=\xi$ において $G(t)$ は区間 $\xi$ が空でない確率 $1-H(\xi)$ に等しいので積分定数 $k$ は

$$k=1-H(\xi)+\frac{1-F(\xi)}{\mu}\xi.$$

よって

$$G(t)=1-H(\xi)-\frac{1-F(\xi)}{\mu}(t-\xi), \qquad for\ \xi\leqslant t<2\xi. \tag{10}$$

$2\xi\leqslant t<3\xi$ とのきは, $\xi\leqslant t-\xi<2\xi$ であるから(10)式の $t$ の代りに $t-\xi$ としたものを(8)式の右辺に代入することによって

$$\frac{dG(t)}{dt}=-\frac{1-F(\xi)}{\mu}\left(1-H(\xi)-\frac{1-F(\xi)}{\mu}(t-2\xi)\right) \qquad for\ 2\xi\leqslant t<3\xi.$$

積分して

$$G(t)=k-\frac{1-F(\xi)}{\mu}(1-H(\xi))t+\frac{1}{2}\left(\frac{1-F(\xi)}{\mu}\right)^2(t-2\xi)^2 \qquad for\ 2\xi\leqslant t<3\xi.$$

$t=2\xi$ で連続になるように $k$ をきめれば

$$G(t)=1-H(\xi)-\frac{1-F(\xi)}{\mu}\xi-(1-H(\xi))(t-2\xi)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-F(\xi)}{\mu}\right)^2(t-2\xi)^2 \qquad for\ 2\xi\leqslant t<3\xi.$$

これを(9)に代入すれば

$$EL=\mu\frac{1-H(\xi)}{1-F(\xi)}.$$

定常性の仮定から(附録I(5)式)

$$H(t)=\frac{1}{\mu}\int_t^\infty(1-F(t))\,dt \tag{11}$$

であるから

$$EL=\frac{\mu-\int_\xi^\infty(1-F(t))\,dt}{1-F(\xi)}.$$

3°° の条件が附録 I のように 3° に強められるならば，$F(t)$ は $t$-truncated 指数分布になり，そのときは

$$EL=\frac{\mu-(\mu-t)e^{-\frac{\xi-t}{\mu-t}}}{e^{-\frac{\xi-t}{\mu-t}}}$$

$$=\mu(e^{\frac{\xi-t}{\mu-t}}-1)+t$$

となる．

(8)式は，一列車が来たという条件の下に間隙 $\xi$ を生ずる確率を $\varphi(t)$ で表すとき，この $\varphi(t)$ を用いて導くこともできる．

$G(t)-G(t+\varDelta t)=P[t$ 時間中に間隙 $\xi$ が起らないが，$t+\varDelta t$ 時間中には間隙 $\xi$ が起る$]$

であるが，$t+\varDelta t$ 時間を左から $t-\xi, \varDelta t, \xi$ の長さの三つの部分に分解するとき，中央の $\varDelta t$ 時間中に一列車到着することを $B$，その左側 $t-\xi+\delta$ の部分に間隙 $\xi$ が起らないことを $A$，右側 $\xi+\delta$ の部分に間隙 $\xi$ が起ることを $C$ をで表すとき

$$G(t)-G(t+\varDelta t)=P(ABC).$$

間隔の独立性により $P(C|AB)=P(C|B)$ であるから

$$G(t)-G(t+\varDelta t)=P(AB)P(C|AB)=P(B)P(A|B)P(C|B)=\frac{\varDelta t}{\mu}G(t-\xi)\varphi(\xi)(1+O(\varDelta t)).$$

$\varphi(\xi)=1-F(\xi)$ であることに注意すれば(8)式を得る．

---

**《お知らせ》**　　第3回国際 OR 学会について

IFORS のセクレタリー，Morse 教授からの来信によると，来年ノルウェーのオスロで開かれる第3回国際 OR 学会のスケジュールは次のとおり，6月30日(日)到着，登録，レセプション，7月1日(月)—7月5日(金)毎日9時30分から(3日は boat trip)．日本からは20名まで参加が許されている．参加希望者は12月15日までに本学会での代表を定めなければならないので至急学会まで申出ていただきたい．ただし，渡航費，参加費(1人100ドル)とも各人で工面する必要がある．

---