市場指数作成の一方法

水　谷　一　雄*

潜在購買力の測定には，種々の方法があるが，各市場区分の潜在購買力相互の比率を，いわゆる構成指数で示すところの市場指数の方法は，潜在購買力の測定の有力なる方法の一つである．構成指数は対立指数に対する名称である．一般に指数は，構成指数・対立指数の二つに分類せられる．すなわち，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ なる数の集団に関しては，$X=\sum_{i=1}^{n} x_i$ とするとき，$\xi_i=\frac{x_i}{X_k}$ なる ξ_i が構成指数であり，$\rho_i=\frac{x_i}{x_k}$（x_k は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中の一数又はそれに準ずる数）なる ρ_i が対立指数である．

昭和38年度の販売高（全国）が X 億円であるときに，東京都では，その ξ_1(%)，大阪府では，その ξ_2(%)，… と言うような指数割合が売れると見込まれるとき，この $\xi_1, \xi_2, \cdots$ が東京都，大阪府の市場指数である．これは，多くの場合，それぞれの地区の販売店などに対する販売割当などに用いられる．

この市場指数作成法を，大別すると，静態的方法と動態的方法および綜合的方法とに分たれる．静態的方法はある一ヵ年間における，空間的すなわち地域的市場区分に従って，それぞれの市場の〔構成指数的〕割当高を求めるものであり，動態的方法は，一市場の成長の変遷を示すところの時間的，すなわち歴史的推移を示す指数を求めるものである．尤も，多くの場合は，この二つが綜合せられて，全国各市場区分別に，歴史的な過去の推移を基礎とする新年度の予測に用いられると言う場合が多い．

市場指数も例えば，テレビと言うような特殊商品の市場指数と一般潜在購買力指数とに分たれるが，ここでは，主として，一般潜在購買力指数を問題とすることとしよう．

市場指数作成法は，更に，直接法・間接法に二分せられる．

直接法には，第一に，有効消費財需要を指数としたものがある．有効消費財需要は可処分所得から貯蓄を差引いたものであり，可処分所得は所得から公課を差引いたものである．直接法の第二は，小売販売高指数であり，直接法の第三は，特殊商品の過去の販売高に基づく直接資料法である．

然し，市場指数法で主として問題とせられるのは，間接法である．特殊商品に対する間接法による市場指数には，関連財資料法（The Corollary Data Method）がある．これは，靴下に対する靴，ゴムまりに対するラケットなど関連財の販売高の資料に基づいて，問題の財の市場指数

* 南山大学経済学部　昭和38年3月15日受理「経営科学」第6巻3号

を作るものである.

これに対し，間接法でも重要なのは，任意要素法（The Arbitrary Factors Method）であるが，この中で最も簡単なのは，単一指数法（The Single Index Method）である．例えば，Readers' Digest の発行部数だけで作った指数などが，これである.

この任意要素法で作製せられた市場指数として，米国で有名なのは，The Curtis Index ; The Crowell Index ; The International Magazine Company Index ; The McCann Index などがある.

一般に，任意要素法においては，全市場（例えば，全国）を数箇又は数十箇の地区（例えば，道，都，府，県など）A_1, A_2, $\cdots$, A_i, $\cdots$, A_m に分ける．一方，市場指数すなわち問題の商品販売高に関係が深いと考えられる市場要素（例えば，所得税額，生産高，鉄道敷設哩数，自動車保有数，電話架設数，煙草売上高，ビール売上高など）B_1, B_2, $\cdots$, B_j, $\cdots$, B_m の各地区 A_1, A_2, $\cdots$, A_i, $\cdots$, A_m における第 t 年の数値を調査する（$t=1, 2, \cdots, \tau$）．市場要素 B_j の A_i 地区における第 t 年の数値を a_{ij} とする．すなわち，ここに，市場数値マトリックス〔a_{ij}〕が得られる．これは m×n マトリックスである.

いま 10 地区 A_1, A_2, $\cdots$, A_i, $\cdots$, A_{10} に対し，7 市場要素 B_1, B_2, $\cdots$, B_j, $\cdots B_7$ の場合の一例として次の市場数値マトリックスを考えよう.

第 1 表

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	C
A_1	859	208	582	128	70	37	52	103
A_2	681	182	575	127	84	23	37	93
A_3	551	172	555	130	88	20	67	91
A_4	447	143	554	116	81	26	47	87
A_5	510	149	531	124	72	27	50	82
A_6	268	88	570	132	57	14	25	76
A_7	222	55	542	118	60	31	38	71
A_8	307	60	557	121	74	18	16	70
A_9	229	55	553	117	75	12	19	64
A_{10}	184	48	550	114	63	9	21	63
m	426	116	568	122.7	72.4	22.7	37.2	80
σ	217.6	57	2.65	4.92	13.41	11.23	22.98	9.68

C の欄は，第 t 年の現実の販売高である.

m の行，例えば，m_j は，B_j の欄の 10 箇の数字 a_{1j}, a_{2j}, $\cdots$, a_{10j} の算術平均すなわち $m_j=\dfrac{1}{m}\sum\limits_i a_{ij}$ 例えば $j=5$ すなわち B_5 の欄では

$$m_5=\frac{1}{10}(70+84+88+81+72+57+60+74+75+63)=72.4$$

である.

また，σ の行，例えば，第 j 列の B_j の欄の σ_j は標準偏差，すなわちその二乗が分散 $\sigma_j{}^2=\dfrac{1}{m}\sum\limits_i(a_{ij}-m_j)^2$ である．例えば，$j=5$ すなわち，B_5 の欄では

$$\sigma_5{}^2=\frac{1}{10}\{(70-72.4)^2+(84+72.4)^2+(88-72.4)^2+\cdots\cdots+(63-72.4)^2\}=(13.41)^2$$

である．

ここで，先ず，C の欄を構成指数化する．これは，ただ C の欄の市場数値 C_1，C_2，$\cdots$，C_i，$\cdots$，C_m の合計

$$\overline{\overline{C}}=\sum_i C_i=103+93+\cdots\cdots+64+63=800(=80\times10)$$

を求め，この $\{C_i\}$ の合計 $\overline{\overline{C}}=800$ で C_i を除し，市場指数$s_i=\dfrac{C_i}{\overline{\overline{C}}}$，$(i=1\sim m)$ を得る．例えば上例では，

$$s_1=\frac{103}{800}=12{\cdot}9\%,\quad s_2=\frac{93}{800}=11{\cdot}6\%\cdots\cdots$$

であり，その合計は

$$\overline{\overline{s}}=s_1+s_2+\cdots+s_{10}=100$$

である．

過去の実績の資料，すなわち，$t=1$，2，$\cdots$，τ 年の市場要素値マトリックス $[a_{ij}{}^1]$，$[a_{ij}{}^2]$，$\cdots$，$[a_{ij}{}^\tau]$ および，これに対応する各年の市場指数 $\{s_i{}^1\}$，$\{s_i{}^2\}$，$\{s_i{}^2\}$，$\cdots$，$\{s_i{}^\tau\}$ に基づいて，それぞれの年毎に，例えば，第 t 年に関しては，その市場要素値マトリックス $[a_{ij}{}^t]$ から，その年の市場指数 $\{s_i{}^t\}$ を算出する方法を確立することが，先決問題である．

これが確立すれば，次には，$s=1\sim\tau$ 年の τ 箇の市場マトリックス $[a_{ij}{}^1]$，$[a_{ij}{}^2]$，$\cdots$，$[a_{ij}{}^\tau]$ から，第 $\tau+1$ 年の市場マトリックス $[a_{ij}{}^{\tau+1}]$ を推定し，先に確立した方法によって，この市場マトリックス $[a_{ij}{}^{\tau+1}]$ から，この第 $\tau+1$ 年の市場指数 $\{s_i{}^{\tau+1}\}$ を算出すると言う方法をとるのである．

ここでは，先ず，第 t 年の市場マトリックス $[a_{ij}{}^t]$ から，その年の市場指数 $\{s_i{}^t\}$ を算出する方法，すなわち，同年市場指数作成法を検討することとしよう．

同年市場指数作成法で，最も簡単なのは，順位法である．順位法においては，先ず，市場マトリックス $[a_{ij}]$ を順位値にて表わす．第1表の B_5 の欄について言えば，その欄の 10 箇の数字を大きさの順にならべ，

88　84　81　75　74　72　70　63　60　57

とし，これに対し，最初から順番に

10　9　8　7　6　5　4　3　2　1

の数字を配当する．従って，この欄の数値

a_{15}　a_{25}　a_{35}　a_{45}　a_{55}　a_{65}　a_{75}　a_{85}　a_{95}　a_{105}

の10箇の数字は，それぞれ

4　9　10　8　5　1　2　6　7　3

となる．市場マトリックス全部，すべての列に亘って順位化が完了して，市場マトリックスが順位値マトリックス $[\Pi_{ij}]$ となった上は，各行，例えば A_i 行の順位値を合計して $\bar{\bar{\Pi}}=\sum_{j=1}^{n}\Pi_{ij}$ を得る．この合計の数値 $\{\bar{\bar{\Pi}}\}$ 中，あり得べき最大値は，明かに70であり，最小値は7であるが，理念的に，天国的市場は“77”を得るもの，地獄的市場は“0”を得るものと想定し，$\bar{\bar{\Pi}}_0=77$ には $\rho=100$ 点を与え，$\bar{\bar{\Pi}}_{11}=0$ には $\rho=0$ 点を与える一次変換を考えると

（1）　$\bar{\bar{\Pi}}=a\rho+b,\qquad \rho=\alpha\bar{\bar{\Pi}}+\beta$

によって，二組の連立方程式

$$(2)\quad \begin{cases}77=100a+b\\ 0=0\times a+b\end{cases}\qquad \begin{cases}100=77\alpha+\beta\\ 0=0\alpha+\beta\end{cases}$$

を得，これを解いて，$b=0$，$\beta=0$　$a=\frac{77}{100}$，$\alpha=\frac{100}{77}$ を得る．

かく，各行のすべてについて $\{\rho_i\}$ が得られると，その合計 $\rho'=\sum_i\rho_i$ を算出し，この ρ' によって各 $\rho_i\,(i=1\sim m)$ を除して，真の市場指数 $\{s_i\}$ の近似値としての $\{\tilde{\rho}_i\}$，$\tilde{\rho}_i=\frac{\rho_i}{\rho'}$ が得られるのである．

順位法においては，いわゆる美人コンクールの錯誤に対する配慮を必要としないから，ただ，順位値マトリックス $[\Pi_{ij}]$ から $\{\bar{\bar{\Pi}}_i\}$ なる各行の合計値を求めるに当って，$\bar{\bar{\Pi}}_i=\sum_{i=1}^{n}w_j\Pi_{ij}$ なる加重和 $(\sum w_j=1)$ を考え，この加重値 $\{w_j\}$ $(j=1\sim n)$ を適正ならしめて，$\{\tilde{\rho}_i\}$ の $\{s_i\}$ に対する近似度を最大ならしめるためには如何にすべきかを問題とする．この適正加重値の問題は，百分率法と共通の問題であるから，次に任意要素法における百分率法なるものを説明して，そこにおいて，適正加重値の問題の解決に当ることとしよう．

百分率法の順位法と異るところは，順位法においては，市場マトリックス $[a_{ij}]$ を順位値マトリックス $[\Pi_{ij}]$ に変換する代りに，$[a_{ij}]$ を変換して，百分率マトリックス $[p_{ij}]$ とするところにある．これには，$j=1\sim n$ の各列，例えば B_5 $(j=5)$ の欄において，その欄の数字の算術平均値，$m_5=80$ $(=\bar{\bar{\Pi}}_j)$ を求め，これで a_{ij} を割ればよいのである．すなわち，$p_{ij}=\frac{a_{ij}}{m_j}=\frac{a_{ij}}{80}$ である．例えば $a_{15}=70$ は $p_{15}=\frac{70}{80}=87.5\%$ となる．$[p_{ij}]$ は％で表わすから，百分率法なのである．

ところで $j=1\sim n$ の各列について，順位値 $\{\Pi_{ij}\}$ の標準偏差は，差異が無いから，美人コンクールの錯誤は起らないのであるが，百分率法にあっては，$\{p_{ij}\}$ は，各列間に，その標準偏差間に相等差異があるから，美人コンクールの錯誤を是正する必要がある．このためには，$[p_{ij}]$ を方正化することが要請される．すなわち，先ず

$$\pi_{ij}=\frac{p_{ij}-\bar{p}_j}{\sigma_p},\ \bar{p}_j=\frac{1}{m}\sum_i p_{ij},\ \ \sigma_p{}^2=\frac{1}{m}\sum_i (p_{ij}-\bar{p}_j)^2$$

なる変換によって，$[p_{ij}]$ を方正化して $[\pi_{ij}]$ とする．

この $[\pi_{ij}]$ の $i=1\sim m$ の各行について，その加重算術平均

$$\bar{\pi}=\sum_j w_j\pi_{ij}\quad (\sum w_j=1)$$

を求めるに当って，その加重値を如何にすべきかを次に問題としよう．

目的は，$\{\bar{\pi}_i\}$ に基づいて，$\bar{\pi}=\sum_i\bar{\bar{\pi}}$ から $\tilde{\rho}_i=\dfrac{\bar{\pi}_i}{\bar{\bar{\pi}}}$ を算出したとき，$\{\tilde{\rho}_i\}$ の市場指数 $\{s_i\}$ に対する近似度を最大にするにある．

Cowan は，このような場合，加重値 $\{w_j\}$ は，各市場要素値の市場指数に対する偏相関係数に比例するものとしている．Cowan にあっては，方正化を忘れている．従って，美人コンクールの錯誤を免れているとは言い切れない．その点を不問に付するとしても，偏相関係数に比例する加重値が最善とは言えない．

われわれは，先ず $[p_{ij}]$ を方正化して $[\pi_{ij}]$ とした上で，$\{w_j\}$ を定めるために χ^2-test を用いる次のような方法を提唱したい．これを，第1表に示された例によって説明しよう．

第1表の数字が与えられたものとしたとき，百分率法では，この市場マトリックス $[a_{ij}]$ を各列 $(j=1\sim n)$ 毎に百分率化して $[p_{ij}]$ とした上で，美人コンクールの錯誤を是正するためにこれを方正化して $[\pi_{ij}]$ とするのであるが，方正化という一次変換の性質から，百分率化して $[\pi_{ij}]$ とする操作を省略して，$[a_{ij}]$ を直接に方正化しても，同一結果 $[\pi_{ij}]$

$$\pi_{ij}=\frac{a_{ij}-\bar{a}_j}{\sigma_a}=\frac{p_{ij}-\bar{p}_j}{\sigma_p}$$

が得られる．しかし，この際，方正値の性質から，負数が混入することを免れない．そこで，負数を消して，市場指数の目的に適するものたらしめるために，方正値マトリックス $[\pi_{ij}]$ の方正値 π_{ij} を $2+\pi_{ij}$ とすれば，$i,\ j$ の如何に関せず，$-2\leqq\pi_{ij}\leqq 2$ なる π_{ij} は全数の約 95% と期待せられるから，これで普通は負数が無くなるのであるがそれでも，負数が残る場合は $3+\pi_{ij}$ とすればよい．すなわち，これによって，$[\pi_{ij}]$ は $[\tilde{\pi}_{ij}]$ となる．$\tilde{\pi}_{ij}=2+\pi_{ij}$ 又は $\tilde{\pi}_{ij}=3+\pi_{ij}$ である．これを，市場指数的性質を持たせるために，$\bar{\bar{\pi}}_j=\sum_{j=1}^{m}\tilde{\pi}_{ij}$ を用いて，$p_{ij}=\dfrac{\tilde{\pi}_{ij}}{\bar{\bar{\pi}}_j}$ なる元を持つ市場マトリックス $[p_{ij}]$ とする．これが第2表である．

A は市場区分を表わし，B は市場要素を表わす．従って，A_i は第 i 市場を示し，B_j は第 j 市場要素を示す．

ここにおいて，$B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_7,\ C$ などの各市場への分布は，それぞれ一つの曲線にて表わされるものと考える．

例えば，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_{10}$ などを x にて表わし，$x=j$ $(j=1\sim 10)$ なるとき，x は A_j を表わすものと考え，また $y_i=B_i$ $(y=1\sim 8;\ B_8=C)$ とし，

第 2 表

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	C
A_1	20.16	17.92	18.11	14.36	8.76	17.64	14.63	16.91
A_2	12.94	14.71	9.05	15.99	17.98	8.55	19.32	14.01
A_3	15.98	15.66	16.03	13.55	15.93	10.16	9.94	13.31
A_4	10.50	12.33	12.07	4.42	14.41	17.11	13.06	11.99
A_5	5.22	4.75	0.75	11.11	9.76	12.29	14.00	10.66
A_6	11.98	12.83	14.15	17.11	2.07	5.35	6.18	8.66
A_7	6.28	7.34	4.53	6.14	3.63	14.44	10.26	7.29
A_8	7.19	5.24	9.62	8.53	10.89	7.49	3.37	7.12
A_9	4.32	4.15	7.36	5.33	5.15	2.67	4.94	5.31
A_{10}	5.38	4.72	8.30	0.27	11.34	4.29	4.31	3.74

$$y_i=\sum_{j=1}^{10} a_{ij}\varphi_j(x)=F_i(x)\,; \qquad \varphi_j(x)=(x-j)^{-1}\prod_{k=1}^{10}(x-k)$$

とすれば，$y_i=F_i(x)$ なる曲線は $a_i=(a_{i1},\ a_{i2},\ \cdots a_{i10})$ なる 10 次元の空間における一つのヴェクトルによって代表される．これらの曲線間の距離を表わすものとして，

$$\delta(i,\ k)=\sum_{j=1}^{10}\frac{(a_{ij}-a_{kj})^2}{a_{kj}}$$

なる δ を考え，これは，$y_k=F_k(x)$ なる曲線から $y_i=F_i(x)$ なる曲線への距離と考えると，y_8 すなわち C を表わす曲線から $y_l=F_l(x)$ $[l=1\sim7]$ なる曲線への距離 δ_l は第 3 表に示す如くである．

第 3 表

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7
δ_l	2.631	2.945	3.200	18.182	25.781	16.602	14.870
P_l	97.6 %	96.4	95.5	3.74	0.22	8.08	9.81
W_l	31.3 %	31.0	30.7	1.2	0.1	2.6	3.1

P_l の欄は，δ_l を統計理論における χ^2—分布をなすものと考えたときの $P_l=P\{\chi^2\geqq\delta_l\}$ なる確率を示す．市場要素の加重値は，偏相関係数に比例すると考えるよりは，寧ろ，このような確率に比例するものと考える方がより妥当であると考えられるので，これに比例する加重値を W_l の欄に示した．勿論 $W_1+W_2+\cdots+W_7=100$ (%) である．

市場指数作成に当っては，この加重値の大なるものから，順次に，市場要素を一つずつ増加せしめて市場指数を構成し，適当なところで打切り，市場要素数を最小にして，而も信頼度高き市場指数の作成を企図するのである．第 4 表は，この手続きを示す．

S_1 は B_1 のみを以て指数を構成したものであり，S_2，S_3，$\cdots$，S_6，S などは，それぞれ

$$S_2=\frac{W_1B_1+W_2B_2}{W_1+W_2},\qquad S_3=\frac{W_1B_1+W_2B_2+W_3B_3}{W_1+W_2+W_3},$$

………………………………………………………………………………

$$S_6=\left(\sum_{i=1}^{6} W_iB_i\right)\div\left(\sum_{i=1}^{6} W_i\right),\quad S=\left(\sum_{i=1}^{7} W_iB_i\right)\div\left(\sum_{i=1}^{7} W_i\right)$$

である.

第 4 表

A \ S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S
A_1	20.16	19.05	18.74	18.60	18.40	18.50	18.49
A_2	15.98	15.82	15.89	15.10	15.55	15.53	15.53
A_3	12.94	13.82	12.25	12.47	12.37	12.41	12.42
A_4	10.50	11.41	11.63	11.67	11.82	11.73	11.73
A_5	11.98	12.40	12.98	12.76	12.57	12.62	12.61
A_6	6.29	6.91	6.13	6.26	6.48	6.47	6.47
A_7	5.22	4.99	3.59	3.92	4.14	4.23	4.23
A_8	7.19	6.22	7.34	7.21	6.22	7.24	7.24
A_9	5.38	5.05	6.12	6.07	6.02	5.95	5.96
A_{10}	4.32	4.24	5.27	5.26	5.12	51.9	5.19

これを一覧して明かであるように，指数作成の目的如何によっては，S_3 にて既に充分である場合も考えられる.

以上述べた方法によって，$\{W_i\}$ が確定した以上は，第 $(t+1)$ 年の市場マトリックス $[a_{ij}^{t+1}]$ から，同年の市場指数 $\{S_i^{t+1}\}$ を作成する方法は，確定した訳である．残るところは，$(t=1\sim\tau)$ の各年の市場マトリックス $[a_{ij}^{t}]$ から $[a_{ij}^{\tau+1}]$ を推定する問題が残されている訳である．これに用いらるべき方法として，標準領域の方法は，「経営科学」第 4 巻第 2 号掲載の「OR における予測の要素」に述べたところから明かであろうし，曲線を項とする時系列については，他の場所で述べたところから了解して戴ける考えられるので，いまは，これで欄筆することとする.