文　献　抄　録

Tanner, J. C.: A Theoretical Analysis of Delays at An Uncontrolled Intersection *Biometrika Vol.* ***49****(1962) 163—170*

大きな道と小さな道が交叉している．自動車がそれぞれの道をランダムな間隔で走っているのだが，交通法規により大きな道の自動車が交叉点において優先権を持っているため，小さな道から来る自動車は一時停止せざるを得ない．その停止して待っている時間を確率論で検討したものである．

大きな道の車が交叉点を通過するのに要する時間を β_1，小さな道の車の要する時間を β_2，とおく．小さな道の車は，大きな道の車が通過したのち α だけたってはじめて交叉点に入ることができるとする．それぞれの道に車がやってくる頻度は，母数 q_1, q_2（単位時間当り）なるポアソン分布に従うとしよう．大きな道をとおる車も交叉点をとおるのに β_1 時間かかるから，到着の時間間隔が短かすぎるとあとの車は待たざるを得ない．その平均待時間は

$$\bar{w}=\frac{\beta_1{}^2 q_1}{2(1-\beta_1 q_1)}$$

である．それに対して，小さい道の車の平均待時間 $\bar{w}_2$ は次のようにして求められる．

Kendall (1951) の論文にあるような再生時点の方法を使う．再生時点として，

（i）　小さな道の車が通過した瞬間

（ii）　大きな道の車が通過したのち α 時間へて大きな道に車が到着していないとき（(i)に含まれる場合をのぞく）

の 2 つを考える．前者において，小さな道に車が i 台待っているとき，この時点を $P_i (i=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ で表わし，後者の時点を P_x で表わす．ランダムな再生時点が $P_j (j=x, 0, 1, \cdots\cdots)$ である確率を $p_j (j=x, 0, 1, \cdots\cdots)$ とし，遷移確率を $\pi_{ij} (i, j=x, 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ とおくと

$$p_x=p_x\pi_{xx}+p_0\pi_{0x}$$
$$p_0=p_x\pi_{x0}+p_0\pi_{00}+\pi_{10}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

となる．大きな道での車の到着間隔は指数分布

$$dF(t)=q_1 exp(-q_1 t)\,dt \qquad (0<t<\infty)$$

に従う．また小さな道で，y なる時間に到着する車が i である確率は

$$f_i(y)=exp(-q_2 y)\,(q_2 y)^i/i\,! \quad (i=0, 1, 2\cdots\cdots)$$

である．これらより

$$\pi_{xx}=\frac{q_1}{q_1+q_2}\int f_0(y)\,dF(y)$$
$$\pi_{x0}=\frac{q_1}{q_1+q_2}\int f_1(y)\,dF(y)+\frac{q_2}{q_1+q_2}$$
$$\pi_{xi}=\frac{q_1}{q_1+q_2}\int f_i(y)\,dF(y) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots)$$

が次々と計算でき，π と p の関係より p が求められる．

再生時点 $P_i (i=x, 0, 1, \cdots\cdots)$ から次の再生時点までの期待時間を E_i，その時間区間の間の小さな道の車の全待時間を F_i とすると

$$E_x=\frac{1}{q_1+q_2}+\frac{q_1}{q_1+q_2}E(y)$$
$$F_x=\frac{q_1 q_2 E(y^2)}{2(q_1+q_2)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

などとなる．

$$\bar{w}_2=\frac{1}{q_2}\cdot\frac{p_x F_x+p_0 F_0+\cdots\cdots}{p_x E_x+p_0 E_0+\cdots\cdots}$$

という関係があるから，$\bar{w}$ は計算することができる．数値計算をしてみると，たとえば $q_1=0.3$, $q_2=0.04$, $\alpha=6$, $\beta_1=1$, $\beta_2=3$ のときに，$\bar{w}_2=25.40$ となっている．　　（岸　暁男）

Desoer, C. A.: Pontriagin' Maximum Principle and The Principle of Optimality *J. Franklin Inst., Vol.* ***271*** *(1961), 361-367.*

変分法における Pontriagin の最大原理が DP の最適性原理からも自然に導き出せることを示した論文である．$u(t)$ が制御 vector, $x(t)$ が状態 vector として系

$$\dot{x}=f(x, u, t), \quad x(t_0)=x_0$$

がある．u は有界閉集合 Ω に制限され，f は $R^n\times\Omega\times R^1$ で連続的偏微分可能とする．別に 3 次元空間を軌道 $z(t)=(z_1(t), z_2(t), z_3(t))$ に沿って動く

target T がある．最小問題

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} f_0[x(\tau),\ u(\tau),\ \tau]\ dt \longrightarrow \min \\ \dot{x}=f(x,\ u,\ t),\quad x(t_0)=x_0 \\ x\in R^n,\ u\in\Omega, \\ t_1 \text{ は初めて } x_i(t)=z_i(t)\ \ (i=1,2,3) \text{ となる時刻} \end{cases}$$

を考える．ここに f_0 は与えられた cost ft. である．f および f_0 の中の第3の変数 t は一般性を失うことなく無視してよろしい．何故なら新変数 $x_{n+1}=t$ を導入し $\dot{x}_{n+1}=1$ を附加すればよいから．さて $\Gamma(x_0,\ x)$ を x_0 から x へゆくときの最小 cost とすると

$$\Gamma(x_0,\ x)=\min_{u\in\Omega}[\Gamma(x_0,\ x-f(x,u)\Delta +o(\Delta))+f_0(x,u)\Delta+o(\Delta)]$$

$$\therefore\quad 0=\max_{u\in\Omega}[(x_0,\ x)\cdot f(x,\ u)-f_0(x,\ u)]$$

となる．ここに $\Delta\Gamma$ は Γ の gradient vector である．

$$\bar{f}(x,\ u)=\begin{bmatrix} f_0(x,\ u) \\ f_1(x,\ u) \\ \vdots \\ f_n(x,\ u) \end{bmatrix},\qquad g(x)=\begin{bmatrix} -1 \\ \dfrac{\partial\Gamma}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\Gamma}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\max_{u\in\Omega}(\bar{f}(x,\ u)\cdot g(x))=0.$$

これが Pontriagin の最大原理である，この意味：最適軌道 $x^0(t)$ と最適制御 $u^0(t)$ とが存在するならば，最適軌道に沿って

$$\max_{u\in\Omega}(\bar{f}(x,\ u)\cdot g(x))=\bar{f}(x,\ u^0)\cdot g(x)=0$$

が成立する．

例として最適制御

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\to\min$$

$$x=\phi(x)+Bu$$

$$|u_i|\leqq 1(i=1,\cdots\cdots,r\ ;\ t\geqq 0)$$

に対しては，$g\cdot Bu=(B'g)\cdot u\to\max$, すなわち最適制御は bang-bang 型の

$$u_i{}^0=\mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji}g_j\right)\quad (i=1,\cdots\cdots,r)$$

となる．　　　　　　　　　　　　　　（坂口　実）

Blackwell, D. and Hodges, Jr., J.L.:
Design for The Control of Selection Bias *Ann. Math. Stat.*, *Vol.* **28**(1957), 449-460

次のような2人0和 $2n$ 段 game を考える：各段でⅡが A, B のどれか一方を select する．Ⅰがそれを predict する．当ればⅡからⅠへ金額1（外れれば0）をやる．Ⅱの selection は全部で A, B が n 回づつであることがⅠにとり既知であるとする．

Ⅱの戦略を selection design とよぶ．例えば (i) truncated binomial design —— A, B が確率 $1/2$ づつで各段独立にえらばれる．どちらかが n 回出たらその後は他方ばかりを出す．(ii) random ocasion design——可能な $\binom{2n}{n}$ 通りの A-B 系列を等確率でえらぶ．

Ⅰの戦略を prediction method とよぶ．例えば (i) convergent prediction——今までにⅡのえらんだ少ない方を predict する．同数だったら確率 $1/2$ づつで．(ii) divergent prediction——今までにⅡがえらんだ多い方を predict する．同数だったら確率 $1/2$ づつで．

［定理1］Ⅱの min-max 戦略は truncated binomial design である．これは equalizer で game の値は

$$n+n\binom{2n}{n}\Big/2^{2n}\sim n+(n/\pi)^{1/2}\fallingdotseq n+0.564n^{1/2}$$

が成立する．Ⅱが truncated binomial design d^* をとれば．Ⅰの任意の prediction method q に対して payoff の平均値 $E\{M(p,\ d^*)\}$ は p に無関係になるが，payoff の分布は p に依存する．例えばⅠがいつも A を predict して（'tail' を除く）いれば少くとも n 回当るが，at random に predict していれば1回しか当らないこともあり得る．そこでⅠは payoff の分散 $V\{M(p,\ d^*)\}$ を最大にしようとする．

［定理2］ $V\{M(p,\ d^*)\}$ が $\left\{\begin{matrix}\text{最大}\\\text{最小}\end{matrix}\right\}$ になるのは p が $\left\{\begin{matrix}\text{divergent}\\\text{convergent}\end{matrix}\right\}$ prediction のときである．

これらの定理1，2が DP の考え方を使って証明されている．　　　　　　　　　　（坂口　実）

Kao, R.C.: Note on Program Uncertainty in The Dynamic Programming Problem *Econometrica, Vol.* ***30***(1962), 336-342

最近の在庫理論で普通にやられているのは（1）離散的時間の過程で毎期の需要量が分布既知の r. v. か，または（2）需要量は固定し需要の起る時点かであるが，ここでは，この両者の混合：離散的時間の過程で毎期の需要量が分布既知の r. v. であるが programming horizon がまた r. v. である場合の解折をやる．こういう場合は例えば，follow-on provisioning において，技術条件の変動によっていつ契約の破棄が起るかわからないようなときに当てはまる．

A_n…第 n 期首で program が終るという事象とおくと

$\beta_n \equiv Pr\{$第$(n+1)$期も継続 | program が n 期間続いた$\}$

$\sum_{k \geqq n+2} Pr(A_k) / \sum_{k \geqq n+1} Pr(A_k)$

である．

$C_n(x)$……第 n 期首の initial stock x から出発して最適政策による総費用

$\varphi(\xi)$……毎期の需要の密度函数

とおくと最適在庫方程式は

$$C_n(x) = \min_{y \geqq x}\left[c(y-x)+L(y)+\alpha\beta_n\int_0^\infty C_{n+1}(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi\right] \quad (1)$$

ここに $0<\alpha<1$ は割引率で

$$L(y) \equiv \int_0^y h(y-\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int_y^\infty p(\xi-y)\varphi(\xi)d\xi$$

であり，c, h, p はそれぞれ ordering, holding および penalty の cost を表わす函数である．

［定理］ $L(y)$ が convex，かつ

$c(z)=0, (z=0)\ ; =K+cz, (z>0)$

のときは，(1) の最適政策は，(s, S) 型在庫政策であることが証明されている．excess demand がいつも backlog されるならば，配達の遅れがある場合にも同様の定理が成立する．

具体例として $Pr.(A_n)$ が幾何分布，Poisson 分布，負の2項分布の場合の計算がしてある．

（坂口　実）

Ston E,M.: The Opinion Pool *Ann. Math. Stat., Vol.* ***32***(1961), 1339-1342

共通の効用函数をもつ友人が joint decision をなすときに，state of nature θ の分布に対して違った opinion をもつとする：

"i" の opinion は $P_i(\theta)$，$(i=1, \cdots\cdots, k)$．

効用函数を $u(d, \theta)$ とする．d は joint decision である．

Savage の group min-max rule とは

$$\max_{i=1\cdots,k}\left[\max_d \int u(d, \theta)p_i(\theta)d\theta - \int u(d, \theta)p_i(\theta)d\theta\right] \longrightarrow \min_d$$

のような d をとれ，というのである．(左辺［ ］の中は，$p_i(\theta)$ が真なのにそれを知らないで d をとるための regret を表わす)．この rule は各 $p_i(\theta)$ の支持者の人数を反映してないから真に民主的とはいえない．

そこで著者は opinion-pool rule：確率 vector $\lambda=(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_k)$ をえらび

$$\sum_1^k \lambda_i \int u(d, \theta) \longrightarrow \max_d$$

のような d（これを $d_\lambda{}^*$ とおく）をとれ．

を提示している．

$$\int u(d, \theta)p_i(\theta)d\theta \longrightarrow \max_d$$

のような d を $d_i{}^*$ とおく．これは $p_i(\theta)$ が真なことが既知のときの best decision である．実際の θ の分布を $P_a(\theta)$ とする．opinion pool λ の効果を

$$e(\lambda \mid P_a(\theta)) \equiv \max_{i=1,\cdots,k}\left[\int u(d_\lambda{}^*, \theta)P_a(\theta)d\theta - \int u(d_i, \theta)P_a(\theta)d\theta\right]$$

で測る．この量は，どれかの "i" の意見に支配されないで opinion pool λ に従うときの最大利益を表わしている．次の2定理は

$e(\lambda|P_a(\theta)) \geqq 0$ for all λ

となるための充分条件を与える．

［定理1］$k=2$ とする．

$P_a(\theta)=\mu_1P_1(\theta)+\mu_2P_2(\theta)$，$\mu_1+\mu_2=1$

とかけるような任意の $P_a(\theta)$ に対して (1) が成立する．

［定理2］$u(d, \theta)$ がどの θ を固定しても d につき strictly concave，かつ $D=\{d\}$ が区間をな

すならば

$$e(\lambda|P_a(\theta))\geqq 0 \quad \text{for all } \lambda, Pa(\theta).$$

などが証明されている.

（坂口　実）

Degroot, M. H.: Uncertainty, Information, and Sequential Experiments
Ann. Math. Stat., Vol. ***33***(1962), 404–419

確率 k-vector $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$ の全体を Ξ とおく. Ξ の上で定義された非負可測函数 $U(\xi)$ を uncertainty ft. とよぶ. 確率変数 X の実現値を観測することを「実験 X を行なう」ともいうことにする. k 個の確率密度函数 $f_i(x)(i=1,\cdots,k)$ が与えられている. ξ が $\Omega=\{1,\cdots,k\}$ の上の事前分布のときに, 実験 X が与える情報量を

$$I[X,\xi;U]\equiv U(\xi)-E[U(\xi(X))|\xi],$$

ただし

$$\xi(x)=\left(\xi_1 f_1(x)\Big/\sum_1^k \xi_j f_j(x),\cdots,\xi_k f_k(x)\Big/\sum_1^k \xi_j f_j(x)\right)$$

は観測値 x を得た後の Ω の上の事後分布, で定義すると

［定理 2.1］ $I[X,\xi;U]\geqq 0$ for all X and $\xi\in\Xi$ のための必要充分条件は $U(\xi)$ が concave なことである.

concave な uncertainty ft. の例として有名な Wiener-Shannon の entropy ft. $U(\xi)=-\sum_1^k \xi_j \log\xi_j$ の他にも, $U(\xi)=1-\max(\xi_1,\cdots,\xi_k)$ などがある. また下図のように多数個の実験がある場合に, 全部で n回実験をえらんで行ない得られる情報量を最大に, すなわち

$$E[U(\xi(x_1,\cdots\cdots,x_n))|\xi]\xrightarrow[X_1\cdots X_n]{}\min$$

実験	C: X	Y……
1	$f_1(x)$	$g_1(y)$
⋮	⋮	⋮
k	$f_k(x)$	$g_k(y)$

のように逐次計画せよ, という問題がある.

$U_j(\xi)=$いまの知識が ξ で, あと j 回残っているとき最適計画により得られる期待効用

とおくと

$$U_{j+1}(\xi)=\min_{X\in C}E[U_j(\xi(X))|\xi]$$

$$(j=0,1,2,\cdots;\ U_0(\xi)=U(\xi))$$

となる. 右辺最小に到達する X を $X^*_{n-j}(\xi)$ とかく：j 回目の実験の後の事後知識を ξ^j とすると, $(j+1)$ 回目の実験の最適選択は $X^*_{j+1}(\xi^j)$ である.

［定理 4.1］ 上の逐次実験計画は最適である：すべての ξ^0 に対し $E[U(\xi^0(X_1,\cdots\cdots,X_n))|\xi^0]$ を最小にする.

［定理 4.2］ すべての $\xi\in\Xi, X\in C$ に対し不等式

$$E[U(\xi(X^*))|\xi]\leqq E[U(\xi(X))|\xi]$$

が成立するような $X^*\in C$ がもしあれば, その ξ および n に対して X^* ばかりを n 回くり返すのが最適計画である.

今度は n も確率変数として, $U(\xi(x_1,\cdots,x_n))\leqq\epsilon$ に始めてなったら実験を止めるとする. 問題は必要な実験回数 $N(S)$ (S は逐次計画を表わす) の期待値を最小にせよ：$E[N(S)|\xi]\longrightarrow\min$. 今度は定理 4.1 のような一般法則はない. それ所か次のような奇妙な例が作れる：$\Omega=\{1,2\}=\{X,Y\}$ として $f_i(x)$, $g_i(y)(i=1,2)$ を巧妙に与えると, 実験総回数 n を固定すれば X ばかりを n 回くり返すのが最適であり, n を固定しないならば Y ばかりを n 回くり返すのが最適である.

（坂口　実）

おたずね

下記の雑誌お持ちの方, 又は所在御存知の方はお知らせ下れば幸です.

東京都目黒区三田 13 番地
防衛庁技術研究本部第一研究所第五部数理研究室
浅井清朗　　Tel. (713) 6111 内線 306

REVUE FRANÇAISE DE RECHERCHE OPÉRATIONELIE NUMÉRO 1 —— NUMERO SPECIAL
OPERATIONAL RESEARCH QUART. Vol. 1, No.1 —— Vol. 6, No.1
MANAGEMENT SCIENCE Vol. 1, Nos. 3 & 4
NAVAL RESÈARCH LOGISTIC QUART. Vol. 1, No. 1 —— No. 4