予備品の簡易な多段配分計画
(Simple Procedure for Obtaining Optimal Multi Allocation of Spares)

三　觜　　武*

§1. 問　題

次の問題を考察する.

(問題) m 個所で互に独立に需要が発生する. 今, 総数 n の予備品をいかに配分すれば,

〔I〕 総品切れ数の期待値を最小に出来るか.

〔II〕 品切れの起きない確率を最大に出来るか.

但し, 第 j 番目の個所において, 需要が i 個起きる確率を $p_j(i)>0$, 分布函数を,

$F_j(x)=\sum_{i=0}^{\infty} p_j(i)$ とする.

又, 第 j 番目の個所の予備品の残存数を l_j とする.

$l_j=0$ の場合については, 問題〔I〕を, M. A. Geisler & H. W. Karr[3] が Lagrange の乗数法により, 問題〔II〕を G. Black & F. Proschan[2] が Nonlinear Programming によって考察している. これらの考察はいずれも, 配分個所毎に cost の weight を考慮したものであって, この考察は新しい System の予備品数の設計には便利であるが, 逐次予備品の補給をする計画のときは, 必ずしも便利とはいえない.

ここでは cost の weight が均一のときは, $l_j \geqq 0$ の場合の配分計画——即ち逐次予備品の補給計画を行う——の最適整数解が簡便に求め得ることを示す.

以下, その手順, 数値例及び数学 Model を掲る.

§2. 手　順

表-1

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	……	$F_j(x)$	……	$F_m(x)$
0						
1						
2						
⋮						

* 日本国有鉄道中央鉄道学園能率管理研究所 昭和37年10月3日受理

〔I〕 品切れ数の期待値最小[4)]

（1） $F_j(x)$ の表を，表-1 のように作る．

（2） 表-1 の列 j の数値について，上より l_j の数だけ▲をつける．

（3） ▲のつかない最上部のものを列 j につき比較し最小のものに＊をつける．

（4） 次に▲又は＊の付いたもののすぐ下の行の数値（▲又は＊のない列においては $x=0$ の行の数値）を列 j について比較し最小のものに＊をつける．

（5） この手順を繰返し＊の総数が n になったらやめる．

（6） 行 j について＊の数を数える．＊の数が j への予備品の最適配分数となる．

（7） 最適配分の政策は，$n=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots$ につき逐次求められる．これを表にしたものを政策表〔I〕という．

（8） j への最適配分数を n_j とすれば，勿論

$$n=\sum_{j=1}^{m} n_j$$

Return 即ち，最適配分を行ったときの品切れ数の期待値 $f_{[\mathrm{I}]}(n)$ は

$$f_{[\mathrm{I}]}(n)=\sum_{j=1}^{m} h_j(n_j+l_j)$$

ここに $h_j(n_j+l_j)$ は

$$\begin{cases} h_j(0)=\mu_j \ (\mu_j \text{ は } F_j(x) \text{ の期待値}) \\ h_j(x+1)=h_j(x)+F_j(x)-1 \end{cases}$$

より求める．

$f_{[\mathrm{I}]}(n)$ の表を利得表〔I〕という．

〔II〕 品切れの起きない確率最大

（1） 需要分布表（表-1）より $\Delta \log F_j(x)$ の表（表-2）を作る．Δ は x についての差分とする．

表-2

x	$\Delta\log F_1(x)$	$\Delta\log F_2(x)$	…………	$\Delta\log F_j(x)$	…………	$\Delta\log F_m(x)$
0						
1						
2						
⋮						

（2） 表-2 の列 j の数値について，上より l_j の数だけ▲をつける．

（3） ▲のつかない最上部のものを列 j につき比較し最大のものに＊をつける．

（4） 次に▲又は＊のついたもののすぐ下の行の数値（▲又は＊のない列においては $x=0$ の行の数値）を列 j について比較し最大のものに＊をつける．

（5） この手順を繰返し＊の総数が n になったらやめる．

（6） 行 j について＊の数を数える．＊の数が j への予備品の最適配分数となる．

（7） 最適配分の政策は $n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots$ につき逐次求められる．これを表にしたものを政策表〔II〕という．

（8） j への最適配分数を n_j とすれば

$$n=\sum_{j=1}^{m} n_j$$

Return 即ち，最適配分を行ったときの品切れの起きない確率を $f_{〔\mathrm{II}〕}(n)$ とすれば，

$$f_{〔\mathrm{II}〕}(n)=\prod_{j=1}^{m} F_j(n_j+l_j)$$

$f_{〔\mathrm{II}〕}(n)$ の表を利得表〔II〕という．

この手順は，

〔I〕 においては μ_j が存在すれば，分布函数 $F_j(x)$ の型は何であってもよい．

〔II〕 においては，$n+l_j>x\geqq l_j$ について

(a) $\Delta p_j(x)\leqq 0$

(b) $\Delta^2 p_j(x)\leqq 0$

(c) $\Delta\left\{\dfrac{p_j(x)}{p_j(x+1)}\right\}\geqq 0$

のいずれかが成り立つとき，使用出来る．

(a) (b) の条件は需要分布のヒストグラムから容易に判別できる．

§3. 数 値 例

表-3

μ_j	1.5	1.9	2.6	3.4	6.0
x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$
0	0.223	0.150	0.074	0.033	0.002
1	0.558	0.434	0.267	0.147	0.017
2	0.809	0.704	0.518	0.340	0.062
3	0.934	0.875	0.736	0.558	0.151
4	0.981	0.956	0.877	0.744	0.285
5	0.996	0.987	0.951	0.871	0.446
6	0.999	0.997	0.983	0.942	0.606
7	1.000	0.999	0.995	0.977	0.744
8		1.000	0.999	0.992	0.847
9			1.000	0.997	0.916
10				0.999	0.957
11				1.000	0.980
12					0.991
13					0.996
14					0.999
15					1.000
16					1.000

(例) H 客貨車区には派出所が5個所ある．それぞれの派出所で生ずる空気ホースの需要は，表-3 (需要分布表) の通りである．(需要は1週間分)

これを問題〔I〕として解くには次の様にする．ここでは $l_j=0$ とする．

表-3 によって $x=0$ の行を比較すると $j=5$ の列の 0.002 が最小であるから＊をつける．次に今＊をつけたすぐ下の数値と他の $x=0$ の行のものとを比較し最小のものに＊をつける．すなわち $j=5$ の 0.017 がそれである．このように，＊のすぐ下の行の数値（＊のない列では $x=0$ の行の数値）を比較して，最小のものに＊をつける手順を繰り返えす．次は $j=4$ の 0.033 に＊がつけられる．

＊の数が全部で n になったらやめて，各列の（j の）＊を数える．$n=10$ のときは，配分（1, 1, 2, 2, 4），$n=20$ のときは，配分（2, 3, 4, 4, 7）$n=30$ のときは配分（4, 4, 5, 7, 10）が最適となる．

表-3 で＊をつけていく途中最小のものが 2 つ以上あったなら，任意に選んで＊をつけてもよい．

この手順では，＊の数が 0 個から n 個までの最適配分の仕方が順次求められる．これを表にしたのが表-4 の政策表〔I〕である．

表-4　政策表〔I〕

n \ j	1	2	3	4	5	n \ j	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	23	3	3	4	5	8
1	0	0	0	0	1	24	3	3	4	5	9
2	0	0	0	0	2	25	3	3	4	6	9
3	0	0	0	1	2	26	3	4	4	6	9
4	0	0	0	1	3	27	3	4	5	6	9
5	0	0	1	1	3	28	3	4	5	6	10
6	0	0	1	2	3	29	4	4	5	6	10
7	0	1	1	2	3	30	4	4	5	7	10
8	0	1	1	2	4	31	4	4	6	7	10
9	1	1	1	2	4	32	4	5	6	7	10
10	1	1	2	2	4	33	4	5	6	7	11
11	1	1	2	2	5	34	4	5	6	8	11
12	1	1	2	3	5	35	4	5	6	8	12
13	1	2	2	3	5	36	5	5	6	8	12
14	1	2	2	3	6	37	5	5	7	8	12
15	1	2	3	3	6	38	5	6	7	8	12
16	1	2	3	4	6	39	5	6	7	8	13
17	2	2	3	4	6	40	5	6	7	9	13
18	2	2	3	4	7	41	5	6	8	9	13
19	2	3	3	4	7	42	6	6	8	9	13
20	2	3	4	4	7	43	6	6	8	9	14
21	2	3	4	4	8	44	6	6	8	10	14
22	2	3	4	5	8	45	6	7	8	10	14

Return 即ち，最適配分を行ったときの品切れ数の期待値 $f_{〔I〕}(n)$ を計算するとき，$h_j(x)$ を求めるのに，表-5 を利用すると便利である．

表-5

x	$F_j(x)$〔A〕	$h_j(x)$〔B〕	$h_j(x)+F_j(x)$〔C〕
0		μ_j	
1			
2			
⋮			

$$\begin{cases} 〔C〕=〔A〕+〔B〕 \\ 〔x+1 \text{ の } B〕=〔C〕-1 \end{cases}$$

表-6 利得表〔I〕

n	$f_{[I]}(n)$	n	$f_{[I]}(n)$
0	15.400	23	1.008
1	14.402	24	0.855
2	13.419	25	0.726
3	12.452	26	0.601
4	11.514	27	0.478
5	10.588	28	0.394
6	9.735	29	0.328
7	8.885	30	0.270
8	8.036	31	0.221
9	7.259	32	0.177
10	6.526	33	0.134
11	5.811	34	0.111
12	5.151	35	0.091
13	4.585	36	0.072
14	4.031	37	0.055
15	3.549	38	0.042
16	3.107	39	0.033
17	2.665	40	0.025
18	2.271	41	0.020
19	1.975	42	0.016
20	1.711	43	0.012
21	1.455	44	0.009
22	1.199	45	0.006

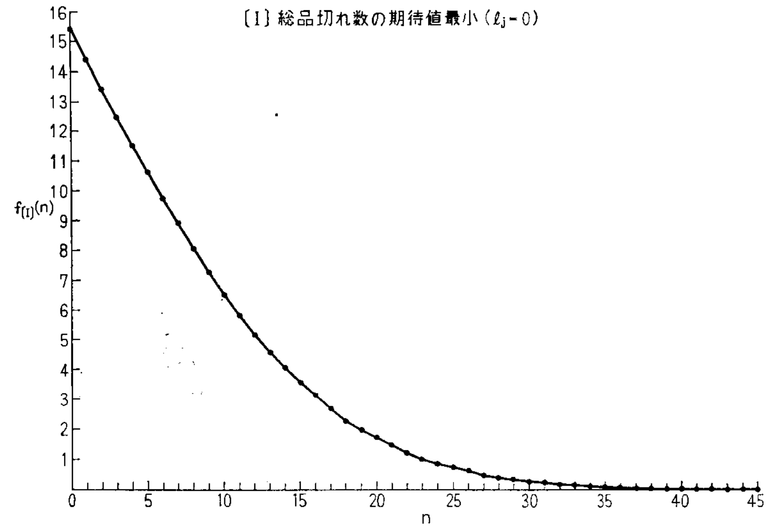
この場合の利得表〔I〕は，表-6 の通りである．

〔II〕の問題として取り扱うなら，需要分布表（表-3）より，表-7 を求める．対数表は 4 桁の常用対数表を用いた．

これより，§2. の手順により政策表〔II〕（表-8）及び利

表-7

x	$\Delta\log F_1(x)$	$\Delta\log F_2(x)$	$\Delta\log F_3(x)$	$\Delta\log F_4(x)$	$\Delta\log F_5(x)$
0	0.3983	0.4614	0.5573	0.6488	0.9294
1	0.1613	0.2101	0.2878	0.3642	0.5620
2	0.0624	0.0944	0.1526	0.2151	0.3866
3	0.0214	0.0385	0.0761	0.1250	0.2758
4	0.0066	0.0138	0.0352	0.0684	0.1945
5	0.0013	0.0044	0.0144	0.0341	0.1332
6	0.0004	0.0009	0.0052	0.0158	0.0891
7	0.0000	0.0004	0.0018	0.0066	0.0563
8		0.0000	0.0004	0.0022	0.0340
9			0.0000	0.0009	0.0190
10				0.0004	0.0103
11				0.0000	0.0049
12					0.0022
13					0.0013
14					0.0000
15					0.0000
16					0.0000



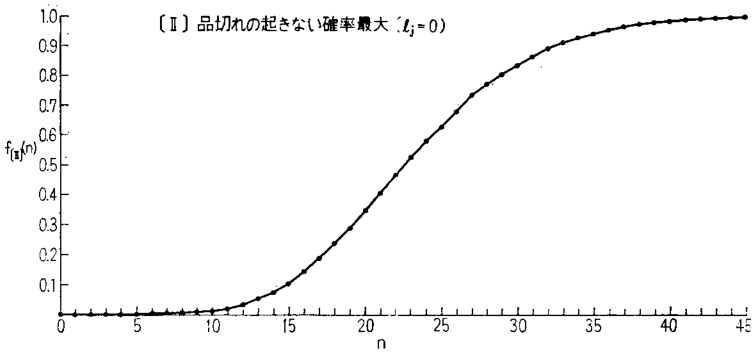
第 1 図

得表〔II〕，（表-9）を求めることが出来る．

（例） 上記の問題で，各派出所の残存数 l_j が（3, 2, 3, 5, 6）の時，更に n=5 本を追加して，品切れ期待数を最小にするには，（0, 1, 1, 0, 3）の配分をすればよい．（表-10 参照）

表-8　政策表〔II〕

n \ j	1	2	3	4	5	n \ j	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	23	3	3	4	5	8
1	0	0	0	0	1	24	3	4	4	5	8
2	0	0	0	1	1	25	3	4	5	5	8
3	0	0	0	1	2	26	3	4	5	6	8
4	0	0	1	1	2	27	3	4	5	6	9
5	0	1	1	1	2	28	4	4	5	6	9
6	1	1	1	1	2	29	4	4	5	6	10
7	1	1	1	1	3	30	4	4	5	7	10
8	1	1	1	2	3	31	4	4	6	7	10
9	1	1	2	2	3	32	4	5	6	7	10
10	1	1	2	2	4	33	4	5	6	7	11
11	1	1	2	3	4	34	4	5	6	8	11
12	1	2	2	3	4	35	5	5	6	8	11
13	1	2	2	3	5	36	5	5	7	8	11
14	2	2	2	3	5	37	5	5	7	8	12
15	2	2	3	3	5	38	5	6	7	8	12
16	2	2	3	3	6	39	5	6	7	8	13
17	2	2	3	4	6	40	5	6	7	9	13
18	2	3	3	4	6	41	5	6	8	9	13
19	2	3	3	4	7	42	5	6	8	9	14
20	2	3	4	4	7	43	6	6	8	9	14
21	2	3	4	5	7	44	6	6	8	10	14
22	3	3	4	5	7	45	6	7	8	10	14



第2図

表-9 利得表〔II〕

n	$f_{[\mathrm{II}]}(n)$	n	$f_{[\mathrm{II}]}(n)$
0	0.000000163	23	0.529
1	0.00000139	24	0.578
2	0.00000619	25	0.626
3	0.0000226	26	0.678
4	0.0000814	27	0.733
5	0.000236	28	0.770
6	0.000589	29	0.804
7	0.00144	30	0.834
8	0.00332	31	0.862
9	0.00644	32	0.890
10	0.0122	33	0.911
11	0.0199	34	0.925
12	0.0324	35	0.939
13	0.0506	36	0.951
14	0.0734	37	0.962
15	0.104	38	0.971
16	0.142	39	0.976
17	0.189	40	0.981
18	0.235	41	0.985
19	0.288	42	0.988
20	0.344	43	0.991
21	0.402	44	0.993
22	0.464	45	0.995

表-10 追加配分計画表

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$
0	▲ 0.223	▲ 0.150	▲ 0.074	▲ 0.033	▲ 0.002
1	▲ 0.558	▲ 0.434	▲ 0.267	▲ 0.147	▲ 0.017
2	▲ 0.809	* 0.704	▲ 0.518	▲ 0.340	▲ 0.062
3	0.934	0.875	* 0.736	▲ 0.558	▲ 0.151
4	0.981	0.956	0.877	▲ 0.744	▲ 0.285
5	0.996	0.987	0.951	0.871	▲ 0.446
6	0.999	0.997	0.983	0.942	* 0.606
7	1.000	0.999	0.995	0.977	* 0.744
8		1.000	0.999	0.992	* 0.847
9			1.000	0.997	0.916
10				0.999	0.957
11				1.000	0.980

§4. 数学 Model

(1) 選択過程

Dynamic Programming に於ける選択過程[1] を次の様に考える.

$$\begin{cases} V_n(X)=\underset{j}{\mathrm{Max}}[g(X,\ j)+V_{n-1}(X+Y_j)] \\ V_0(X)=h(X) \end{cases}$$

ここに,

$V_n(X)$; 状態変数 X のとき n 段最適な選択を行ったときの Return

又, 状態変数は

$X=(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_j,\cdots\cdots,\ x_m)$ $x_j\geqq 0$ $(j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ m)$

なる m 次元の Vector.

政策 j により変化する状態を

$Y_j=(0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 1,\ \cdots\cdots 0)$

第 j 項が 1, 他の項は 0 の m 次元の Vector

$g(X,\ j)=h(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_j+1,\ \cdots\cdots,\ x_m)-h(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_j,\ \cdots\cdots,\ x_m)$

$h(X)=\sum_{j=1}^{m} h_j(x_j)$ とする.

$\therefore \quad g(X, j)=h_j(x_j+1)-h_j(x_j)=\Delta h_j(x_j)$

$h_j(x)$ は問題によって与えられる函数である．

次の Lemma が成り立つことは明かである．

〔Lemma〕 上の選択過程に於て

$$\Delta h_j(x)>0,\ \Delta^2 h_j(x)<0$$

なるとき，Optimal Policy は，

$\operatorname*{Max}_j g(X, j)$ なる j である．

〔Corollary〕 選択過程（V_n, g, h, X 及び Y_j は上記の通り）

$$\begin{cases} V_n(X)=\mathrm{Min}[g(X, j)+V_{n-1}(X+Y_j)] \\ V_0(X)=h(X) \end{cases}$$

に於て，$h_j(x)=\sum_{i=x}^{\infty}(i-x)p_j(i)$, $p_j(i)>0$ ならば

Optimal Policy は $\operatorname*{Min}_j F_j(x_j)$ なる j である．

$$\Delta h_j(x)=-\{1-F_j(x)\}<0$$

$$\Delta^2 h_j(x)=p_j(x+1)>0$$

であるから Optimal Policy は

$\operatorname*{Min}_j g(X, j)=\operatorname*{Min}_j \Delta h_j(x_j)=\operatorname*{Min}_j F_j(x_j)$ である．

これは問題〔I〕の Model である．$V_n(X)$ が $f_{[\mathrm{I}]}(n)$ に当る．又，$h_j(x+1)=h_j(x)+F_j(x)-1$ である．

〔Corollary〕 上の選択過程

$$\begin{cases} V_n(X)=\operatorname*{Max}_j[g(Xj)+V_{n-1}(X+Y_j)] \\ V_0(X)=h(X) \end{cases}$$

において，$h_j(x)=\log F_j(x)$, $p_j(i)>0$

なるとき，$\Delta^2 \log F_j(x)<0$ ならば，

Optimal Policy は $\operatorname*{Max}_j \Delta \log F_j(x)$ なる j である．

（証） $\Delta F_j(x)=p_j(x+1)>0$, $\quad \therefore \ \Delta \log F_j(x)>0$ より明かである．

これは，問題〔II〕の Model である．初期の状態 $x_j=l_j$ であり，$V_n(X)$ が $\log f_{[\mathrm{II}]}(n)$ に当る．以下 $p_j(i)>0$ とする．

〔Lemma〕

$$\Delta p_j(x)<\frac{p_j(x)p_j(x+1)}{F_j(x)} \Leftrightarrow \Delta^2 \log F_j(x)<0$$

（証） $\Delta^2 \log F_j(x)=\log\dfrac{F_j(x+2)\cdot F_j(x)}{F_j(x+1)\cdot F_j(x+1)}<0$

$$\Updownarrow$$

$$\{F_j(x+1)+p_j(x+2)\}\{F_j(x+1)-p_j(x+1)\}<\{F_j(x+1)\}^2$$

$$\Updownarrow$$

$$F_j(x)\{p_j(x+1)-p_j(x)\}<p_j(x+1)p_j(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Delta p_j(x)<\frac{p_j(x)p_j(x+1)}{F_j(x)}$$

〔Lemma〕

$$\Delta p_j(x)\leqq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 \log F_j(x)<0$$

〔証〕 $\Delta p_j(x)\leqq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta p_j(x)<\dfrac{p_j(x)p_j(x+1)}{F_j(x)}$ より明かである.

〔Lemma〕

$$\Delta\left\{\frac{p_j(x)}{p_j(x+1)}\right\}\geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta^2 \log F_j(x)<0$$

(証) $\dfrac{p_j(x)}{p_j(x+1)}\geqq\dfrac{p_j(x-1)}{p_j(x)} \quad \Leftrightarrow \quad p_j(x)p_j(x)\geqq p_j(x+1)p_j(x-1)$

$$p_j(x-1)p_j(x-1)\geqq p_j(x)p_j(x-2)$$

$$\therefore \quad p_j(x)p_j(x)p_j(x-1)p_j(x-1)\geqq p_j(x+1)p_j(x-1)p_j(x)p_j(x-2)$$

$$\therefore \quad p_j(x)p_j(x-1)\geqq p_j(x+1)p_j(x-2)$$

$$p_j(x-1)p_j(x-2)\geqq p_j(x)p_j(x-3)$$

$$p_j(x)p_j(x)p_j(x-1)p_j(x-2)\geqq p_j(x+1)p_j(x-1)p_j(x)p_j(x-3)$$

$$\therefore \quad p_j(x)p_j(x-2)\geqq p_j(x+1)p_j(x-3)$$

以下同様にして, $p_j(x)p_j(x-y)\geqq p_j(x+1)p_j(x-y-1)$

ここに y は $y\leqq x-1$ なる整数である.

従って

$$\begin{aligned}
&p_j(x)p_j(x+1)-\Delta p_j(x)F_j(x)=p_j(x)p_j(x+1)+p_j(x)F_j(x)-p_j(x+1)F_j(x)\\
&=p_j(x)p_j(x+1)+\{p_j(x)p_j(x)+p(x)p_j(x-1)+p_j(x)p_j(x-2)\\
&+p_j(x)p_j(x-3)+\cdots\cdots+p_j(x)p_j(1)+p_j(x)p_j(0)\}\\
&-\{p_j(x+1)p_j(x)+p_j(x+1)p_j(x-1)+p_j(x+1)p_j(x-2)+\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots+p_j(x+1)p_j(0)\}>p_j(x)p_j(0)>0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \Delta p_j(x)<\frac{p_j(x)p_j(x+1)}{F_j(x)}$$

従って, $\Delta^2 \log F_j(x)<0$ である.

〔Corollary〕 (Black & Proschan の Model)[2)]

$F_j(x)$ が期待値 μ_j の Poisson 分布のときは, $\Delta^2 \log F_j(x)<0$

(証) $\dfrac{p_j(x)}{p_j(x+1)}=\dfrac{x+1}{\mu_j}$

$$\therefore \quad \Delta\left\{\frac{p_j(x)}{p_j(x+1)}\right\}=\frac{1}{\mu_j}>0$$

従って $\Delta^2 \log F_j(x) < 0$

これは文献 2) の Lemma の別証である.

〔Lemma〕

$$\Delta^2 p_j(x) \leqq 0 \Rightarrow \Delta^2 \log F_j(x) < 0$$

（証）

$$\Delta^2 p_j(x) \leqq 0 \Rightarrow p_j(x) \geqq \frac{p_j(x+1)+p_j(x-1)}{2}$$

$$\therefore\quad p_j(x)p_j(x) \geqq \left\{\frac{p_j(x+1)+p_j(x-1)}{2}\right\}^2 \geqq p_j(x+1)p_j(x-1)$$

$$\therefore\quad \Delta\left\{\frac{p_j(x)}{p_j(x+1)}\right\} \geqq 0$$

従って $\Delta^2 \log F_j(x) < 0$ である.

（2） 配分過程[1)]

問題〔II〕に於て$\Delta^2 \log F_j(x) < 0$ でない $F_j(x)$ があるときは，次の様な Dynamic Programming の配分過程として計画する.

$$W_m(n) = \underset{n \geqq s \geqq 0}{\mathrm{Max}} \{F_m(l_m+s) \cdot W_{m-1}(n-s)\}$$

$W_m(n)$; n 個の予備品を，第 m の個所より第1の個所まで最適に配分したときの品切れの起きない確率

$j \geqq m'(m > m' > 2)$ なる j について,

$$\Delta^2 \log F_j(x) \nless 0$$

$m' > j$ なる j について $\Delta^2 \log F_j(x) < 0$

となる様に計画すれば，$m' > j$ なる j については，前記の選択過程の手順により簡便に最適解を求めることが出来るから，配分過程の全体の最適解は容易に求めることが出来る.

$s = n_j$ が最適解に，$W_m(n)$ が $f_{[\mathrm{II}]}(n)$ に当る.

参 考 文 献

直接参考にしたもののみ掲る.

1) R. Bellman; Dynamic Programming〔Princeton U. P.〕(1957)

2) G. Black & F. Proschan; On Optimal Redundancy〔J. O. R. S. A. vol. 7 No. 5〕(1959)

3) M. A. Geisler & H. W. Karr: The Design of Military Supply Table for Spare Parts〔J. O. R. S. A. vol. 4 p. 431〕(1956)

4) 三觜武; 簡易な予備品の配分計画〔「国鉄 OR」No. 17〕(1962)