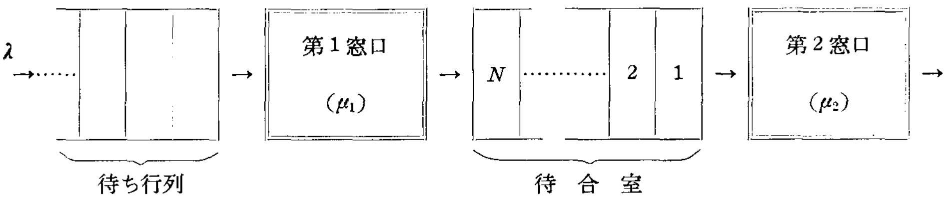
タンデム型待ち行列についての 2,3 の問題

牧 野 都 治*

1. システムの構造

到着した客は，第1窓口が空いているときには，直ちにサービスをうけるが，窓口がふさがっている場合には，第1窓口の前で行列を作って待ち，窓口が空き次第，先着順にサービスをうけるものとする．この場合，第1窓口の前には無限長の行列が許されるものとする．



第1図

第1窓口でのサービスが終了した客は，引続き第2窓口でのサービスをうけるが，もし第2窓口がふさがっていれば，その窓口の前（待合室と呼ぶことにする）で行列を作る．ただしこの場合，許される行列の人数は N 人までとする．従って，$(N+1)$ 番目にあたる客は，第1窓口でのサービスが終っても，依然として第1窓口を占有していなければならない．この状態を，第1窓口が“ブロック”されているという．

第1窓口への客の到着は，到着率 λ のポアッソン分布に従い，第1，第2窓口でのサービス時間は，それぞれサービス率 μ_1, μ_2 の指数分布に従うものとする．

この型の問題で，システムが定常であるための（必要）条件は，例えば G. C. Hunt[(1)]によって示されているが，ここではこれを異なる角度から眺め，結果についての或る種の考察を行ない，更に $N=1$ の場合における諸量の決定に重点を置いて議論することにする．

2. 一般的考察

第1図に示した構造を有するシステムでの定常条件を求めてみよう．（この結果については，既に知られているところであるが[(1)]，ここで扱う計算手順が重要なので，これをややくわしく述べておく必要がある．）

先ず，状態を次のように分類する．

---

* 高崎経済大学　昭和37年12月5日受理　「経営科学」第6巻4号

第1表 状態の分類

状態	行列の人数	第1窓口の状態	待合室人数	第2窓口の状態
(0, 0, 0)	0	0	0	0
(0, 0, 1)	0	0	0	1
(0, k, 1)	0	0	k	1
(0, N, 1)	0	0	N	1
(0, N, 2)	0	b	N	1
(n, 0, 0)	$n-1$	1	0	0
(n, 0, 1)	$n-1$	1	0	1
(n, k, 1)	$n-1$	1	k	1
(n, N, 1)	$n-1$	1	N	1
(n, N, 2)	n	b	N	1

$(1\leq k\leq N-1,\ 1\leq n)$

表の「窓口の状態」欄で，0，1，b とあるのは，それぞれ，窓口が空いている状態，サービス中の状態，ブロックされている状態を示すものである．

いま，時刻 t において，システムが状態 (n, r, s) にある確率を，$P_{n,r,s}(t)$ で表わすと，次の微分階差方程式が成り立つ．

$$
(1)\text{ 式}:\begin{cases}
P_{000}'(t)=\mu_2\cdot P_{001}(t)-\lambda\cdot P_{000}(t)\\
P_{001}'(t)=\mu_1\cdot P_{100}(t)+\mu_2\cdot P_{011}(t)-(\lambda+\mu_2)\cdot P_{001}(t)\\
P_{0'k1}(t)=\mu_1\cdot P_{1,k-1,1}(t)+\mu_2\cdot P_{0,k+1,1}(t)-(\lambda+\mu_2)\cdot P_{0,k,1}(t)\\
P_{0'N1}(t)=\mu_1\cdot P_{1,N-1,1}(t)+\mu_2\cdot P_{0,N,2}(t)-(\lambda+\mu_2)P_{0N1}(t)\\
P_{0'N2}(t)=\mu_1\cdot P_{1N1}(t)-(\lambda+\mu_2)\cdot P_{0N2}(t)
\end{cases}
$$

及び，$n\geq 1$ に対して，

$$
(2)\text{ 式}:\begin{cases}
P_{n',0,0}(t)=\lambda\cdot P_{n-1,0,0}(t)+\mu_2\cdot P_{n,0,1}(t)-(\lambda+\mu_1)P_{n,0,0}(t)\\
P_{n',0,1}(t)=\lambda\cdot P_{n-1,0,1}(t)+\mu_1\cdot P_{n+1,0,0}(t)+\mu_2\cdot P_{n,1,1}(t)-(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,0,1}(t)\\
P_{n',k,1}(t)=\lambda\cdot P_{n-1,k,1}(t)+\mu_1\cdot P_{n+1,k-1,1}(t)+\mu_2\cdot P_{n,k+1,1}(t)\\
\qquad -(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,k,1}(t)(1\leqq k\leqq N-1)\\
P_{n',N,1}(t)=\lambda\cdot P_{n-1,N,1}(t)+\mu_1\cdot P_{n+1,N-1,1}(t)+\mu_2\cdot P_{n,N,2}(t)-(\lambda+\mu_1+\mu_2)P_{n,N,1}(t)\\
P_{n,N',2}(t)=\lambda\cdot P_{n-1,N,2}(t)+\mu_1\cdot P_{n+1,N,1}(t)-(\lambda+\mu_2)\cdot P_{n,N,2}(t)
\end{cases}
$$

ここで，定常状態

$$
\lim_{t\to\infty} P_{n,r,s}(t)=P_{n,r,s}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,\ N)
$$

を考慮し，　　　　$(s=0,\ 1.\ 2)$

$$
\lambda/\mu_1=\rho,\ \mu_2/\mu_1=\gamma
$$

とおくと，次式が得られる.

$$
(3)\text{式}:\begin{cases}\gamma\cdot P_{001}-\rho\cdot P_{000}=0\\ P_{100}+\gamma\cdot P_{011}-(\gamma+\rho)P_{001}=0\\ P_{1,k-1,1}+\gamma\cdot P_{0,k+1,1}-(\gamma+\rho)P_{0,k,1}=0\\ P_{1,N-1,1}+\gamma\cdot P_{0,N,2}-(\gamma+\rho)P_{0,N,1}=0\\ P_{1,N,1}-(\gamma+\rho)\cdot P_{0,N,2}=0\end{cases}
$$

及び,

$$
(4)\text{式}:\begin{cases}\rho\cdot P_{n-1,0,0}+\gamma\cdot P_{n,0,1}-(1+\rho)P_{n,0,0}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,0,1}+P_{n+1,0,0}+\gamma\cdot P_{n,1,1}-(1+\gamma+\rho)P_{n,0,1}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,k,1}+P_{n+1,k-1,1}+\gamma\cdot P_{n,k+1,1}-(1+\gamma+\rho)\cdot P_{n,k,1}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,N,1}+P_{n+1,N-1,1}+\gamma\cdot P_{n,N,2}-(1+\gamma+\rho)\cdot P_{n,N,1}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,N,2}+P_{n+1,N,1}-(\gamma+\rho)P_{n,N,2}=0\end{cases}
$$

母関数

$$
\sum_{n=0}^{\infty}P_{n,r,s}z^{n+r+s}=F_{r,s}(z)
$$

を導入すると，(3) 及び (4) 式より,

$$
(5)\text{式}:\begin{cases}(1+\rho-\rho z)\cdot F_{00}(z)-(\gamma/z)\cdot F_{01}(z)=P_{000}\\ -F_{00}(z)+(1+\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{01}(z)-(\gamma/z)\cdot F_{11}(z)=P_{001}\cdot z-P_{000}\\ -F_{k-1,1}(z)+(1+\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{k,1}(z)-(\gamma/z)F_{k+1,1}(z)=P_{0,k,1}z^{k+1}-P_{0,k-1,1}z^{k}\\ -F_{N-1,1}(z)+(1+\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{N,1}(z)-(\gamma/z)\cdot F_{N,2}(z)=P_{0,N,1}z^{N+1}-P_{0,N-1,1}z^{N}\\ -F_{N,1}(z)+(\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{N,2}(z)=-P_{0,N,1}\cdot z^{N+1}\end{cases}
$$

が得られる.

これを解いて，$F_{r,s}(z)$ を求めればよいのであるが，便宜上

$$
F_{r,s}(z)=D_{r,s}{}^{(N+3)}/D^{(N+3)}
$$

と書くことにする.

ただし，分母の $D^{(N+3)}$ は,

(6) 式:

$$
D^{(N+3)}\equiv\begin{vmatrix}(1+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z\cdots0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots-1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z\\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & -1 & (\gamma+\rho-\rho z)\end{vmatrix}
$$

なる $(N+3)$ 次の行列式であり，また $D_{r,s}{}^{(N+3)}$ は，上の行列式で，第 $(r+s+1)$ 列を (5) 式

右辺の列ベクトルにより置きかえて得られる行列式である．

$D^{(N+3)}$の行列式で，$z=1$ とおいてみると，各列の和が何れも0となることから，$(1-z)$ で括り出せることがわかるので，この点に着目して，これを展開してみよう．

先ず，$D^{(N+3)}$ で，第 $(N+2)$ 行に第 $(N+3)$ 行を加えて，

$$D^{(N+3)}=\begin{vmatrix} (1+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z\cdots0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots-1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\dfrac{\gamma}{z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & -1 & (\gamma+\rho-\rho z) & (1-z)\left(\rho-\dfrac{\gamma}{z}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & -1 & (\gamma+\rho-\rho z) \end{vmatrix}$$

$(N+3)\times(N+3)$

を得る．

次に，これを第 $(N+3)$ 列について展開することにより，次式が導かれる．

$$D^{(N+3)}=(1-z)\left(\frac{\gamma}{z}-\rho\right)\cdot\varDelta^{(N-2)}+(\gamma+\rho-\rho z)\cdot D^{(N+2)}$$

但し，

$$D^{(N+2)},\ D^{(N+1)},\cdots\cdots,D^{(3)}$$

は，$D^{(N+3)}$ に準じて定義される行列式であって，特に

$$D^{(3)}=\begin{vmatrix} (1+\rho-\rho z) & -\dfrac{\gamma}{z} & 0 \\ -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\dfrac{\gamma}{z} \\ 0 & -1 & (\gamma+\rho-\rho z) \end{vmatrix}$$

$$=(1-z)\cdot\left\{(1+\gamma+\rho-\rho z)\left(\gamma\rho+\rho^2-\rho^2 z+\rho-\frac{\gamma}{z}\right)-\frac{\gamma\rho}{z}\right\}$$

であり，また $\varDelta^{(N+2)}$ は次式で定義される．

$$\varDelta^{(N+2)}=\begin{vmatrix} (1+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z\cdots0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\quad\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots-1\cdots & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots0\cdots\cdots\cdots & -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots\cdots0\cdots\cdots\cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$(N+2)\times(N+2)$

特に，

$$\varDelta^{(3)}=\begin{vmatrix} (1+\rho-\rho z) & -\gamma/z & 0 \\ -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\gamma/z \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

である.

従って,

（7）式: $D^{(N+3)}=(1-z)\left(\frac{\gamma}{z}-\rho\right)\cdot\left\{\sum_{i=0}^{N-1}(\gamma+\rho-\rho z)^i\varDelta^{(N+2-i)}\right\}+(\gamma+\rho-\rho z)^N\cdot D^{(3)}$

$$=(1-z)\cdot\left[\left(\frac{\gamma}{z}-\rho\right)\left\{\sum_{i=0}^{N-1}(\gamma+\rho-\rho z)^i\varDelta^{(N+2-i)}\right\}\right.$$

$$\left.+(\gamma+\rho-\rho z)^N\cdot\left\{(1+\gamma+\rho-\rho z)\left(\gamma\rho+\rho^2-\rho^2 z+\rho-\frac{\gamma}{z}\right)-\frac{\gamma\rho}{z}\right\}\right]$$

ここで,

$$[\varDelta^{(N+2-i)}]_{z=1}=-1 \qquad (i=0,\ 1,\cdots\cdots,N-1)$$

であることを用いて計算することにより，次式が得られる.

（8）式: $\left[\frac{D^{(N+3)}}{1-z}\right]_{z=1}=\rho(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+1}+\gamma^{N+2})-(\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+1}+\gamma^{N+2})$

一方，分子 $D_{r,s}^{(N+3)}$ も $(1-z)$ で括り出せることが，分母 $D^{(N+3)}$ の場合と同様に，明らかである.

そこで計算の便宜上,

（9）式: $F_{r,s}(z)=\{D_{r,s}^{(N+3)}/(1-z)\}/\{D^{(N+3)}/(1-z)\}$

としておくことにする.

この分母を0ならしめる ρ の値は,（8)式により,

$$\rho=(\gamma+\gamma^2\cdots\cdots+\gamma^{N+2})/(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})$$

であり，これを Hunt[1] にならって，$\rho_{\max}$ と書くことにする.

$\rho=\rho_{\max}$ のとき,（9）式分子は，$z=1$ に対して0とならない. *〔補遺①〕

よって，システムが定常であるためには,

$$\rho>(\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})/(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})$$

又は,

$$\rho<(\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})/(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})$$

の何れかでなければならないことが,

$$0<[F_{r,s}(z)]_{z=1}<\infty$$

であることからわかるが,

(10) 式: $\rho_{\max}=(\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})/(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})$

は，N についての単調増加関数であって,

$$\lim_{N\to\infty}\rho_{\max}=\begin{cases}1 & (\gamma\geq 1\ のとき)\\ \gamma & (\gamma<1\ のとき)\end{cases}$$

となり，一方，システムが定常であるためには，$\rho<\min[1,\gamma]$ であることが従来の議論により明らかである.

従ってシステムが定常であるためには,

$$\rho<(\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots+\gamma^{N+2})/(1+\gamma+\gamma^2+\cdots\cdots\gamma^{N+2})$$

でなければならないことがわかる.

ここで, (10) 式について多少の考察を行なってみよう.

先ず, (10) 式は, 与えられた γ の下では, N を大きくすることにより, システム内の平均人数を減少させ得るであろうことを示唆している. (――この点については, より具体的な議論を次節に示す.)

第2に, 次のようなことを考察してみよう.

或る種の加工工程では, 加工順序をどのように指示してもよいが, いったん順序が指示されたならば, これを変更することなしに作業を進めなければならないという場合がある. 即ち, 今の場合, サービス率 μ_1, μ_2 が交換可能の場合である.

このとき, どちらのサービスを先にもっていくのが得策であるかについて, 単に $\rho_{\max}$ の大小のみにより判定してみようとするならば,

$$\rho_{\max}(\gamma)=(\gamma+\gamma^2\cdots\cdots+\gamma^{N+2})/(1+\gamma+\gamma^2\cdots\cdots\gamma^{N+2})$$

より

$$\rho_{\max}(\gamma)=\gamma\cdot\rho_{\max}(1/\gamma)$$

となることから, 与えられた N の下で, $\rho_{\max}$ を大きくするには, サービス率の小さい方のサービスを第1窓口で行なうのがよいことがわかる.

このことは, 第1窓口がブロックされる程度を, 出来得る限り小さくした方がよいということを示していると解することができる.

3. $N=1$ の場合の諸量の算定

$N=1$, 即ち待合室人数が1人までしか許されない場合には, 前節の (3)~(5) 式に該当する式は, 次のように書かれる.

$$(11)\text{ 式}:\begin{cases}\gamma\cdot P_{001}-\rho\cdot P_{000}=0\\ P_{100}+\gamma\cdot P_{011}-(\gamma+\rho)P_{001}=0\\ P_{101}+\gamma\cdot P_{012}-(\gamma+\rho)P_{011}=0\\ P_{111}-(\gamma+\rho)P_{012}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,00}+\gamma P_{n01}-(1+\rho)P_{n00}=0 \qquad (n\geq 1)\\ \rho\cdot P_{n-1,01}+P_{n+1,00}+\gamma P_{n,1,1}-(1+\gamma+\rho)P_{n,01}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,1,1}+P_{n+1,0,1}+\gamma\cdot P_{n,1,2}-(1+\gamma+\rho)P_{n,1,1}=0\\ \rho\cdot P_{n-1,1,2}+P_{n+1,1,1}-(\gamma+\rho)\cdot P_{n,1,2}=0\end{cases}$$

及び,

$$(1+\rho-\rho z)\cdot F_{00}(z)-(\gamma/z)F_{01}(z)=P_{000}$$

$$
(12)\text{ 式}:\begin{cases}
-F_{00}(z)+(1+\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{01}(z)-(\gamma/z)F_{11}(z)=P_{001}\cdot z-P_{000}\\
-F_{01}(z)+(1+\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{11}(z)-(\gamma/z)F_{12}(z)=P_{011}\cdot z^2-P_{001}\cdot z\\
-F_{11}(z)+(\gamma+\rho-\rho z)\cdot F_{12}(z)=-P_{011}\cdot z^2
\end{cases}
$$

これより，次の一連の式が導かれる．

$$
(13)\text{ 式}:\begin{cases}
[D^{(4)}/1-z]_{z=1}=\gamma^3(\rho-1)+\gamma^2(\rho-1)+\gamma(\rho-1)+\rho\\
[d\{D^{(4)}/1-z\}/dz]_{z=1}=\gamma^3+\gamma^2(4\rho-3\rho^2)+\gamma(1+4\rho-4\rho^2)-3\rho^2
\end{cases}
$$

$$
(14)\text{ 式}:\begin{cases}
[D_{0,0}{}^{(4)}/1-z]_{z=1}=P_{000}\cdot\{(1+\gamma)\rho^2+\rho-(\gamma+\gamma^2+\gamma^3)\}+\gamma^2(\rho-\gamma)\cdot P_{011}\\
[d\{D_{0,0}{}^{(4)}/1-z\}/dz]_{z=1}=P_{000}\{\gamma^3+3\rho\gamma^2+(-\rho^2+4\rho+1)\gamma+(-2\rho^2-\rho^3)\}+\gamma^3\cdot P_{011}
\end{cases}
$$

$$
(15)\text{ 式}:\begin{cases}
[D_{0,1}{}^{(4)}/1-z]_{z=1}=P_{000}\cdot\left\{\left(\rho-\gamma\right)\left(\rho+\dfrac{\rho}{\gamma}\right)-\rho\gamma^2\right\}+\gamma(\rho-\gamma)P_{011}\\
[d\{D_{0,1}{}^{(4)}/1-z\}/dz]_{z=1}=P_{000}\left\{\gamma\left(3\rho^2-\rho\right)+\left(4\rho^2-\rho^3\right)+\dfrac{1}{\gamma}\left\{\rho^2-2\rho^3\right)\right\}\\
\qquad\qquad+\gamma(\rho-\rho^2+\rho\gamma)\cdot P_{011}
\end{cases}
$$

$$
(16)\text{ 式}:\begin{cases}
[D_{1,1}{}^{(4)}/1-z]_{z=1}=-\rho^2(\gamma+1)P_{000}+(-\gamma+\rho)\cdot P_{011}\\
[d\{D_{1,1}{}^{(4)}/1-z\}/dz]_{z=1}=P_{000}\left(-\rho^2\gamma+2\rho^3-\rho^2+\dfrac{\rho^3}{\gamma}\right)\\
\qquad\qquad+P_{011}\cdot\{\gamma^2(\rho-1)+\gamma(-\rho^2+3\rho-1)+2\rho(-\rho+1)\}
\end{cases}
$$

$$
(17)\text{ 式}:\begin{cases}
[D_{1,2}{}^{(4)}/1-z]_{z=1}=-\rho^2\left(\dfrac{1}{\gamma}+1\right)P_{000}+P_{011}\left\{\gamma^2(1-\rho)+\gamma(1-\rho)-\rho\right\}\\
[d\{D_{1,2}{}^{(4)}/1-z\}/dz]_{z=1}=P_{000}\left\{-\rho^2+\dfrac{1}{\gamma}\left(-\rho^2+\rho^3\right)\right\}\\
\qquad\qquad+P_{011}\{r^2(1-2\rho)+\gamma(2\rho^2-4\rho+1)+(2\rho^2-2\rho)\}
\end{cases}
$$

ここで平均出力数について考えてみよう．*〔補遺②〕

入力の平均値は λ であるので，定常状態を論ずる限り，出力の平均値も λ でなければならない．従って第2窓口が空いている確率は，$(1-\lambda/\mu_2)$ でなければならないと考えられる．

そこで，

$$F_{00}(1)=1-\lambda/\mu_2$$

とおけば，(13) 式及び (14) 式により，

$$P_{011}=[(\gamma^3+\gamma^2+\gamma)-(\gamma^3+\gamma^2+\gamma+1)\rho-P_{000}\cdot\{\gamma^3+(1+\rho)\gamma^2+(1+\rho)\gamma\}]/\gamma^3$$

が得られる．

一方，(13) 式～(17) 式，及び

$$[\sum_{r,s}F_{r,s}(z)]_{z=1}=1$$

を用いて P_{011} を求めると，上で得られた式と一致することがわかる．

かくして求められた P_{011} を (11) 式に代入することにより，所要の状態確率を遂次，P_{000} を用いて表わすことができるわけであるが，P_{000} そのものを求めることはできない．

然し，例えばシステム内の平均人数を知りたいというような場合には，次に述べる方法によって，或る程度実用的な解を求めることができる．

いま，焦点を第1窓口に移してみよう．

これが空であるか，使用中であるか，或いは又ブロックされているか，というようなことを頭に置きながら，試みに，

(18) 式： $P_{000}+P_{001}+P_{011}+\sum_{n=0}^{\infty}P_{n12}$

を計算してみると，

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_{n12}=F_{12}(1)$$

を用いることにより，(18) 式はちようど

$$1-\rho$$

になることがわかる．

そこで

(19) 式： $P_{000}+P_{001}<1-\rho$

及び

(20) 式： $P_{000}+P_{001}+P_{011}<1-\rho$

より

(21) 式： $\dfrac{\gamma^2(1-\rho)+\gamma(1-\rho)-\rho}{\gamma(\gamma+\rho+1)}<P_{000}<\dfrac{\gamma(1-\rho)}{\gamma+\rho}$

が得られる．

P_{000} の巾を更にせばめる必要があるならば，(20) 式左辺の和を増した式を付け加えて行けばよい．

つぎにシステム内の平均人数 L は，

$$L=\sum_{r,s}[dF_{r,s}(z)/dz]_{z=1}$$

で求められるので，(13) 式～(17) 式を用いて計算すれば，

(22) 式：$L=\dfrac{P_{000}\cdot\{\gamma^2(2\rho-1)+\gamma\rho(\rho+2)\}+\{-\rho\gamma^3+\gamma^2(3\rho^2-5\rho+1)+\gamma\rho(4\rho-5)+\rho(3\rho-1)\}}{\gamma^3(\rho-1)+\gamma^2(\rho-1)+\gamma(\rho-1)+\rho}$

となる．

4. 平均人数の比較

待合室を設けることが，$\rho_{\max}$ を増大させることになることは，(10) 式で明示されているが，これが例えばシステム内の平均人数の上にどのように反映するかを見るために，

$$N=1, \quad \gamma=1$$

の場合について検討してみよう.

いま，待合室人数が N 人まで許される場合の，システム内の平均人数を $L_{(N)}$ で示すことにして，

$$L_{(0)}\ L_{(1)},\ L_{(\infty)}$$

を比較してみよう.

$L_{(0)}$ 及び $L_{(\infty)}$ は次式で与えられることが知られている.

$$L_{(0)}=\frac{4\rho(2-\rho^2)}{(2+\rho)(2-3\rho)},\quad L_{(\infty)}=\frac{2\rho}{1-\rho}$$

問題は $L_{(1)}$ であるが，これは (22) 式より，

(23) 式： $L_{(1)}=\dfrac{P_{000}(\rho^2+4\rho-1)+(10\rho^2-12\rho+1)}{4\rho-3}$

となるので，P_{000} を知ることによって，容易に算出することができる.

P_{000} については，(21) 式より

$$\frac{2-3\rho}{2+\rho}<P_{000}<\frac{1-\rho}{1+\rho}$$

となるので，この関係をもとにして，ρ の値に対応する L を求めてみると，次表のようになる.

第2表 L の比較

ρ	$L_{(0)}$	$l_{(1)}'<L_{(1)}<l_{(1)}''$		$L_{(\infty)}$
		$l_{(1)}'$	$l_{(1)}''$	
0.0	0.000	0.000	**0.000**	0.000
0.1	0.223	0.222	**0.224**	0.222
0.2	0.509	0.501	**0.503**	0.500
0.3	0.906	0.858	**0.867**	0.857
0.4	1.533	1.339	**1.391**	1.333
0.5	2.800	2.083	**2.250**	2.000
0.6	7.569	3.600	**4.108**	3.000
(2/3)	∞	6.400	**7.667**	4.000
0.7	↓	10.479	12.500*	4.667
(3/4)	↓	∞	∞	6.000
0.8	↓	↓	↓	8.000
0.9	↓	↓	↓	18.000
1.0	∞	∞	∞	∞

表で，ゴチックの部分は，次のようにして求めた.

(23) 式の分子における P_{000} の係数が正になる範囲の ρ，即ち

$$\rho > -2-\sqrt{5}$$

に対しては

$$P_{000}=(2-3\rho)/(2+\rho)$$

を用い，負になる範囲の ρ に対しては，

$$P_{000}=(1-\rho)/(1+\rho)$$

お用いて $L_{(1)}$ を計算したものであり，又＊印は，$P_{000}=0$ のときの $L_{(1)}$ の値にほかならない.

$\rho_{\max}$ の意味からも既に予想されていることであるが，待合室を設けることの効果が，ρ の比較的大きな値に対して顕著にあらわれていることを表から汲みとることができる.

終りに，有益な御指導と助言を賜わった横浜市立大学本間博士，並に東京工大森村博士に感謝の意を表します.

＊ 補　遺 1

（9）式右辺の分子について考える.

$[D_{r,s}^{(N+3)}/1-z]_{z=1}$ が，$\rho=\rho_{\max}$ のとき0にならないことを確かめておきたい.

しかし，必要条件を問題にしているので，例えば，

$$\gamma=0, \qquad s=0$$

の場合について調べておくだけでよい.

いま，

$$\Delta_{0,0}{}^{(N+2)}=\begin{vmatrix} P_{000} & -\dfrac{\gamma}{z} & 0\cdots\cdots0 & 0 & 0 \\ P_{001}\cdot z-P_{000} & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\dfrac{\gamma}{z}\cdots\cdots0 & 0 & 0 \\ P_{011}\cdot z^2-P_{001}\cdot z & -1 & (1+\gamma+\rho-\rho z)\cdots0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{0,N-1,1}z^N-P_{0,N-2,1}z^{N-1} & 0 & 0\cdots\cdots-1 & (1+\gamma+\rho-\rho z) & -\dfrac{\gamma}{z} \\ -P_{0,N,1}\cdot z^{N+1} & 0 & 0\cdots\cdots0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{(N+2)\times(N+2)}$$

とおけば，（6）～（7）式で用いたのと同様の計算手順により，

$$\frac{D_{0,0}{}^{(N+3)}}{1-z}=\left(\frac{\gamma}{z}-\rho\right)\left[\sum_{i=0}^{N-1}(\gamma+\rho-\rho z)^i\cdot\Delta_{0,0}{}^{(N+2-i)}\right.$$
$$\left.+(\gamma+\rho-\rho z)^N\cdot\{-P_{000}-\gamma\cdot P_{001}-(\gamma+\rho-\rho z)\cdot P_{000}\}\right]$$

が導かれる.

然るに，$[\Delta_{0,0}{}^{(N+2-i)}]_{z=1}$ なる行列式は，どの要素も ρ を含まないから，

$$\left[\frac{D_{0,0}{}^{(N+3)}}{1-z}\right]_{z=1}=0$$

を満足する根は

$$\rho=\gamma$$

のみである．

よって

$$\rho=\rho_{\max}$$

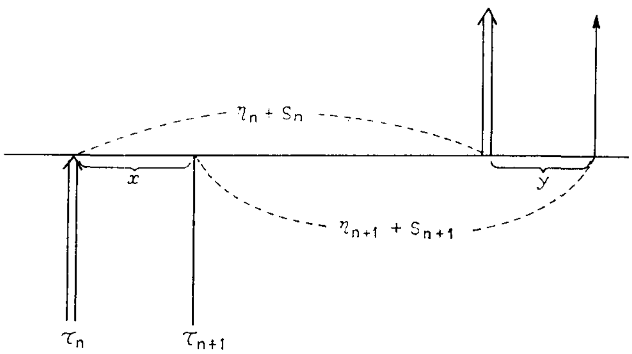
は，$[D_{0,0}{}^{(N+3)}/1-z]_{z=1}$ を0にしない．

＊ 補　遺 2

ここでは窓口2個のタンデム型の問題を扱っているが，定常状態における平均出力数は平均入力数と同じであることは，窓口が更に長く連っていても，窓口1個の場合での考察を基に全く同様の方法によって理解することができるので，いま窓口が1個の場合について，このことを調べてみよう．

n 番目の客の到着時刻を τ_n，待ち時間及びサービス時間をそれぞれ η_n, s_n とし，n 番目の客と $(n+1)$ 番目の客の到着時刻の差をx,立去る時刻の差を yとすれば，次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} y=(\tau_{n+1}+\eta_{n+1}+s_{n+1})-(\tau_n+\eta_n+s_n) \\ x=\tau_{n+1}-\tau_n \end{cases}$$



第2図 構造模型

即ち，
$$x+\eta_{n+1}+s_{n+1}=y+\eta_n+s_n$$

これらは何れも一定の分布を有するので，両辺の期待値をとることができるから，

$$E(x+\eta_{n+1}+s_{n+1})=E(y+\eta_n+s_n)$$

従って
$$E(x)+E(\eta_{n+1})+E(s_{n+1})=E(y)+E(\eta_n)+E(s_n)$$

定常状態を問題にしているので，

$$\begin{cases} E(\eta_{n+1})=E(\eta_n) \\ E(s_{n+1})=E(s_n) \end{cases}$$

よって，

$$E(x)=E(y)$$

かくして，到着時間間隔の期待値と，立去る時間間隔の期待値とは等しいことが云えた．このことは又，定常状態においては，平均入力数と平均出力数とが等しいということを示すものとして理解することができる．

文　献

[1] G. C. Hunt, "Sequential Arrays of Waiting Lines," JORSA (1956)

[2] P. M. Morse, "Queues, Inventories and Maintenance", John Wiley and Sons, New York (1958)

[3] P. D. Finch, "The Output Process of the Queueing System M/G/1," J. Roy. Stat. Soc. (1956)

[4] 鈴木, "Queues in Series" 数理科学綜合研究班第6班第25号 (1962)

文献抄録 (259 頁よりつづく)

Robichand, L. P. S., M. Boisvert and J. Robert : Signal Flow Graphs and Applications, *Prentice-Hall*, 1962, xiv +214 *pp.*

前号の書評欄に，Chow と Cassignol の本をフローグラフについての初めての本として紹介したが，これはそれと前後して出たカナダの Laval 大学の人達の研究である．

7章からなるうち，初めの2章は，フローグラフに関する基礎的事項，node の消去法など．Chow らの本で，フローグラフと計算機との関連が欲しいと評したが，本書では．デジタル計算機で代数的にフローグラフの消去を行うことに一章さいている．フローグラフは行列と対応するが，その行列の要素（すなわち branch の transmmitance）が実数値，複素数などの場合について，IBM 650 などを使って解いている．

さらに，アナログ計算機でのシミュレーションをするときに，フローグラフを仲立ちにすることにも一章さき，フローグラフとシステムの変数との間の関係をつけることに努力している．

アナコンとの関係については，同じ Prentice の電気工学シリーズの中の一冊 Warfield : Introduction to Electronic Analog Computers, 1959 も，Signal-Flow Graph という一章を設け，シミュレーションはフローグラフを使って説明している．

Robichand らは，電気回路，電気機械などに，Chow らよりも深くフローグラフを応用しているが，評者はそれらには疎いので評をさける．ただ，単なるグラフではなく，電流と電圧の node, source と sink などを別々にして複雑化したフローグラフにして使っていることを加えておく．（真鍋　龍太郎）