



第30回 “組合せ理論とOR”

—部会シリーズ(10)—

昭和47年7月7日

出席者 鈴木道夫(電力中研)・中 誠 (IBM)・伊井 勉(東京証券)・伊理正夫(東大)・高橋
 磐郎(早大)・高橋幸雄(東工大)・中沢良治(千代田化工)・古林 隆(埼玉大)
 司 会 森口繁一(東大)
 記録作成者 古林 隆

組合せ理論とは

A 組合せ理論は、大きく、(1) enumeration, (2) construction, (3) optimization に分かれると思います。enumeration は、高校で習う順列・組合せの拡張で、ある種の組合せの総数を求めることです。応用として、確率、統計力学などがあります。construction は、ある条件を満たす組合せをつくることで、実験計画法や coding や filing にできます。optimization は OR に一番関係がありますが、組合せに対する評価があらかじめ定められていて、一番よいものを見つける問題です、それぞれ関係があって、construction の問題でも、総数がわからないと困りますし、optimization のいろいろの手法を使って、解けることがあります。

固有値問題のほうがやさしい

B グラフの同型性という問題がありますが、たとえば、図1と図2は、頂点の番号をつけかえれば同じになりますから同型です、一般に、二つのグラフが同型であるかどうかを調べるときに、点対点接続行列の固有値を求めることにしました。固有値が

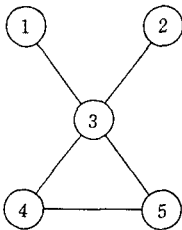


図 1

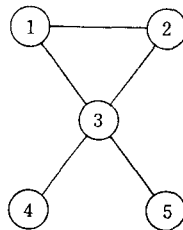


図 2

違えば、同型ではありませんが、固有値が同じで、同型でないこともあります。そのような場合は、固有ベクトルまで考えました。それでも、重根のときは困ります。

A 林知己夫さんの「数量化理論」も、 $n!$ 通り調べる問題を行列の問題にかきかえて、わりとうまい答をつくってしまう方法ですから、似ていますね。本来組合せ問題は、行列の固有値とまったく関係なさそうであるのに、それを使っているのはおもしろいですね。素人が考えるのと逆で、組合せ問題はむやみに時間がかかってどうしようもないが、固有値問題はピンッと解けるのでやさしいわけですね。

B この種の問題は、化学では分子の情報検索によくできてきます。

A 実験計画法の直交配列の線点図を計算機でつくりたいと思ったら、同型のものがいっぱいできて困りました。

わからない理論をわからせる

B 私は部会にでていますが、理論の話はわかりません。たとえば、ガロワ体ができますとだめです。もともと理論はある現象を解析する必要があって生まれたものですから、それを解くのに適した性質を持っているはず。この理論はどのような問題を解くためにつくられたかがわかれば、われわれ使用者側は問題の同型性を考えればいいんですが、理論がある段階まで進んでいて、その内部で話されるのでわかりません。

A 問題と結びつけて話してほしいというわけで

すね。もっとも理論は自分の力で発展することもできるし、生まれたときゴタゴタしていたのがあとですっきりすることや、別の応用と結びついて本質がでてくることがありますから、はじめの問題がよいかどうかわかりませんが、とにかくびったりした応用例に即して理論を解説してもらうのは一般によい学習方法ですね。

B 論文をみると、理論があってあとで例題がでてるのがよくありますが、あれは逆でほんとうは問題が先にあるべきです。

A 先ほどわからない例にガロワ体をあげられましたが、私は実験計画法の BIBD (balanced incomplete block design) をつくるのにガロワ体が非常に役にたつのを実例をもって説明してもらったので、ガロワ体も BIBD もよくわかりました。

組合せ問題を解くのは楽しい

B すべての組合せを落とさないように順々につっていくためのプログラムは、プログラム技術からいってもおもしろいですね。最近 PLANNER というプログラミング・システムが伝わってきています。理論的に tree 構造になっているものをしらみつぶしに調べていくのを、ふつうのプログラム言語でかけば長ったらしくなるので、もっと簡単にかいて、LISP 言語に落として処理します。要点は、やりそこなってもどってきて別の枝に移ることをいちいち書かなくても、これこれの条件を満たすものを調べて、それを満たすものがあればこうしろと書いておけば、自動的にもどってきて次に進むようにプログラムがつくれるんです。

A 発見的プログラムにも関係ありますね。

B まともにとやると時間がかかって仕方がないような大きい問題を解くときに、相当よい指針になるものに、branch-and-bound method があります。ある交通問題を解くときに経験したことがあります。小さい問題をしらみつぶし法で解くときの時間を調べておいて、大きな問題になると、どれくらい時間がかかるかを推定しておきます。その問題を branch-and-bound method で解くと、1/1000 以下の時間で済むことがわかりましたよ。

A 組合せ問題では、ほんの少し工夫をすると、ものすごい効果が現われることがありますから楽しいですね。小さな問題を解いただけで終わっているのは、ほんとうのおもしろさに到達していないといえます。

B branching とか bound を決めるのに、なんともいえないコツがありますね。

A 問題固有のものが多くでしょう。

B いくつか手がけていくと、コツがわかるんじゃないでしょうか。

大きい有限は無限よりむずかしい

A 組合せ理論の問題は、あらゆる場合を全部調べれば解けるように定式化されています。場合の数が無限ならば誰もはじめから全部調べようと思わない。そこで、近似的にどうしたらよいかを考えるので、かえってうまくいくんですが、有限だと調べてみる気になるのでだめなんです。

B 大きい有限は無限よりむずかしいわけですね。

A 問題の大きさを n で表わすときに、 $n \leq 4$ のときはつまらないし、 $n \geq 6$ のときは時間がかかって解けない。 $n=5$ のときが手頃ですというのがよくありますね。

B n が大きくなっておもしろくなると、とたんに解けなくなるんですね。

A 無限型の問題には、近傍すなわち似た問題が無限個あるので、非常に理想的に解ける問題が一つあると、その近傍にある無限個の問題が解けるんですが、組合せ問題は離散性をもっているために、一つの問題が解けても、その仲間がいないので、うまくいかないんですね。実際的な面からみて、いくつかの典型的な例を解いてみる必要がありますね。グラフ的なものについては、いくつかなされています。

本草学的解法

A 近似解を求める方法として、このようなのがあります。まず、解法をできるだけたくさん考えます。解法にパラメータがはいってれば、その値をいろいろ変えてたくさん解法がつくれるので、なおけっこうです。次に問題もたくさん用意します。それらを解いて、解法の成績をつけます。平均点とか最低点で評価して、パラメータを含むものは、一番よい値を与えることにします。

B 本草学に似てますね。いろんな病気に使ってみて、全体的によく効くののをこせばよい。

A 従来の解法は、近代医学に当たりますね。

B 実験的方法で多数の問題を解くのは重要なことです。うまくいった場合はそのままよいし、う

まくいかないほうは、どうしてうまくいかないかを調べてみて、そのようなタイプの問題に対して、うまくいく方法を考える。それでもだめなのは、どのような場合かを考えて、よい方法を見つける。このように、方法と問題群を組みあわせて、新しい知見を得るのがよいですね。

A このような方法だと、目的関数をはっきりしていなくてもうまくいく場合があります。いろいろ解をだして、現場の人に見せてよいといえば、それがよい解だということになりますし、それを出した解法がよかったということになります。

B 実際には、問題を解く人と実行の責任者は別ですから、いくつか対案をだしてその中から選ばせると人間関係がうまくいきます。そうしないと、人を含めた全体として最適になっていないことになります。

量から質へ

A 先日新聞に「量から質への数学——catastro-

phe theory」というのがでていましたが、質の問題、すなわち0から1へ急に変化する場合は実際によくあります。

B catastrophe で思いだすのに挫折現象とか共振現象があります。社会革命もそうだという人もいますが、世の中でおもしろい現象はみんなこの種のものではないでしょうか。

A 数学がいろんなものを定量化し、連続化する性質を多分に持っているのに対し、質の面をうんと強調するような考え方がでてきてもよいと思います。それが実際の発明や発見に役立つんじゃないでしょうか。

B 高校で習った数学の中で一番おもしろかったのは、作図問題の「吟味」ですが、すべての可能性を列挙して考えますから、まさに組合せ問題ですね。あのような考え方は発明・発見に役立つのに、ふつうの数学教育では軽視されているような気がします。ORでも質的考え方の指針を与えるべきです。組合せ理論にも本質的なかかわりがありますね。

第31回 “DP と 計算機”

——部会シリーズ(11)——

昭和47年9月8日

出席者 鳥海 進(三菱製紙)・浜 民夫(労働省)・藤井邦彦(荏原製作所)・岩村覚三(城西大学)・林 邦雄(マネージ・コンサルタント)・蔵野正美(千葉大)・小田中敏男(都立工科短大)・鍋島一郎(電通大)・有水 暉(農林省)・三髯 武(国鉄)・丸山茂子(慶大)・森口繁一(東大)

記録作成者 蔵野正美

M 手でDPの計算をしたときのお話をします。女性をあつめて、1日5~6時間、10日間かけて、DPの計算をやらせたのですが、まず女性の耐久力には驚かされました。どんなやっかいな計算でも女性をあつめてやれば、最少限できるということがわかりました(笑)。それと、やはり計算を多人数でやるということは、組織の問題で、トラブルが起これないように、個人を圧迫しないように、うまく組織していくこと、小規模ながら組織をうまく運営するということが、成功のためのキー・ポイントのように感じました。

G DPでは逐次的に計算していくことが多いわけですが、あるパターンでやっていけば、たいていの

ものは収束しますが、そのとき、誤差の評価をどうするか、あるいは、次元数が多くなりすぎるといような問題があるようです。それと期待値をもとめながらやっていく問題、たとえばポートフォリオの問題のように、前にたくわえてあるデータよりも、もっと多くのものが、確率的に、バラつくために、必要になることがあります。適当な多項式で外挿したり、線形外挿したりいたしました。

A そのために変なことが起こることはいですか？

G 変かどうかわからない。もっともらしい値は出てきますが、その証明ができない。

A もっともらしい結果が出ればいいのかもしれない

ませぬね。

L DPの数値計算をやるときは、できれば解析的な方法を少しやって、だいたいのところをおさえる。計算の結果がその辺に合っておれば、だいたいのよいのではないのでしょうか。

A そうですね。結果だけを信じるといってもこまるので、むしろ解析的、その他の考察でこれはもっともらしい、あるいは、これは変だといえるようであってほしい。

A 計算時間が長くなるために、途中打ち切りで、だめになるというとき、その自衛手段として何かよい方法はありますか。

M 部分的にあらくし、またある部分はこまかくするという方法があると思われます。

C 収束してしまってから出そうとすると、出力しないうちに打ち切られてしまって、なんにも出てこないということがあるわけです。そのときは、収束の途中でも結果を少し出しておけば、たすかります。このように中間情報を出力しておくということは、DP的計算ではたいせつなことです。

H DPで計算する場合には、計算時間がかかりすぎることもある。簡単なものでも時間がかかりすぎるようですか？

L 大型計算機では、そんなに時間がかからないみたいだ。

M いや、実は時間がかかるんですね。かからないようにするには、問題を設定する段階で工夫する必要がある。適当にちぢめて、メッシュをあらくして、非常に理実にあった解が出てくることもある。あまり念をいれると実行可能な解が出てこないこともあるし、DPの計算はひろげると急にお金がかかるものです。

紙のすき順の問題

T 製紙会社では紙のすき順の問題というものがある。いろんな銘柄や目方の紙をつぎつぎとすいていくわけだが、そのときどんな順序でやっていったらいちばんいいのかという問題です。従来は、目の子あるいは“勘”でその順序をきめていたのですが、電子計算機を使ってやれないだろうかと考えてみました。すき順において、目方があまりちがいがいと、紙が切れたり時間がかかったりする。また上質のものから先にすきたいし、さらに色のものはなるべくあとにしたい。色のものでも、濃いのはあとにしたいわけです。また仕上げの段階で、抄紙機とコ

ーター（塗工機）にかけることになりませんが、抄紙機は、厚い紙ほど速さが遅くなりますし、一方コーターはどんな紙でも同じスピードであるため、ヘタをするとこの間で原紙のストックがあふれて、たまりすぎることもあります。以上の因子に注意して、DPを使って、紙のすき順のよい方法を計算したのですが、10~20種類ときは、まあまあでしたが、30~40種類になるとお手あげでした。また、機械の間にたまり過ぎないという条件をもうけると、実行可能な解がなくなってしまいました。

B “勘”でやる方法が実行可能として出てくるように定式化しなおして、それよりも、いくらかでも良いものを見つけるというようにしたいと思います。このようなことは、一般に組合せ論的な問題についていえることですが。

DP と LP

H 静的な問題に時間 t がはいってれば、動的と考えるとよいのでしょうか？

A t でなくても n でもよく、何か一コのパラメータがはいっていて、 n のところが一つ少ないところのデータから勘定できるという種類の構造があれば、たいがいのものはDPにのせられる。

H 「計画法」というからには、何か計画みたいなものがあるって、最適政策をもとめるということになるのでしょうか？

A Bellman流のDPは、最初から最適政策をねらう。しかも最適性の原理というものがあるって、今日の政策は、明日以後のことを考えたうえで、最適をもとめようとするので、明日以後も同じような考えで、最適なことをやるべきであるということですよ。

J そのとき、システムにおいて、時間の流れのなかに、ある目標というものが設定されていて、その目標を得るために、どういう手を打ったらいいかといった問題になります。

H ところが、目標というものがわからない場合があります。たとえば、 n 年後の経済の目標はわからないし、いろいろな意味で立てにくい、コンセンサスを要します。もちろん文学的に表現できるが、これを数式で表現することはきわめてむずかしい。

A 労働行政の目標はなんですか。

H 週休2日制・労働時間短縮・定年延長などの労働者福祉の向上や、職業の確保などにより安定した経済社会に貢献することでしょうか。表現がむず

かしくて、たとえ表現できたとしても、一方がよければ、一方が悪いということになります。つまり、trade-offの問題があるわけです。

N その場合、重みをつけて考えるということも一つの方法ですね。重みのつけ方は問題ですが。

O 労働行政に限らず行政一般についていえることですが、規模が大きくなると、多目的で、ベクトルの、ある目的はこちらにむいて、ある目的はあちらに向いて、あるいは、180度ちがうかもしれない。しかしそれらを総合した目的として、fuzzyという概念をいれて、ぼけた目標にして、DPをやっつけようといういき方が考えられる。

H 次のような問題を例として考えてみてください。

$$X(t) = AX(t) + B[X(t+1) - X(t)] + \hat{D}_t$$

X : 生産ベクトル, A : 投入係数行列
 B : 資本係数ベクトル,
 \hat{D}_t : 最終需要ベクトル,
 $X_t = \alpha K_t^\alpha L_t^\beta$

として、 L は労働省が関与できる部分で、問題は、 $\sum_{t=0}^T X(t)$, あるいは、 $X(t)$ を最大にすることとしましょう。

L これは典型的なDPの問題で、bottleneck problemといわれるものです。

H このモデルは簡単に解けるのですか？ところで、実は、 A も B も現実の動きと対応させるならば、 A_t, B_t と記述すべきものですが、簡単に解けそうですか。

A いや、“簡単に”解けるということになるとうそになる。お金を十分につきこめば、解けると了解すべきです。

H 逆似的にやる方法は何かないでしょうか？

B この問題の A, B に t がはいってない場合でしたら、非線型なものを、線型化していったら、LPの問題にしてしまえば、簡単にいけます。DP屋さんは、なんでもお金がかかるようにする癖があります（なんだかDP屋さんをけなしているような話しぶりですが（笑））。DPの本をみると「どんな問題でもやれます」と書いているのは、少し悪質な客引きに似ていると思ってよい。これは、なんでもひきうけますが、しかしお金はうんとかかりますよということですよ。

H DPはLPを含んでいるのでしょうか。

C 問題の範囲としては、LPの問題は全部DP

であつかえるとDPの教科書に書いてあるかと思いますが、これは世をたぶらかしていることで、DPでやることはいいことだというのではけっしてない。LPでやれるところは、LPでやりなさい。LPでやれないところは、DP屋さんに相談しなさいというのが一つの教訓だと思う。何か反論がありますか。

M LPよりお金のかからない方法があると、なんだかLP屋さんにたのむなということになるみたいですね（笑）。なるべく多くの方法を知っていて、問題に応じて一番よい方法を選ぶということがいいですね。

企業の成長モデル

F 企業の成長モデルについて、turnpike propertyに相当するものがないかというようなことを以前調べてみたことがあります。企業の成長を総資産の増加と定義したとき、今後10年間に総資産を最大にするためには、どのようなものに投資していくのが最適であるのか、どんな軌跡をとればよいのかを問題にしたわけですが、その軌跡の評価がはつきりしませんでした。そこで、次善の策として（DPをあきらめて）、LPをつかって、(1)株主への配当を大きくするとどうなるか、(2)広告に力をいれるとどうなるか、(3)新製品をたくさん出すとどうなるか、といった個々の政策に対して、シミュレーションしてみたのです。そこで思うのですが、成長モデルを単にシミュレーションのみでなく、DPをつかって解析できないのでしょうか？

D turnpike problemはDPのbottleneckの問題とまったく同じもので、シミュレーションをつかって解を出し、DPで不足しているところをおぎなうというようにして、いろんなところからせめていかれるとよいと思います。

C 企業の成長モデルをDPの問題だと思ったところにまちがいがあった。LPでとりあつかうべきだと思う。10年か20年だったら変数が20~40ぐらいで、LPの問題でだいたい解ける。そうしたらこれがturnpikeだなということがすぐわかると思う。これをみてもDPにはいっていくと損をする（笑）という教訓がひき出せそうで、だからDP屋さんにはアイデアをもらい、あるいは、結果の解釈のときに、DP屋さんの考え方、見方をつかう。計算法については、DP屋さんのいうことを聞かないほうが、うまくいくことが多いのではないのでしょうか。

A ある問題では、LPでうまくいかないが、DP

でうまくいくということがいえると思う。企業の成長モデルを、需給関係を考えて formulate しなおせば、DP であつかえるのではないか。

森林および地下水の問題

A 15年くらい前、林業の中心問題である森林の取扱いを DP で定式化したことがありますが、外国でその後非常に盛んになり、とくにソ連では西暦 3000 年までの全国的な計画を DP を用いて、最適生長を目ざしています。

D 林業における問題は、いかにも DP 的問題で、3000 年後のわれわれの孫たちにどのような森林をのこすことができるかということの問題にして、現時点で最適な伐採計画、あるいは、植林計画を考えねばならない。これは、DP の formulation がびったりで、ほかの型では、問題そのものも記述することができない。

A 昔の林業の DP 問題を、さらに生態学として取り扱うことを考えて文献を調べましたら、最近は大変数係数の微分方程式系を中心とした制御理論として生態制御を考えようという動きが非常に活発になっています。

B 最近、地下水の資源開発および管理を在庫量管理の発展した型で定式化したいと考えて研究しておりますが、こうした局面にも DP の応用分野があります。さらに地下水の速度、地下水の貯溜量の客観的な測定方法に DP の準線型化の理論を中心とした強力な手法が考えられています。

DP の 将 来

N 巡回セールスマンの問題のように、DP で formulate されるものもありますが、多くのスケジューリングの問題は、関数方程式で formulate できない。このような組合せの問題の最適化というのは、どのように考えたらよいか。この場合、計算は前向きに進行するわけで、前段階などの最適な方法は、現段階では必ずしも最適とはかぎらない。したがって、少し前に進んで、最適にならない場合をおとしていくという方法をとるわけですが、そうすることによって、状態集合の変換の形として、多段決定問題と考えられる。この例でもわかるように、多段決定問題を最適性の原理のみだと formulate することができないことがあるわけで、そのときは、branch & bound、あるいは tree search の方法がつかわれますが、これらも広い意味で DP の一般化

として考えていきたい。

A branch & bound には、非常に魅力がありますね。ちょっとした工夫で計算時間を 1000 分の 1 に短縮できることもありますね。

I branch & bound は DP と感じが似ていて、それが使える場合には、むしろ、DP よりもいいように思われます。

O 在庫問題についてですが、観測量にある誤差がはいったとき、それが最適費用、最適政策にどのように影響するかという問題、また需要の分布が未知であるとか、adaptive にわかってくる場合とか、そんな問題について、情報と決定との関係で考察することが考えられます。

H 工場などで、部品加工の発注がランダムのため、工場の能力と負荷のバランスがくずれるということが起こります。そこでいかにして、平行にさせるかという問題がありますね。

J smoothing (平滑化) の問題でして、それは DP で一応とけるわけです。

C 在庫あるいは注文高の問題では、いつも注文する側の問題だけを論じていて、注文に応じる側のことは少しも論じてない。もっと柔軟性のある定式化が必要ですね。

DP 屋への注文

H DP の教科書は、suffix がうるさくて、すぐに読む意欲を失わせる。ユーザー側のことを考えて、DP をもっとやさしく勉強できるような本を書いてほしいですね。

A 昔、LP の本は必ず行列から始まって、行列アレルギーをもよおすといううらみがあったが、その後、ちがったスタイルの本が出て、たいへん読みやすくなった。DP をよく理解したうえで、従来の DP の教科書にとらわれない本が出るといいですね。

T OR の本は、一般に DP とか LP とか、方法順に列挙して解説しているのが多いですが、問題別にどんな方法があるかを解説した本がほしいですね。

C 『経営科学』誌に、うまい解がありませんかと、会員の誰もが、自由に問題を出せる。いわば、問題提起欄のようなものがあつたらいいですね。そうしたら、DP 屋さんは DP の問題として考えるでしょうし……。

M エレガントな解でなく、ガンコな解をもとめるといようにしたら！(笑)