

## 改訂非線型回帰法による平滑定数の決定について†

森 健 一\*  
小 池 俊 隆\*\*

### 1. はじめに

過去のデータにもとづく時系列予測の方法としては種々のものがある。それらの中で最も広く用いられているのは指数平滑法であろう。一般には多重指数平滑法により高次の平滑結果を得ることができる。しかし、季節性をとり扱うためには、なんらかの工夫が要求される。指数平滑法で乗法的な季節性を考慮した方法としては、Winters法とHadley法がよく知られている。これらは平滑定数をそれぞれ3個および2個としている。

ここではHadley法による平滑定数の最適推定法について論じる。これは、3定数のWinters法についても同様にあてはまる方法である。Brownによれば、最適の平滑定数は原系列に自己相関がある場合に存在することが示されている。この仮定は通常の需要時系列では成立している。また、季節性を考慮した指数平滑法では、定数と平滑値との関係は非線型であり、数学的にととのった形であらわせない。それで本論文では数値微分法をもちいた非線型最小自乗法によって最適推定をおこなうことにする。

### 2. 基礎となる予測方式

原時系列  $y_t$  のモデルとして、一般に加法的モデル  $S_t + P_t + I_t$  と乗法的モデル  $S_t P_t I_t$  が考えられている。ここに  $S_t, P_t, I_t$  はそれぞれ季節要素、傾向要素、不規則要素をあらわす。これら3要素のうちで不規則要素  $I_t$  は、通常予測が不可能な要素であり、したがって予測の対象よりはずしてよい。すなわち、加法的モデルでは  $E(I_t) = 0$ 、乗法的モデルでは  $E(I_t) = 1$  とおく。乗法的モデルでは、要素間の独立性より

$$E(y_t) = S_t P_t$$

となる。このとき、傾向とともに季節性も考慮に入れた平滑方式として、2平滑定数をもちいたつぎの方式 [2] がある。傾向は

---

† 1973年6月13日受理。

\* 大阪府立大学工学部経営工学科。

\*\* 大阪府立大学工学部大学院。

$$(1) \quad \begin{aligned} \bar{y}_t &= \alpha y_t / S_{t-L} + (1-\alpha) \bar{y}_{t-1} \\ R_t &= \alpha (\bar{y}_t - \bar{y}_{t-1}) + (1-\alpha) R_{t-1} \end{aligned}$$

により平滑される。一方季節性は

$$(2) \quad \begin{aligned} S_t &= \beta y_t / P_t + (1-\beta) S_{t-L} \\ P_t &= \bar{y}_{t-1} + R_{t-1} [1 + (1-\alpha)/\alpha] \end{aligned}$$

により平滑される。このとき  $T$  期先の傾向要素の予測値  $P_{t+T}$  は

$$P_{t+T} = \bar{y}_t + R_t [T + (1-\alpha)/\alpha]$$

と求められる。したがって、原点を  $t$  にした  $T$  期先の予測値  $\hat{y}_t(T)$  は

$$(3) \quad \hat{y}_t(T) = S_{t+T-iL} \cdot P_{t+T}$$

と求められる。ここに  $S$  の添字の  $i$  は  $t+T-iL > 0$  となる最大の整数値である。また、 $L$  は 1 周期の長さをあらわすものとする。 $S_t$ ,  $R_t$  の初期値は予備データにより求められる(付)。

同様の考えで、Winters の方法 [4] では 3 平滑定数により、つぎのように季節、傾向の平滑値が求められる。

$$(4) \quad \begin{aligned} \bar{y}_t &= \alpha y_t / S_{t-L} + (1-\alpha) (\bar{y}_{t-1} + R_{t-1}) \\ S_t &= \beta y_t / \bar{y}_t + (1-\beta) S_{t-L} \\ R_t &= \gamma (\bar{y}_t - \bar{y}_{t-1}) + (1-\gamma) R_{t-1} \end{aligned}$$

このとき  $T$  期先の予測値は

$$(5) \quad \bar{y}_t(T) = (\bar{y}_t + TR_t) \cdot S_{t+T-iL}$$

として求められる。(5)式で  $S$  の添字の  $i$  は(3)式での  $i$  と同様にして求められる。

### 3. パラメータの決定

(3)式または(5)式で求められた予測値  $\hat{y}_t(T)$  の予測誤差を

$$(6) \quad G_{t+T} = y_{t+T} - \hat{y}_t(T)$$

とし、この期待値を

$$(7) \quad E(G_{t+T}) = 0$$

とする。さらに自乗誤差の期待値を

$$(8) \quad E(y_{t+T} - \hat{y}_t(T))^2 = \sigma^2$$

とする。このとき(8)式の推定値は、データ数を  $N$  とすれば

$$V = \sum_{t=1}^{N-T} G_{t+T}^2 / (N-T)$$

となる。したがって、予測パラメータ推定の問題は、誤差自乗和

$$(9) \quad D = \sum_{t=1}^{N-T} G_{t+T}^2$$

を最小にするパラメータ値を求めることに帰着される。

さて、(9)式の最小化の問題を最小自乗法により解くために、この問題をもう少し一般化しよ

う.  $D$  をパラメータの関数とみて

$$(10) \quad D(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N'} f^2(y_i; \boldsymbol{\theta})$$

とおく. ここに  $f(y_i; \boldsymbol{\theta})$  は, 観測値  $y_1, \dots, y_{i-1}$  とリードタイム  $T$ , パラメータ  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  を与えた場合の  $y_i$  についての関数である. これは

$$f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = f(y_i; \boldsymbol{\theta}, y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, T)$$

と書ける. (9)式は

$$f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = G_{i+T}$$

とおいた場合である. ところで問題はデータ  $y_1, \dots, y_N$  を与えた場合に  $D(\boldsymbol{\theta})$  を最小にする  $\boldsymbol{\theta}$  を求めることになる. 関数  $f(y_i; \boldsymbol{\theta})$  をパラメータ値  $\boldsymbol{\theta}^0$  の近傍で Taylor 展開すれば

$$(11) \quad f(y_i; \boldsymbol{\theta}) = f(y_i; \boldsymbol{\theta}^0) + \text{grad } f^0 \boldsymbol{\delta} + 0(\|\boldsymbol{\delta}\|^2)$$

をうる. ここに  $\boldsymbol{\delta}, \text{grad } f^0$  は, それぞれ

$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p)'$$

$$\text{grad } f^0 = (\delta f(y_i; \boldsymbol{\theta}) / \delta \theta_i) |_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0}$$

なる  $(p \times 1)$ ,  $(1 \times p)$  行列である. (11)式で  $0(\|\boldsymbol{\delta}\|^2)$  を微小項として無視すると  $\boldsymbol{\delta}$  に関する一次式が得られる. よって(10)式を最小にする  $\boldsymbol{\delta}$  を逐次に最小自乗法により求めていけばよいことになる. 微係数  $\delta f(\boldsymbol{y}_i; \boldsymbol{\theta}^0) / \delta \theta_i$  は, 数値微分法により

$$(12) \quad \delta f(\boldsymbol{y}_i; \boldsymbol{\theta}^0) / \delta \theta_j \simeq (1/2h) \{f(y_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j+h, \dots, \theta_p) - f(y_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j-h, \dots, \theta_p)\}$$

または

$$\simeq (1/h) \{f(y_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j+h, \dots, \theta_p) - f(y_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j, \dots, \theta_p)\}$$

と求められる.

いま, 第  $i$  回目のくり返しの  $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}$  の値を  $\boldsymbol{\theta}^i, \boldsymbol{\delta}^i$  とすれば, その正規方程式は

$$(13) \quad (\mathbf{Z}^i)' \mathbf{Z}^i \boldsymbol{\delta}^i = -\mathbf{Z}^i' \mathbf{A}^i$$

となる. ここに  $\mathbf{Z}^i, \mathbf{A}^i$  は, それぞれ

$$\mathbf{Z}^i = \begin{pmatrix} \text{grad } f(y_1 | \boldsymbol{\theta}^i) \\ \vdots \\ \text{grad } f(y_N | \boldsymbol{\theta}^i) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} f(y_1 | \boldsymbol{\theta}^i) \\ \vdots \\ f(y_N | \boldsymbol{\theta}^i) \end{pmatrix}$$

なる  $(N \times p)$ ,  $(N \times 1)$  行列である. このとき得られた  $\boldsymbol{\delta}$  は最適解の方向を示すものであるが, (11)式での線型近似の結果, そのノルムは必ずしも正しくはない. したがって, その距離を求めるためにつぎの方法をもちいる. まず  $v$  を探索方向への探索距離として

$$(14) \quad D(\boldsymbol{\theta}^i + v \boldsymbol{\delta}^i)$$

を最小にするような  $v = v^*$  を計算する. この値から

$$\boldsymbol{\theta}^{i+1} = \boldsymbol{\theta}^i + v^* \boldsymbol{\delta}^i$$

とするわけである.

この  $v^*$  を求めるアルゴリズムとしてはつぎのようなものが考えられる. ただし, 誤差自乗和の作る曲面が2次曲面となっていることを前提する.

(I)  $D(\theta^i) \leq D(\theta^i + \delta^i)$  の場合

i)  $h_j = 2^{-j}$  として

$$(15) \quad D(\theta^i) \geq D(\theta^i + 2h_j \delta^i) < D(\theta^i + h_j \delta^i)$$

になるまで  $h_j$  を求めていく ( $j=1, 2, 3, \dots$ ).

ii) (15)式が成立したところで  $D_3 = D(\theta^i + 3h_j \delta^i)$  を求める.

iii)  $D_2 = D(\theta^i + 2h_j \delta^i)$  と  $D_3$  を比較して

$$D_2 \leq D_3 \text{ ならば } v_1 = h_j, v_2 = 2h_j (=h_{j-1}), v_3 = 3h_j$$

$$D_2 > D_3 \text{ ならば } v_1 = 2h_j, v_2 = 3h_j, v_3 = 4h_j (=h_{j-2})$$

として等間隔 2 次補間をとる (III)へいく).

iv) i) で  $h_j \leq \varepsilon$  (微小数) になっても (15)式が成立しなければ  $\theta^i$  を最適値とする. この場合にアルゴリズムは完了する.

(II)  $D(\theta^i) > D(\theta^i + \delta^i)$  の場合

i)  $h_j = (1-2^{-j})$  として

$$(16) \quad D(\theta^i + \delta^i) \geq D(\theta^i + h_{j-1} \delta^i) < D(\theta^i + h_j \delta^i)$$

になるまで  $h_j$  を求めていく ( $j=1, 2, 3, \dots$ ).

ii) (16)式が成立したところで  $D_3 = D(\theta^i + \overline{1-3 \cdot 2^{-j}} \delta^i)$  を求める.

iii)  $D_2 = D(\theta^i + h_{j-1} \delta^i)$  と  $D_3$  を比較して

$$D_2 \leq D_3 \text{ ならば } v_1 = 1-3 \cdot 2^{-j}, v_2 = 1-2 \cdot 2^{-j}, v_3 = 1-2^{-j}$$

$$D_2 > D_3 \text{ ならば } v_1 = 1-4 \cdot 2^{-j}, v_2 = 1-3 \cdot 2^{-j}, v_3 = 1-2 \cdot 2^{-j}$$

として等間隔 2 次補間をとる (III)へいく).

iv) i) で  $|h_j - 1| \leq \varepsilon$  になっても (16)式が成立しなければ  $\theta^i + \delta^i$  がつぎのパラメータ値となる ( $v^* = 0$ ).

(III) 等間隔 2 次補間

$v_1, v_2, v_3$  が等間隔  $d$  でならば, その対応する関数値が  $D_1, D_2, D_3$  であるとすれば最小点の値は

$$(17) \quad v_4 = v_2 - (d/2) \cdot ((D_3 - D_1) / (D_3 - 2D_2 + D_1))$$

により求められる. 最小値はさらに  $D_2$  と  $D(\theta^i + v_4 \delta^i)$  の小さいほうにとられ, その  $v$  の値が  $v^*$  となる.

#### 4. 2 平滑定数での定数推定

データ  $y_t$  による時刻  $t$ , リードタイム  $T$  での予測誤差は  $\theta = (\alpha, \beta)$  として

$$(18) \quad f(y_t; \theta) = G_{t+T} = G(y_t; \alpha, \beta, y_{t-1}, T) = G(y_t)$$

と書ける. このとき, (18)式の  $\alpha$  による微分は(19)式より

$$(19) \quad \begin{aligned} \delta G_{t+T} / \delta \alpha &\simeq (1/h) \{G(y_t; \alpha + h, \beta, y_{t-1}, T) - G(y_t; \alpha, \beta, y_{t-1}, T)\} \\ &= (1/h) \Delta_\alpha G(y_t; \alpha, \beta, T, y_{t-1}) \\ &= (1/h) \Delta_\alpha G(y_t) \end{aligned}$$

となる.  $\partial G_{i+T}/\partial \beta$  も同様に定義できる. いま正規方程式(19)式で

$$Z = 1/h \begin{pmatrix} \Delta_\alpha G(y_1) & \Delta_\beta G(y_1) \\ \vdots & \vdots \\ \Delta_\alpha G(y_{N-T}) & \Delta_\beta G(y_{N-T}) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} G(y_1) \\ \vdots \\ G(y_{N-T}) \end{pmatrix}$$

としうる. よって

$$Z' Z = 1/h^2 \begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \quad Z' A = 1/h \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

となる. ここに

$$A = \sum_{t=1}^{N-T} (\Delta_\alpha G(y_t))^2, \quad B = \sum_{t=1}^{N-T} (\Delta_\beta G(y_t))^2, \quad C = \sum_{t=1}^{N-T} (\Delta_\alpha G(y_t) \cdot \Delta_\beta G(y_t)),$$

$$D = \sum_{t=1}^{N-T} \Delta_\alpha G(y_t) \cdot G(y_t), \quad E = \sum_{t=1}^{N-T} \Delta_\beta G(y_t) \cdot G(y_t)$$

である.  $\delta_1, \delta_2$  は

$$(20) \quad \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = (h/(AB-C^2)) \cdot \begin{pmatrix} CE-DB \\ CD-AE \end{pmatrix}$$

で与えられる.

逐次最小自乗法による解の収束は,  $\theta^i$  と  $\theta^{i+1}$  の関係により求められる. すなわち

$$|\theta^{i+1} - \theta^i| = |v^* \delta^i| < \varepsilon$$

であればアルゴリズムは完了する. ここに  $\varepsilon$  はあらかじめ与えられた微小数である. 探索アルゴリズムの(2)-iv) がこれに相当する. また(8)式の  $i$  番目と  $i+1$  番目の値について

$$|D_1^{i+1} - D_1^i| < \varepsilon$$

によって判定することもできる.

## 5. 数値計算例

以上にのべたアルゴリズムをもちいて2種類の実際のデータについて計算をおこなった. データのうち一つは表1のデータAで, ある品物の月々の需要量である. これは Hadley [2] により季節性のあるデータとして使用されている. もう一つのデータは表2のデータBで, 月々の航空旅客数である. これは Box-Jenkins [1] による季節性のみられるデータである.

表1 データ A

年 \ 月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	57.7	49.7	46.7	45.0	47.0	45.1	49.7	59.6	56.6	65.6	69.8	68.1
2	67.0	55.0	52.3	43.7	47.1	47.4	50.6	62.2	59.3	68.0	73.2	64.5
3	69.1	53.2	45.6	44.1	50.6	45.2	54.2	63.4	57.9	75.0	75.1	77.3
4	70.3	56.5	55.5	48.6	45.7	48.2	59.9	70.9	67.7	78.0	77.6	72.6
5	61.0	59.0	52.8	48.7	46.8	55.4	55.8	69.3	70.7	80.0	85.0	72.0
6	66.8	58.9	56.7	47.9	55.7	56.3	57.7	72.0	70.0	85.0	90.0	76.0

表2 データ B

年 \ 月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	112	118	132	129	121	135	148	148	136	119	104	118
2	115	126	141	135	125	149	170	170	158	133	114	140
3	145	150	178	163	172	178	199	199	184	162	146	166
4	171	180	193	181	183	218	230	242	209	191	172	194
5	196	196	236	235	229	243	264	272	237	211	180	201
6	204	188	235	227	234	264	302	293	259	229	203	229
7	242	233	267	269	270	315	364	347	312	274	237	278
8	284	277	317	313	318	374	413	405	355	306	271	306
9	315	301	356	348	355	422	465	467	404	347	305	336
10	340	318	362	348	363	435	491	505	404	359	310	337
11	360	342	406	396	420	472	548	559	463	407	362	405
12	417	391	419	461	472	535	622	606	508	461	390	432

これらのデータに一組の平滑定数を与えて2平滑定数による予測をおこなうと、その平滑定数に対する誤差2乗和

$$D = \sum_{t=1}^{N-T} G_t^2 = \sum_{t=1}^{N-T} (y_{t+T} - \hat{y}_t(T))^2$$

が得られる。いくつかの平滑定数の組についてこの計算をおこなうと、それぞれの平滑定数に対応する誤差2乗和が求まる。これらの値から、誤差2乗和のつくる曲面のだいたいの形を知ることができる。

さて、表1のデータAについて誤差2乗和の計算をおこない、その曲面の形を求めた。その結果をたて軸に $\alpha$ 、横軸に $\beta$ をとって図1・データAの誤差2乗和の等高線図に示す。ただし、

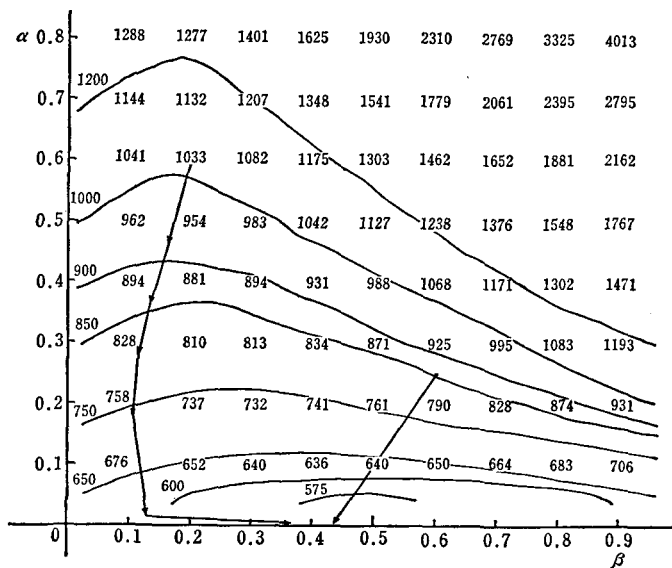


図1 データAの誤差2乗和の等高線図

ここにのべるすべての予測値の計算についてリードタイム  $T$  は1としておく。図1で、各 $\alpha, \beta$ の値の交点に記入してある数値は、その点の $\alpha, \beta$ の値に対応する誤差2乗和である。ここでの予測値の計算には最初の3年間のデータを予備データとした。よって、誤差2乗和の値は、この予備データを除いた残りのデータについて計算した。

表1のデータAに対して、いくつかの $\alpha, \beta$ の初期値を

表 3

初 期 値			計 算 ス テ ッ プ 数	最 終 値		
$\alpha$	$\beta$	誤差 2 乗和		$\alpha$	$\beta$	誤差 2 乗和
0.05	0.30	585	2	0.001	0.395	522
0.10	0.40	636	2	0.001	0.387	522
0.15	0.55	711	2	0.001	0.501	519
0.20	0.20	736	3	0.001	0.383	523
0.20	0.60	789	3	0.001	0.511	519
0.25	0.60	856	2	0.001	0.435	520
0.40	0.30	894	5	0.001	0.367	524
0.60	0.10	1041	7	0.001	0.362	525

定め、ここでのべた改訂非線型回帰法を適用した。これらの結果のうちの一例を表3に示す。この表には $\alpha, \beta$ の初期値と計算のステップ数、そして最終的に得られた平滑定数 $\alpha, \beta$ の値とそれに対応する誤差2乗和を示しておいた。ここで、計算のステップ数とは、平滑定数 $\alpha, \beta$ を $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ により修正していくのに要した $\delta$ の計算回数をいう。 $\delta = 0$ になれば計算は終了する。たとえば、初期値を( $\alpha = 0.25, \beta = 0.60$ )に選ぶと、2回目に $\delta$ を計算すれば0になる。よって、計算のステップ数は2となる。ただし平滑定数 $\alpha, \beta$ の移動は、実際には1回だけしかおこなわれていない。

表3によると、どの初期値から出発しても、最終的に得られた平滑定数は( $\alpha = 0.001, \beta = 0.4$ )くらいで、誤差2乗和は約520となっている。初期値を( $\alpha = 0.25, \beta = 0.6$ )と( $\alpha = 0.6, \beta = 0.2$ )に選んだときの最終点に至るようすが図1に示されている。データAについては、どの初期値から出発しても $\alpha$ は最終的には0.001になってくる。これは、このデータでは図1の等高線図からわかるように、 $\alpha$ の値が小さいほど誤差2乗和が小さくなるからである。むしろ平滑定数は正でなければならず、コンピュータによる計算の便宜上その下限を0.001と設定した。データA

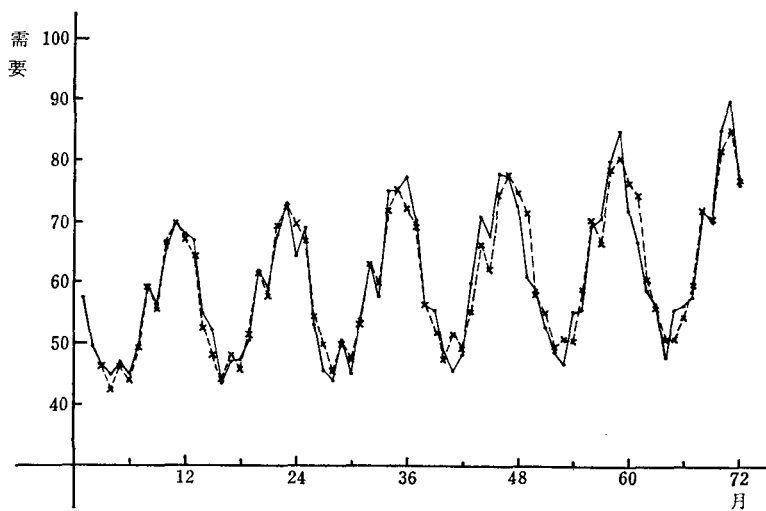


図2 データAの需要予測曲線  
—— データ, - - - - 予測

の誤差 2 乗和は、非常に滑らかな曲面になっているので、どの初期値からでも最小点に到達する。しかし、初期値が最小点から離れるほど計算のステップ数は多くなる傾向がある。最終的に得られた平滑定数（最適値）による予測の一例を図 2 に示す。この場合の初期値は ( $\alpha=0.25, \beta=0.60$ ) で、2 ステップで最小点に到達した。

つぎに、表 2 のデータ B では図 3 に示すような誤差 2 乗和の等高線図が得られた。表 4 に  $\alpha, \beta$  の初期値とそれに対する計算のステップ数、 $\alpha, \beta$  の最終値の一例が示されている。この表

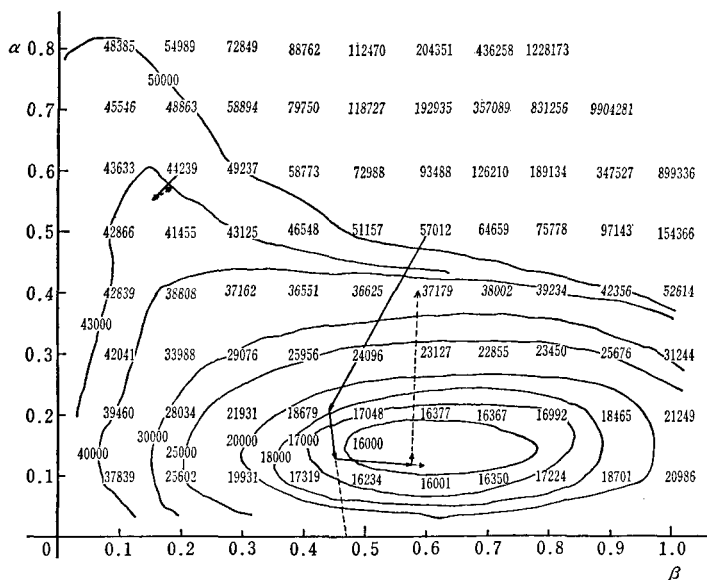


図 3 データ B の誤差 2 乗和の等高線図

表 4

初 期 値	計 算	最 終 値	誤差 2 乗和			
			$\alpha$	$\beta$	誤差 2 乗和	
$\alpha$	$\beta$	誤差 2 乗和	ステップ数	$\alpha$	$\beta$	誤差 2 乗和
0.05	0.30	24120	10	0.140	0.586	15510
0.10	0.20	25602	10	0.140	0.579	15515
0.15	0.55	15616	6	0.140	0.583	15511
0.20	0.20	28034	11	0.140	0.589	15508
0.30	0.20	33988	9	0.140	0.582	15512
0.50	0.60	57012	8	0.140	0.576	15519
0.60	0.20	44239	2	0.552	0.155	42372
0.60	0.40	58773	14	0.140	0.587	15509

で、( $\alpha=0.6, \beta=0.2$ ) 以外の初期値からはすべて最小点に到達している。しかし、( $\alpha=0.6, \beta=0.2$ ) からはこの最小点には至っていない。このときは ( $\alpha=0.55, \beta=0.15$ ) くらいの点でストップしてしまう。そこで、この点の付近での誤差 2 乗和の曲面の断面を求めてみた。図 4 にこの曲面の  $\beta$  軸についての断面図を示す。この断面図からあきらかなように、この誤差 2 乗和の曲面には、 $\alpha$  の値が比較的大きくて  $\beta$  の値が小さいところに局部的最小値（みかけの谷）が存在する。



初期値を ( $\alpha=0.6, \beta=0.2$ ) にした場合, この値に収束してしまい, 真の最小点に至ることができ

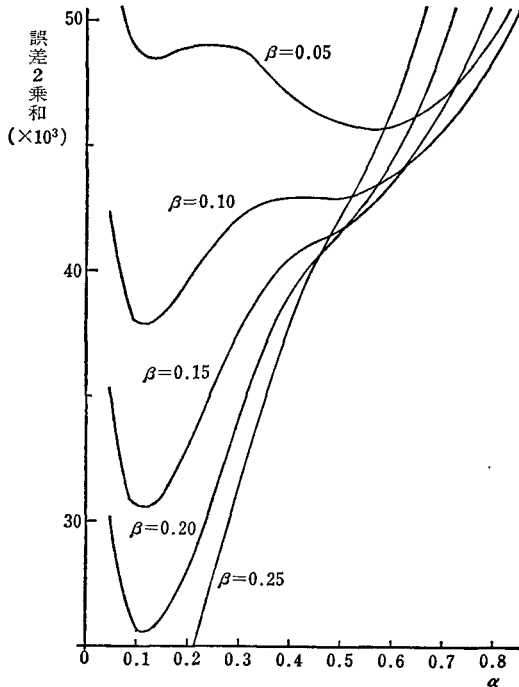


図4 データBの誤差2乗和のB軸についての断面図

なかつた. この付近の初期値についてさらに計算した結果, 初期値として  $\alpha$  を 0.55~0.65 くらいにし, さらに  $\beta$  を 0.05~0.35 くらいの範囲からえらんだ場合にこの値に収束してしまうことがわかった. 初期値がこの組み合わせ以外の場合にはすべて最小点に至る. 初期値を ( $\alpha=0.5, \beta=0.6$ ) と ( $\alpha=0.6, \beta=0.2$ ) にしたときの移動のようすを図3に示した. この図で, 破線は(1)式から求められた  $\delta$  の値を表わす. その  $\delta$  が1次元探索によって実線のように修正され移動がおこなわれる. 初期値が ( $\alpha=0.6, \beta=0.5$ ) のとき最終的に得られた平滑定数による予測の結果を図5に示す.

実際に本論文でのべた方法による場合, いまのデータBのようにみかけの谷が存在するかもしれないので, いくつかの初期値を選んで計算する必要がある.

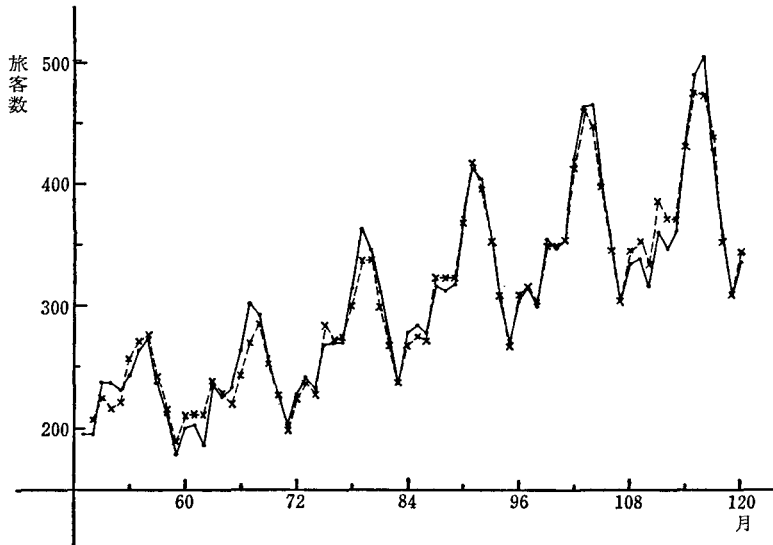


図5 データBの需要予測曲線

—— データ, - - - - 予測

## 6. 結 言

従来、指数平滑法の平滑定数の決定は経験的になされていた。しかし、時系列が与えられた場合に、予測式の平滑定数には最適値が存在すると考えられる。ここでは、判定基準として予測誤差自乗和  $D$  を最小化する方法をとった。

ここにもちいた予測方法では、平滑定数と  $D$  の関係は非線型となる。さらに、平滑定数による  $D$  の微分型は数学的に閉じた型で求めることができない。よって、数値微分にたよらざるをえない。一般に数値微分の値は引数の増加量  $\Delta x$  が小さくなるにつれて不安定になる。その点に対する不安があるが、ここで求めた数値例ではそのような事態は生じていない。よって、平滑定数についての数値微分は、ここでの予測法をもちいる限りうまく求まるといえる。

数値例のところで述べたように、非線型回帰では、部分解  $\delta$  をそのままもちいた場合には収束解が得られなかった。しかし、ここで提案した改訂非線型回帰法によれば、種々の初期値に対して収束解が得られることを示した。また、停留点の一つとは限らない場合には、どの初期値より出発すれば、どの点に収束するかは一般にわからない。したがって、種々の初期値についてその収束値を求め、得られた誤差自乗和の値を比較する方法をとらねばならない。一般に、時系列データでは停留点は2～3個ぐらいまでであろうと思われる。この点を解明するためには、最初に応答曲面図を作成するのが有効である。

おわりにのぞみ、本研究に対し種々のご指導をいただいた当教室の加瀬滋男教授ならびに適切な指摘をいただいたレフェリーに厚く謝意を表するしだいである。

### (付) 各要素の初期値の求め方 [2]

$R_i, S_i$  の初期値は以下のようにして求められる。ここで、新しい変数

$H$ : 初期値を求めるための予備データ数

$Y_i$ : 第  $i$  周期の総需要

$\lambda_i = Y_{i+1} - Y_i (i=1, \dots, ((H/L)-1))$ : 第  $i$  周期から第  $i+1$  周期への需要変動

$P$ : 第1周期第1番目の需要から季節性をとり除いた値 (傾向要素)

を導入する。

需要の傾向線が1次モデル  $y=a+bx$  で表わされるとすると、第1周期の傾向要素の総和は

$$(1') \quad P+(P+b)+(P+2b)+\dots+(P+(L-1)b)=L \cdot P+(L(L-1)/2) \cdot b$$

となる。第2周期では

$$(2') \quad P+Lb+(P+(L+1)b)+\dots+(P+(L+L-1)b)=L \cdot P+L^2 \cdot b+(L(L-1)/2) \cdot b$$

となる。(2') 式から (1') 式を引けば、周期間変動  $L^2 \cdot b$  を得る。よって、データより得られた周期間変動により

$$(3') \quad b=\bar{\lambda}/L^2$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{(H/L)-1} \lambda_i}{(H/L)-1}$$

$$= (Y_{(H/L)} - Y_1) / ((H/L) - 1)$$

となる。この  $b$  がいま求めようとしている  $R_t$  の初期値にほかならない。ゆえに

$$(4') \quad R_1 = (Y_{(H/L)} - Y_1) / (L(H-L))$$

が得られる。傾向要素  $P$  は、(1') 式の

$$Y_1 = LP + (L(L-1)/2) \cdot R_1$$

なる関係より

$$(5') \quad P = (Y_1/L) - ((L-1)/2) \cdot R_1$$

となる。

季節性  $S_t$  の初期値を求めるには

$$P_1 = (Y_1/L) - ((L-1)/2) \cdot R_1$$

$$P_2 = P_1 + R_1$$

$$\vdots$$

$$P_j = P_1 + (j-1)R_1$$

$$\vdots$$

$$P_H = P_1 + (H-1) \cdot R_1$$

を計算し、これらのおのおのの値より季節要素  $S^0_j$  を

$$(6') \quad S^0_j = y_j / P_j, \quad (j=1, 2, \dots, H)$$

と決定する。初期値としては、これらの季節要素で同一時期に対応するものの算術平均

$$(7') \quad S_j = (L/H) \sum_{p=0}^{(H/L)-1} S^0_{p \cdot L + j}, \quad (j=1, 2, \dots, L)$$

をもちいる。

### 参 考 文 献

- [1] Box, G. E. P. and G. M. Jenkins, *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [2] Hadley, G., *Introduction to Business Statistics*, Holden-Day, San Francisco, Calif., 1968.
- [3] Kowalik, J. and M. R. Osborne, *Method for Unconstrained Optimization Problems*, Elsevier, New York, 1968.
- [4] Winters, P. R., "Forecasting Sales by Exponentially Weighted Moving Averages," *Mngt. Sci.*, **6**, 3 (1960), 324-342.