

〈O R の 潮 流〉

数 理 計 画 編

成 久 洋 之*

1. ま え が き

数理計画法に関する論文はOR専門誌上をかなりにぎわしており、米国OR学会専門誌 *Operations Research* については、1971年より毎年第1号は数理計画法特集号を編集している。*Operations Research* という専門誌自体のもつ方針については別に論ずるとして、1972年度における全論文数と数理計画法に関する論文数との関連性はつぎのとおりとなっている。

Vol. 20, No. 1	9 件/12件 (Mathematical programming)
Vol. 20, No. 2	0 件/19件 (Que)
Vol. 20, No. 3	3 件/14件 (Urban problem)
Vol. 20, No. 4	4 件/13件
Vol. 20, No. 5	3 件/10件
Vol. 20, No. 6	2 件/10件

ただし、() は特集号を示すものである。つまり、全論文数68件中21件が数理計画法関係論文であり、その他 letters to editorあるいはtechnical reportsまで含めると、その割合はさらに高いものと思われる。

1973年の論文誌第1号、すなわち、Vol. 21, No. 1 はやはり Mathematical programming 特集であった。28 件全論文が数理計画法に関するものであった。

1969年より1973年まで発表されたもの、つまり、Vol. 17, No. 1よりVol. 21, No. 1まで掲載された数理計画法に関する論文数は133件に達し、1年平均約40件ということになる。これらの諸論文についてみると、1970年頃までは主として整数計画法について論じたものが多く、1971年以降では非線形

計画法の理論的展開あるいは応用例についての記述論文が目立っているようである。以下、これらの傾向につきのべることにしよう。

2. 線形計画法

線形計画法そのものについての論文はほとんどないが、時折発表されるものとしては、大規模な計画問題の扱い方、あるいは Columnar method の応用例 (A Modified Linear Programming for Columnar Method in Mathematical Programming by Nemhauser and Widhelm, Vol. 19, No. 5) やさらに、Parametric LP (C. Kim, Vol. 19, No. 7) などである。

LP 理論に関連するものとしては、分解原理 (decomposition principle) や双対性 (duality) に関するものがあり、とくに双対性については、[Kortanek らにより与えられた錐体の上で考えた双対定理があり、従来のLPにおいて論じられた概念の拡張として取り扱うことを示している (On Refinements of Some Duality Theorems in Linear Programming over Cones by Kortanek and Soyster, Vol. 20, No. 1)。このDuality Theorems over Conesの考え方はさらに一般の数理計画法についても論じられているものであり、新しい方向を示しているものといえよう。さらに、Martine Dillonは基底の選び方として、heuristic なものを提案しており、大規模LP問題に対してかなり有効であるとのべている (Heuristic Selection of Advanced Bases for a Class of Linear Programming Models by Martine Dillon, Vol. 21, No. 1)。

その他、線形計画問題に関連したものとしては、Saksena らの Bounding Hyperplane Method があり、単体法の効率化をはかっている (The Bounding Hyperplane Method of Linear Programming by Saksena and Cole, Vol. 19, No. 1)。

* 防衛庁陸幕OR班。

3. 整数計画法

整数計画法については前述したように、1970年頃がピークであったといえるが、その後もやはり他に比較したら多いほうである。

整数計画法についての理論的展開は、まず切除平面法から始まるわけだが、その出発点は Gomory Cut である。この切除平面法の実用性についての検討は別にすると、整数計画法の理論的突破口を探すならば、やはりこの切除平面法からのアプローチが考えられるわけである。そこで、Gomory Cut に代わる Cut として、Intersection Cut (Egon Balas, Vol. 19, No. 1), Hyper Cylinder Cut (R. D. Young, Vol. 19, No. 6), Enumerative Cut (Burdet, Vol. 21, No. 1), Convexity Cut (Glover, Vol. 21, No. 1) などそれぞれ提案されている。いずれも、より効率的 Cut の生成を狙ったものであり、与えられた実行可能領域をより深く切除しようとして提案されているものである。

切除平面の生成は、新しい convex hull をいかに形成するかということであるが、これに関して、

Comments on Integer Hulls of Two Linear Constraints by Jeroslow (Vol. 19, No. 4)

On the Unlimited Number of Faces in Integer Hulls of Linear Programs with a Single Constraint by Rubin (Vol. 18, No. 4)

などがある。

Heuristic なアプローチとしても種々のものが提案されており、整数計画法ではむしろ実用上、この種の方法のほうがすぐれているとさえいわれている。とくに (0-1) 変数計画法としてよく適用されており、なかでも陰伏的列挙法 (Implicit enumeration method) などは効率的なものとされている。最近はこの Enumeration method そのものについての論文というよりは個々の (0-1) 変数計画問題を解く手法として、陰伏的列挙法が用いられているという感じであり、Machine sequencing, Set covering, Plant location, Allocation, Transportation, Transportation-Allocation, Scheduling などに関連した方法が提案されている。とくに、Graph theory に関係したものと、Shortest path problem, Travelling salesman problem などを取り扱ったものが目立っているようである。

分枝限定法 (Branch-and-Bound) に関する論文もそれぞれ発表されており、F. S. Hiller (Vol. 17, No.

4), Graciano Să (Vol. 17, No. 6), Mitten (Vol. 18, No. 1) などがある。また整数計画全般に関連したものととして、Fred Glover and D. Klingman の The Generalized Lattice-Point Problem (Vol. 21, No. 1) などがある。

4. 非線形計画法

非線形計画法についての理論は、線形計画法のそれに比して一段と困難となり、取り扱われる範囲としても、Kuhn-Tucker の定理が成立する場合にほとんど限定されている。

このことから少しでも抜け出そうとしていろいろのアプローチがなされており、よしんばこの範囲内で考えるにしても、それなりに一般的統一化の方向へのアプローチがいろいろとなされているようである。

まず Evan and Gould (Vol. 18, No. 1) は、Stability in Nonlinear Programming についてのべ、Greenbergら (Vol. 18, No. 2) は、Generalized Penalty-Function Concepts in Mathematical Optimization について論じている。これらの二つの方向は、非線形計画法の一方の方向を指向し、双対性についての統一的想法 (とくに線形計画法のところでもふれた Duality Theorem over Cones) は他の一方向を示していると思われる。

線形計画法において、双対定理は、線形計画法の理論的構造を知る上で重要な役割を果たしたわけであるが、この意味で非線形計画法においてもその双対性を明らかにすることは非常に重要なことであり、その成立する範囲を拡張することがいろいろとおこなわれ、一つの例として錐体上における双対定理などにつき論じようとしているものである。この点についてまとめたものとして、M. S. Bazaraa and J. J. Goode の On Symmetric Duality in Nonlinear Programming (Vol. 21, No. 1) がある。

さらに、最適化問題そのものについて論じようとするものに、Reklaitisら (Vol. 17, No. 1) の A Computationally Compact Sufficient Condition for Constrained Minima や Pavianiら (Vol. 17, No. 1) の Constrained Nonlinear Optimization by Heuristic Programming, F. J. Gouldら (Vol. 17, No. 5) の Closure of the Right-Hand-Side Set for Systems of Nonlinear Inequalities, あるいは Bazaraaら (Vol. 19, No. 1) の Optimality Criteria in Nonlinear Programming without Differentiability などがある。

非線形計画法の中に入れることは必ずしも適当ではないが、紙面の都合でここでのべるならば、確率的計画法 (Stochastic Programming) についての論文もかなり発表されており、Sengupta (Vol. 17, No. 1), Ziembaら (Vol. 18, No. 2), Avrielら (Vol. 18, No. 5), Kaplanら (Vol. 19, No. 1), Dragremirescu (Vol. 20, No. 1), Garstka (Vol. 21, No. 1) などがある。また分数計画法 (Fractional Programming) や幾何計画法 (Geometric Programming) についてもときどき発表されているようである。

5. ネットワーク計画法

ネットワーク計画法 (Network Programming) については、とくにグラフ理論に関する論文がかなり多い。この中には、Shortest path, Scheduling, Covering, Allocation などや flow に関するものなど種々のものがある。もちろんグラフ理論の応用に関するもの (L. H. Tong, On a Class of Directed Graphs: With an Application to Traffic-Flow Problem, Vol. 18, No. 1) や Linuoら (Vol. 18, No. 2) のように、Solving Resource-Constrained Network Problem by Implicit Enumeration, P. A. Jemen, Optimization of Series-Parallel-Series Networks (Vol. 18, No. 3),

Optimum Network Programming (Vol. 19, No. 4) などのような network そのものの最適化を取り扱ったものもある。

一方、Wilkinson (Vol. 19, No. 7) は、An Algorithm for Universal Maximal Dynamic Flows in a Network で flow の最大化を取り扱っているが、この種の flow に関するものとして、multi-commodity の flow の問題を論じたものもかなり多いように思われる。

6. ま と め

以上、米国のOR学会論文誌に掲載された数理計画法に関連する論文の傾向を中心にのべたわけであるが、Kuhn-Tucker の定理が成立する範囲にとどまらず、それを拡張してより広い範囲での数理計画法理論の確立を目指している。そこで、convex 関数から quasi convex, pseudo convex と拡張してKuhn-Tucker の定理に対応するものを見いだそうとすると同時に、微分可能性を考慮しない最適化手法の開発という方向に研究されつつある。一方、数理計画法の理論構造を明確にする意味で、双対性概念の確立あるいは Penalty Function の一般化などがそれぞれおこなわれている。