文献抄録

Bazaraa, M. S., "Geometry and Resolution of Duality Gaps," *Naval Research Logistics Quarterly*, **20**, 2 (1973), 357-366.

〔数理計画／双対問題／理論〕

数理計画法としてのつぎの二つの問題（主問題と双対問題）を考えてみよう.

問題 P　$\inf\{f(x): x\epsilon S,\ g(x)\leqq 0, h(x)=0\}$

問題 D'　$\sup\{\phi(\lambda,\mu): \lambda\geqq 0\}$　ただし,

$\phi(\lambda,\mu)=\mathrm{in}\{f(x)+<\lambda, g(x)>+<\mu, h(x)>: x\epsilon S\}$

ここで, $f, g=(g_1,\cdots,g_m)$, $h=(h_1,\cdots,h_k)$ は R_n の上で定義された関数であり, $S\subseteqq R_n$ とする.

上記 2 問題に対して

$$\inf\{f(x): x\epsilon S,\ g(x)\leqq 0, h(x)=0\}\geqq\sup\{\phi(\lambda,\mu): \lambda\geqq 0\}$$

となることはよく知られている事実である.

ある適当な凸条件においてはこの不等号は等号として成立する. つまり双対ギャップ (duality gap) の存在しない場合である. さらに, P と D' の問題が解 x_0, λ_0, μ_0 を持つための必要十分条件は

$x\epsilon S, \lambda\geqq 0, \mu$ に対し

$$\psi(x,\lambda,\mu)=f(x)+<\lambda, g(x)>+<\mu, h(x)>$$

とすると,

$$\psi(x_0,\lambda,\mu)\leqq\psi(x_0,\lambda_0,\mu_0)\leqq\psi(x,\lambda_0,\mu_0)$$

として与えられる.

双対ギャップの存在しないときの取扱いについては, Kuhn-Tucker の定理として与えられているとおりであるが, ギャップの存在する場合については, Everett や Brooks, Geoffrion, Nunn などにより一般的に論じられている.

本論文は, 上記双対ギャップの持つ幾何学的意味とその取扱い方について Everett や Brooks 達とは異なったものを Gould や Bellmore, Greenberg and Jarvis の考え方に基づいて規定したもので, ギャップを含んだ双対問題について一つの考え方を提案したものである.　(成久洋之)

Charles, I. Tiplitz, "Convergence of the Bounding Fixed Charge Programming Problem," *Naval Research Logistics Quarterly*, **20**, 2 (1973), 367-375.

〔数理計画／固定費問題／手法〕

固定費問題は混合整数線形計画 (MILP) 問題の特殊形である. 本論文ではこの MILP 問題の計算手法について記述するものである.

固定費問題はつぎのように表わされる.

$$\min\ \phi=\sum f_j(x_j),\ Ax=b,\ x>0$$

ただし, $f_j(x_j)=c_jx_j+d_j\delta_j$,

$$\delta_j=\begin{cases}0 & (x_j=0)\\ 1 & (x_j>0)\end{cases}$$

さらに, この条件式における内容を分析してみると, 施設などの容量制限を考慮したりすることによりつぎのように表わすこともできる.

〔問題Ⅰ〕　$\min\ \phi^{\mathrm{I}}(x,y)=\sum_i c_ix_i+\sum_j d_jy_j$

　s. t. $y_j=0$ or 1, $x_i\geqq 0, c_i, d_j\geqq 0$

　$At+By=e$

ここで, y_j が整数値でないとしてつぎのように変換して考える.

〔問題Ⅱ〕　$\min\ \phi^{\mathrm{II}}(x,y)=\sum_i c_ix_i+\sum d_jy_j$

　s. t. $0\leqq y\leqq 1$

いま, 問題Ⅰの解を x^{I}, y^{I}, 問題Ⅱの解を x^{II}, $y^{\mathrm{I}}{}_{\mathrm{I}}$ とすると, つぎの関係を得る.

$$\phi^{\mathrm{I}}(x^{\mathrm{I}}, y^{\mathrm{I}})=\phi^{\mathrm{II}}(x^{\mathrm{I}}, y^{\mathrm{I}})\geqq\phi^{\mathrm{II}}(x^{\mathrm{II}}, y^{\mathrm{II}})$$

したがって, 問題Ⅱの解は問題Ⅰの解の下限を与えるわけである. 一方

$$\phi^u=\sum_i c_ix_i{}^{\mathrm{II}}+\sum_j d_j\delta_j{}^{\mathrm{II}}\geqq\phi^{\mathrm{I}}(x^{\mathrm{I}}, y^{\mathrm{I}})$$

$$\delta_j{}^{\mathrm{II}}=1 \quad \text{if}\quad y_j{}^{\mathrm{II}}\neq 0$$

$$\delta_j{}^{\mathrm{II}}=0 \quad \text{if}\quad y_j{}^{\mathrm{II}}=0$$

である. ただし, ϕ^u は ϕ の上限とする. つまり適当な ϕ^a を決定して $\phi^a<\phi^u$ とすればよい.

下限値を求める場合は

〔問題Ⅲ〕　$\min\ \phi^{\mathrm{III}}(x)=\sum_i c_ix_i{}^{\mathrm{III}}+\sum_j d_j\delta_j{}^{\mathrm{II}}$

　s. t. $Ax=e-B\delta^{\mathrm{II}}$

として解けばよい. したがって

$$\phi^{\mathrm{III}}(x^{\mathrm{III}})\leqq\phi^u$$

が成立するようにできる.

このように, 上限および下限を適当に決定することにより固定費問題を解く具体的手順につき記しており, その場合の収束条件等にも例題を示しながら説明したものである.　(成久洋之)

Grunspan, M. and M. E.Thomas, "Hyperbolic Integer Programming," *Naval Research Logistic Quarterly*, **20**, 2(1973), 341–356.

〔数理計画／双曲計画法／整数計画法〕

双曲整数計画問題はつぎのように定式化される．

$$(P')\quad \begin{cases} \max\{f(x')=(c'x'+\alpha)/(d'x'+\beta)\} \\ \text{s.t.}\quad Ax\leqq b,\ x'\geqq 0;\ \text{整数} \end{cases}$$

ただし，A' は (m×n) の整数行列であり，x', d', c' はそれぞれ n 次元整数ベクトル，b' は m 次元整数ベクトル，α と β とは固定した整数とする．この問題に適当なスラック変数を導入するとつぎの問題 P を得る．

$$(P)\quad \begin{array}{l} \max\{f(x)=(cx+\alpha)/(dx+\beta)\} \\ \text{s.t.}\quad Ax=b,\ x\geqq 0:\ \text{整数} \end{array}$$

この P を解くアルゴリズムとしては，根本的に Isdell と Marlow の提案した連続量に対する双曲計画問題解法手法と同様な idea に基づくものである．いま，$\bar{X}'=\{x'\,|A'x'\leqq b, x'\geqq 0\}$ とし，さらに，x_a' を $(d'x_a'+\beta)\fallingdotseq 0$ となるような点とする．また，連続量からなる双曲計画問題を (P_c') で表わし，(Pc') に対して x_a' は実行可能解であると仮定しよう．ここでつぎの問題を考える．

$$\begin{array}{l} \max\ \{z(x')=(d'x_a'+\beta)(c'x'+\alpha)-(c'x_a'+\alpha) \\ \qquad \times(d'x'+\beta)\} \\ \text{s.t.}\quad x'\epsilon\bar{X}' \end{array}$$

x_a' はこの問題に対して実行可能解となるから，$\max z(x')\geqq 0$ であり，しかも x_1' が最適解であるとすると，$z(x_1')\geqq 0$, $(d'x'+\beta)>0$, $\forall x'\epsilon\bar{X}'$ となり，$f(x_1')\geqq f(x_a')$ である．このことから逐次 LP 問題の実行可能解を求めることにより最終的に (P') 問題を解き得るわけである．これが主として Isbell-Marlow の考え方であり，(P') の問題解法として，連続量を取り扱う問題に対する切除平面の付加による方法により整数解を求めようとするものである．いわば，分数整数計画法の一手法を提案したものである．　（成久洋之）