

## 〈ORの潮流〉

## 探 索 理 論 編

飯 田 耕 司\*

## 1. ま え が き

1968年の初夏、米海軍の原子力潜水艦 Scorpion は、地中海における訓練を終えて米本土へ向け帰投の途中、アゾレス群島南方約 250 哩の地点からの位置報告を最後に消息を断った。米海軍は、99 名の乗組員の救出と国家機密の防護のために、懸命の捜索活動を展開するのであるが、この事件は探索理論に対しても大きな衝撃を与えることになる。既成の理論を適用して実施した探索が、必ずしもよい結果をもたらさなかったからである。この苦い経験は、探索理論の研究者たちにきびしい鞭撻を加え、また多くの研究材料を提供した。探索理論の研究は、文献 [1] にも述べたとおり、第 2 次大戦中の米海軍 OEG の輝かしい業績以来、必ずしも順調な成育をとげなかったのであるが、この Scorpion 探索を一つの契機として、長い播種期をようやく終えて、次の成長期にはいったように思われる。OR の理論は現実のオペレーションによって鍛練され研磨されるという好例をここにも見ることができよう。このへんの事情を端的に示す数字として、たとえば OR 学会探索理論部会（活動期 '71.9~'74.3）が仮にまとめた文献リストは、総収録論文数 189 編、'71 年以後の論文数 57 編、そのうち Scorpion 探索に直接的に関連するもの 8 編をあげている。また米軍の委託研究の報告として出されているもの 31 編（'71 年以後）という数字にも注意したい。これを見ても、'70 年以後この分野の研究活動のペースがかなり高まってきていること、および軍事面からの需要が依然として強いことが読みとられる。探索理論の研究は、その性質上、問題中心的な研究が多く、汎用的な OR 手法に関心のある読者には興味がうすいかもしれないが、'71 年以後の文献の中からそれ以前のものと顕著に異なるものを拾って概観してみよう。

## 2. 目標存在確率の推定問題

従来の探索理論の中で研究者たちの興味の一つの中心は、努力配分問題にあった。この場合、目標物の存在確率分布は与えられたものとして前提し、それに基づく探索計画が議論される。しかし現実の探索オペレーションにおいては、目標物の存在確率分布の推定が問題となる。もしそれが正しく与えられるならば、理論の教えるところから従って探索計画をたてればよい。そこにはさしたる困難はない。したがって探索理論の適用に関する最も基本的な問題点だが、この目標分布の推定にあるといえよう。Scorpion の探索の際にも、精密探索の段階でまさにこの問題に直面せざるをえなかった。そこでとられた方法は、専門家グループによって目標物の動向（沈没の原因となった故障の発生やそれに対する処置、それらの結果として起こる艦の運動等）の各段階のシナリオとその生起確率とを見積り、モンテカルロ・シミュレーションを行なって、存在確率のマップを作成するという作業であった [2]。約 400 平方哩の海域を 1 平方哩のメッシュに区切り、シミュレーションの結果、各メッシュ内に Scorpion が沈没していると思われる確率を推定した。結果的には最大確率のメッシュからわずか 230 ヤード離れた地点で Scorpion の残骸を発見しているので、存在確率の推定は成功だったといえる。理論というにはあまりに素朴な技法ではあるが、しかし最も OR らしい作業といえよう。このような目標分布の推定技法は、'74 年に完成された米・沿岸警備隊の海難救助情報システムの中の CASP (Computer Assisted Search Planning) システムにもとり入れられている。船舶の遭難時刻や位置情報の誤差、海流や風の影響その他の要因を含むシナリオを主観確率とともに入力すると、システムはシミュレーションを行ない、遭難者の漂流位置の分布を求め、この分布に基づいて探索計画を出力する。計画に従って探索を開始し、その進展に伴って必要なデータをシステムにフィード

\* 防衛庁海上幕僚監部分析班。

バックしてやれば、さらに探索活動による目標物の事後分布と次の探索計画とを答えてくれるという情報システムである。

### 3. 静止目標物に対する最適努力配分

静止目標物に対する古典的な努力配分問題については、'71年以後、準備時間を含んだ探索切りかえ問題 [3]、および Dobbie ('63年)の研究を補備する形の論文が2,3編あるが [4] [5]、Neyman-Pearson Lemma の適用としてのこの種の問題は、'60年代後半にはほぼ解明されたといってよいであろう。しかしこれらを含む従来の研究は、目標物が存在したときの条件付目標発見確率を一定とした解析にとどまっている。このことは Scorpion の探索において重大な過誤をもたらす原因となった。探索に用いられたセンサーの能力が予想をはるかに下回っていたために、ほとんど探し尽したと思われた地域の事後目標存在確率が、結果的にはかなり高い状態のまま、他の地域に探索活動を転換してしまっていたのである。この苦い経験からセンサーの能力値を確率変数として扱った最適努力配分の研究が展開される。すなわち、目標物の沈坐位置がたまたま海底の凹地であったりするとセンサーの有効探索幅は非常に小さくなるが目標物が事実このような状態にあるかどうかは前もって予想できない。予想できるのはその可能性にすぎない。Richardson ら [6] は、センサーの有効探索幅が確率変数とみなされる場合の最適努力配分について一般的な定理を導き、とくに有効探索幅がガンマ分布に従う場合について Koopman 型の努力配分法との相違を解明した。目標存在分布が2次元楕円正規分布、有効探索幅  $w$  が  $P(w) = w^{v-1} \alpha^v e^{-\alpha w} / \Gamma(v)$  (ただし  $v > 2$ ; 平均は  $W = v/\alpha$ ) に従う場合、発見時間の期待値を最小にする最適努力配分は、平均有効探索幅  $W$  をもってする Koopman の最適探索計画よりも慎重な探索となることを示した。すなわち Koopman 計画にくらべて探索範囲を小さめにとって密度の濃い探索を行ないながら、徐々に探索範囲を広げていくべきである。このような探索は有効探索幅の実現値がその平均値よりも大きい場合には、平均値  $W$  で計画した Koopman 計画にくらべてたかだか1.3倍程度の期待発見時間を要するにすぎないが、実現値  $w$  が小さい場合には1/3程度にまで短縮することができるので ( $v \approx 2, w/W = 0.1$  の場合)、全体的に非常に大きな効果をもたらすものとなっている。この論文は探索停止規

則についても興味ある結果を導いているが、この問題については4で触れることにする。

Kan [7] は、離散型の探索問題について  $i$  地域の時刻  $t$  における条件付目標発見確率  $\alpha_i^t$  が確率変数である場合を扱い、 $\alpha_i^t$  の実現値が時点  $t$  における探索の前に知らされる場合と、直後に知らされる場合とについて解析している。また Moore [8] は、 $N$  地域のいずれかに目標物が存在し、条件付目標発見確率が指数型  $1 - \exp\{-k_i t\}$  で与えられ、目標物が見える状態  $k_i > 0$  と見えない状態  $k_i = 0$  とにある時間分布がわかっている場合に発見確率を最大するように総探索時間  $T$  を割りふる問題を扱っている。センサーの特性や能力のパラツキを含んだこの種の研究には [9]~[11]があり、今後も問題の状況に対応して多様な研究の可能性があるように思われる。

### 4. 探索停止規則問題

Ross ('69年)が提出した離散型モデルの探索停止規則問題は、その後若干の進展がみられる。前掲の Kan [7] は、彼のバラエティに富んだ論文の一章でこの問題に触れ、探索停止が生ずるのは目標物の事後存在確率が、存在確率空間上の一つの凸集合(停止領域)にはいった場合であるが、 $i$  地域探索領域は必ずしも一つの凸集合とはならないことを述べている。また Nakai [12] は、条件付発見確率が特殊な場合の2地域問題を扱っている。OR学会の探索理論部会でもこの問題に関連した2件の中間報告的レポートがあった [13] が、離散型問題は2地域の場合でさえもまだ完全には解かれていない。しかしこれが連続型問題となると事情はやや好転する。努力量を任意に可分とした連続時間2地域問題は、完全な解が得られている [13] し、前掲の文献 [6] では、一様または2次元楕円正規目標分布、指数型発見法則、ガンマ分布の有効探索幅を仮定し、目標物の価値が時間  $t$  の非増加関数、単位時間当りの探索コストが時間の非減少関数の場合について、探索停止時刻を与えている。

Chew は '67年の論文で、離散型問題の停止規則の近似解を求めたが、[14]ではこれをさらに発展させている。彼のモデルは目標物発見のリードを考慮に入れず、探索を打ち切ったときのペナルティを課している点、および一つの地域は探索コスト無限大という「探索されない聖域」を設けている点が Ross のモデルと異なっている。前者の相違点はある種の変換によって等価な問題となるが、後者の仮

定の下では Ross の定理が成立しなくなる点に特徴があり、このような状況下での停止領域の性質を調べている。

## 5. 移動目標物問題

移動目標物に関する one-sided な探索問題の研究は、'71 年以後飛躍的な進展が見られる。'70 年以前のこの分野の研究は、わずかに 1, 2 編が発表されたにすぎなかったが、'71 年以後のそれは 10 編を数えることができる。この背景としては、目標潜水艦の高速化によって従来の静止目標物としての近似的な取扱いが許されなくなったという事情によるものと思われる。

Pollock は '70 年に、2 地域間をマルコフ的に移動する目標物の探索問題を DP 型式で定式化し、2, 3 の特殊な場合について解を求めた。この問題に関連して Schweitzer [15] は、期待探索回数を最小にする最適探索法を指示する閾値確率  $\pi^*$  (目標物の移動を考慮した地域 1 の事後目標存在確率が  $\pi^*$  より大きければ地域 1 を探し、小さければ地域 2 を探す) を、直接的なくり返し法によって計算した。また Dobbie [16] は、Pollock モデルで  $N$  地域問題を解くことの困難を克服する試みとして、可分努力量、連続時間として問題を扱うことを提案している。そして 2 地域問題の一般的な解法を示すとともに、steady state に達した後の移動目標物に対する最適努力配分の完全な解を求めた。Kan は前掲の論文 [7] の一章で  $N$  地域の移動目標物に関する多彩なモデルを提案しているが、一般的なマルコフ型移動目標物に対する最適探索法については、得られている知識はあまり多くない。この論文は探索停止規則を含んだ移動目標物問題にも触れている点に注目したい。また Nakai [17] は、3 地域の特殊な場合を扱っているが、Dobbie [16] が指摘しているように、一般的な  $N$  地域移動目標物問題はこれからの研究課題であろう。

飯田 [18] が扱った問題は、目標物の移動則を既知の分布の中から選んだ一定径路の運動としている点が Dobbie のマルコフ型移動のモデルと基本的に異なる点である。この型の問題では、一般的な  $N$  地域問題の最適努力配分について physical な内容の鮮明な必要十分条件が求まっている。さらに連続時間、連続目標空間および連続移動ベクトル空間への拡張もなされており、ほとんど解析を終わっているように思われる。

もう一つの型の連続型移動目標物問題は、Hellman [19]~[21] が精力的に研究を行なっているものである。彼の一連の研究の特徴は、目標物の移動則をその存在確率が拡散方程式型の微分方程式を満足するものとしている点である。得られている結果としては、事後存在確率分布の方程式、最適努力配分の必要条件、および半径  $R$  の円内を一樣探索密度で探索する場合の解等をあげることができる。また移動目標物探索の各時点における事後存在確率分布に関する研究としては、[22] [23] がある。

## 6. Noisy な探索問題

この分野の研究もまた移動目標物問題と並んで '71 年以後の探索理論の中心的なテーマの一つである。Scorpion 探索においても多くの虚探知情報に惑わされ、一度は探知した真目標物を虚目標物として捨ててしまうという過誤を犯し、以後の探索に重大な影響を及ぼしている。この失敗から出発した研究が Stone らの研究である。虚目標物が存在する場合、探索過程は目標物らしいものを見つける初探知探索と、それが真目標物か虚目標物かを識別する確認探索の 2 段階になる。[24] では、初探知のあった目標物は完全な識別が完了するまで確認探索を打ち切らない場合の最適努力配分 (期待発見時間の最小化) を扱っている。虚目標物が存在しない場合は、各時点で発見確率を最大にする探索法が期待発見時間を最小にする探索計画となっているが、虚目標物が存在する場合にはもはやこの性質が保持されないことは注意すべきことである。また [25] では初探知探索と確認探索の間の努力配分およびおのおのの段階での最適配分を、虚目標物がポアソン分布に従って発生する場合について求めている。Dobbie [26] はこのモデルを発展させ、当初に見積った虚目標物の個数および所在の分布を探索の進行に伴って事後的に修正し、これを探索計画に反映させることを提案している。また Walsh [27] は、軍事オペレーション (ヘリコプターによる対潜捜索) における同様な 2 段階探索について、虚目標物存在の影響をモンテカルロ法で調べている。

探索理論部会においても、真目標物と虚目標物の情報発生時間分布と識別時間分布が与えられた場合の探索の特性の解析、確認探索の最適打ち切り時間を扱ったモデル、およびノイズがある場合のセンサーのシステム設計に関する考察など 3 件の研究発表があった。

Moore [28] の研究は、目標物側が積極的に  $N$  個の囹を放ち、真目標物の発見を遅らせようとするもので、囹の数、性能、分布等が期待発見時間に及ぼす影響を分析している。

Smith ら [29] は、離散型の逐次探索においてセンサーの第 1 種の過誤（見逃し）と第 2 種の過誤（虚探知）の確率が知られている場合、探索手順を 2, 3 に固定して探索の特性を求めた。また同様の問題を Kronz [30] は、2 地域・連続時間の場合について解析し、Koopman 解との類似性を検討している。これら二つの研究では探索過程を初探知と確認の 2 段階に分けない点および探索の最終段階で真目標物の存在地域のいい当て（Whereabout search）を含む点が、前述のものとは異なっている。

以上が '71 年以後の noisy な探索に関するおもな研究であるが、この分野の研究は今まさに始められたばかりであり、今後の進展が期待される。

## 7. その他のモデル

探索理論は、より広い土俵の上で、探索にひき続いて起こるオペレーションとの接点の問題に、より積極的にとり組むべきであるという提言がある [31] [32]。探索理論に対するこのような期待は、おそらく大方の読者も深く共感されるであろうが、現実の報文では今のところまだその萌芽は見られない。Whereabout search, Information search 等はそのような意味で可能性に富んだモデルであると思われるが、'71 年以後若干の進展は見られるものの [33]~[35]、そのペースは遅い。また two-sided な探索問題については、Sakaguchi [36] の興味ある研究があるほか、軍事問題の特殊な場面における探索ゲームを扱ったものとして [37] [38] がある。その他には多目標物問題 [39] [40]、阻止哨戒問題 [41]~[43]、2 分法探索 [44] [45]、およびその他の特殊な話題 [46] [47] を扱った論文が発表されている。また '73 年にはわが国で初めての探索理論の一般的な解説書 [48] が刊行されたことも大きな意義をもつものと思われる。

## 8. おわりに

以上 '71 年以後の文献を中心に探索理論の現状を概観した。しかし管見の視界はまことに狭く、多くの見逃し目標物があるであろう。とくに Pollock [31] が指摘しているように、電子工学の信号検知の理論、統計学の統計的検定理論、心理学人間工学

面からの探知論、および OR 諸分野の努力配分や決定理論モデル等、各分野での研究が探索理論の多くのテーマをおおっているかもしれない。探索理論はこのような諸分野との“学際的”探索活動には従来いささか怠慢であったように思われる。'70 年以後ようやく揺り籠から立ち上がった探索理論がそのベビーサークルから足をふみ出してさらに発展していくためには、このような面からの幅広い問題の探索と刺戟が必要であろう。

## 文 献

- [1] 岸 尚, 飯田耕司, “探索論の現状”, 経営科学, **15**(1971), 13-28.
- [2] Richardson, H. R. and L. D. Stone, “Operations Analysis during the Underwater Search for Scorpion,” *Nav. Res. Log. Quart.*, **18** (1971), 141-157.
- [3] Onaga, K., “Optimal Search for Detecting a Hidden Object,” *SIAMJ. Appl. Math.*, **20** (1971), 298-318.
- [4] Stone, L. W., “Incremental Approximation of Optimal Allocation,” *Nav. Res. Log. Quart.*, **19** (1972), 111-122.
- [5] ———, “Total Optimality of Incrementally Optimal Allocation,” *Nav. Res. Log. Quart.*, **20** (1973), 419-430.
- [6] Richardson, H. R. and B. Belkin, “Optimal Search with Uncertain Sweep Width,” *Opns. Res.*, **20** (1972), 764-784.
- [7] Kan, Y. C., “Optimal Search Model,” AD-746151, 59p, 1972,
- [8] Moore, M. L., “A Characterization of the Visibility Process and its Effect on Search Policies,” AD-737744, 321p, 1971.
- [9] Hawkins, J. E. and H. H. Valverde, “Introduction to Multisensor Reconnaissance,” AD-733347, 114p, 1971.
- [10] Yanai, H., “On an Optimal Location Problem,” *JORS.J.*, **15** (1972), 194-200.
- [11] Persinger, C. A., “Optimal Search Using Two Nonconcurrent Sensors,” *Nav. Res. Log. Quart.*, **20** (1973), 277-288.
- [12] Nakai, T., “Optimal Search Policy with Stop in Two-box Case,” *JORS.J.*, 投稿中.
- [13] 岸 尚, “探索理論研究部会報告”, OR 学会春季研究発表会 (1973) アブストラクト集, 43-44.
- [14] Chew, M. C., Jr., “Optimal Stopping in a Discrete Search Problem,” *Opns. Res.*, **21** (1973), 741-747.
- [15] Schweitzer, P. J., “Threshold Probabilities when Searching for a Moving Target,” *Opns.*

- Res.*, **19** (1971), 707-709.
- [16] Dobbie, J. M., "A Two-Cell Model of Search for a Moving Target," *Opns. Res.*, **22** (1974), 79-92.
- [17] Nakai, T., "A Model of Search for a Target Moving among Three Boxes : Some Special Case," *JORS.J.*, **16** (1973), 151-162.
- [18] 飯田耕司, "移動目標物の探索", *経営科学*, **16** (1972), 204-215.
- [19] Hellman, O., "On the Effect of a Search upon the Probability Distribution of a Target whose Motion is a Diffusion Process," *Ann. Math. Stat.*, **40** (1970), 1717-1724.
- [20] -----, "Optimal Search for a Randomly Moving Object in a Special Case," *J. Appl. Prob.*, **8** (1971), 606-611.
- [21] -----, "On the Optimal Search for a Randomly Moving Target," *SIAM. J. Appl. Math.*, **22** (1972), 545-552.
- [22] Brune, W. H and R. J. Taylor, "A Feasibility Study of an ASW Search Director Concept," AD-756243, 126p, 1972
- [23] -----, "A Feasibility Study of an ASW Search Director Concept," AD-762464, 98p, 1973.
- [24] Stone, L. D. and J. A. Stanshine, "Optimal Search Using Uninterrupted Contact Investigation," *SIAM. J. Appl. Math.*, **20** (1971), 241-263.
- [25] Stone, L. D., J. A. Stanshine and C. A. Persinger, "Optimal Search in the Presence of Poisson-Distributed False Target," *SIAM. J. Appl. Math.*, **23** (1972), 6-27.
- [26] Dobbie, J. M., "Some Search Problems with False Contacts," *Opns. Res.*, **21** (1973), 907-925.
- [27] Walsh, R. M., "The Effect of the False Contacts on the Probability of Detecting a Submarine," AD-713394, 66p, 1970.
- [28] Moore, J. M., "Semi-Markov Models of Search in the Presence of Decoys," AD-736961, 116p, 1972.
- [29] Smith, M. W. and J. E. Walsh, "Optimum Sequential Search with Discrete Locations and Random Acceptance Errors," *Nav. Res. Log. Quart.*, **18** (1971), 159-167.
- [30] Krantz, R. L., "Effects of the Response Process in Search Models with False Detection," AD-734009, 258p, 1971.
- [31] Pollock, S. M., "Search Detection and Subsequent Action: Some Problems on the Interface," *Opns. Res.*, **19** (1971), 559-586.
- [32] Koopman, B. O., "Recent U. S. Advances in OR Theory," IFORS 第6回国際会議講演論文 (1972), 16.
- [33] Kadane, J. B., "Optimal Whereabout Search," *Opns. Res.*, **19** (1971), 894-904.
- [34] Sakaguchi, M., "An Information Search," *Rep. Stat. Appl. Res.*, JUSE, **20** (1973), 77-88.
- [35] Campbell, D. R., "An Information Theory Approach to a Fault Location Problem," AD-736534, 82p, 1971.
- [36] Sakaguchi, M., "Two-sided Search Games," *JORS.J.*, **16** (1973), 207-225.
- [37] Mayberry, J. P., F. M. Sand, A. J. Trulove and J. E. Walsh, "Applications of Mathematical Analysis to Detection Problem of Naval Strategy," AD-730508, 219p, 1971.
- [38] Langford, E., "A Continuous Submarine Versus Submarine Game," *Nav. Res. Log. Quart.*, **20** (1973), 405-417.
- [39] Cozzolino, J. M., "Sequential Search for an Unknown Number of Objects of Nonuniform Size," *Opns. Res.*, **20** (1972), 293-308.
- [40] Paloheimo, J. E., "On a Theory of Search," *Biometrika*, **58** (1971), 61-75.
- [41] McCormick, W. T., Jr. and A. W. Storr, "A Submarine Barrier Detection Model, I. Defense Analysis," AD-717637, 15p, 1971.
- [42] Guzman, G. E., "A Proposed Model for a particular Naval Patrol System," AD-754356, 24p, 1972.
- [43] Cullen, D. F., B. A. Knoppers, B. A. Lansdowne and A. J. Trulove, "Mathematical Research in Destroyer-Submarine Encounters," AD-730514, 139p, 1971.
- [44] Murakami, S., "A Dichotomous Search," *JORS. J.*, **14** (1971), 127-142.
- [45] 村上 知, "ある二分探索モデル", *経営科学*, **18**(1974), 125-131.
- [46] Willman, W. W., "On a Class of Optimal Search Problems," AD-731678, 11p, 1971.
- [47] -----, "More on a Class of Optimal Search Problems," AD-753809, 15p, 1972.
- [48] 多田和夫, "探索理論", *日科技連ORライブラリー*, No. 15, 252p, 1973.