

# リフレクション・チャート

## 1. はじめに

表題のように、リフレクション・チャートなどといえば、耳新しく聞こえるかも知れない。それもそのはずで、筆者が便宜上、勝手につけさせていただいた名前である。

オペレーションズ・リサーチにかぎらず、いろいろな分野において、数列の性質を調べたり、また、ある性質をもつ数列を構成したりしなければならないことがしばしばある。

いま、数列

$$(1) \quad x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots$$

が与えられたとき、これを図示する方法としては、図 1.1 のように、ヨコ軸にその要素の番号である  $i$  を、タテ軸にその値  $x_i$  をとるのが最も普通のやり方であろう。

これに対して、数列(1)を引きつづく 2 つずつの要素を組にして、

$$(2) \quad (x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}), \dots$$

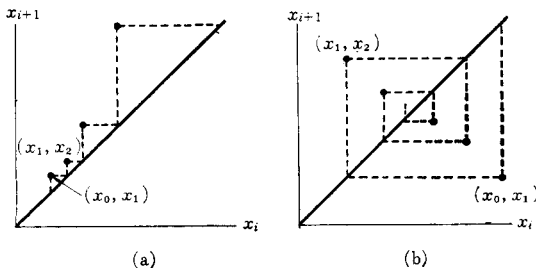


図 1.1

というベクトル列として考え、その各々をヨコ軸を第 1 要素、タテ軸を第 2 要素とする座標平面上に打点するというやり方も考えられる(図 1.2)。

そこで、このような座標平面をリフレクション・チャートとよぶことにする。数列をこのようなチャートに打点すると、数列をとりあつかうのに大変見通しがよくなることが多い。筆者は日常何かと愛用しているが、このような表現法そのものは古くからあり、いろいろな分野[1], [2]で使われている。ただ、多くの分野にまたがっているためか、適当な名前がないようなので、便宜上このように命名して、その応用法を 2~3 述べてみたいと思う次第である。もし、すでに他の名前がついているのだったら、ご叱正の上ご寛恕をたまわりたい。

### 基本的な性質

まず、このチャートの最も基本的な性質を述べておこう。

(i) リフレクション・チャート上の引きつづく 2 点

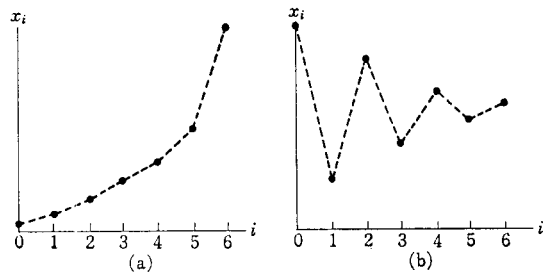


図 1.2

$$(3) \begin{cases} P_{i-1} = (x_{i-1}, x_i) \\ P_i = (x_i, x_{i+1}) \end{cases}$$

を考える。あきらかに、 $P_{i-1}$ の第2要素は $P_i$ の第1要素に等しい。このことをリフレクション・チャート上でみると、点 $P_{i-1}$ から出た水平線が、対角線( $x_{i+1}=x_i$ なる直線)に“ぶつかって、<sup>リフレクト</sup>反射あるいは屈折して”できた垂直線に $P_i$ が位置することに対応している。だから、リフレクション・チャート上の点列を、このような水平—垂直線であつないでゆくと(このような水平—垂直線を**連結線**とよぶことにしよう。)図1.2のような“階段”や“くもの巣”のような形がみられる。もう少し、くわしくいうと、つぎのようになる。

(a) 数列が増加(減少)列

$$(4) \begin{matrix} x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots \\ (>) (>) (>) (>) (>) (>) \end{matrix}$$

である場合、リフレクション・チャート上では、点是对角線の上(下)側に位置し、これらをつなぐ連結線は**階段状**になる(図1.2(a)).

(b) 数列が振動列

$$(5) \begin{matrix} x_0 > x_1 < x_2 > \dots > x_{i-1} < x_i > x_{i+1} < \dots \\ (<) (>) (<) (<) (>) (<) (>) \end{matrix}$$

である場合、リフレクション・チャート上では、点は、対角線の上下に交互にあらわれ、これらをつなぐ連結線は**くもの巣状**になる(図1.2(b)).

(ii) 数列が1階の漸化式

$$(6) x_{i+1} = f(x_i)$$

で与えられる場合には、リフレクション・チャート上の点列は、(6)式の曲線の上に並ぶことになる。そこで、リフレクション・チャート上に関数 $f(\cdot)$ の曲線を書いておけば、この曲線と対角線をつかって、任意の初期値 $x_0$ から始まる点列を作図によって得ることができる(図1.3).

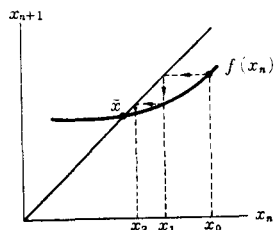


図 1.3

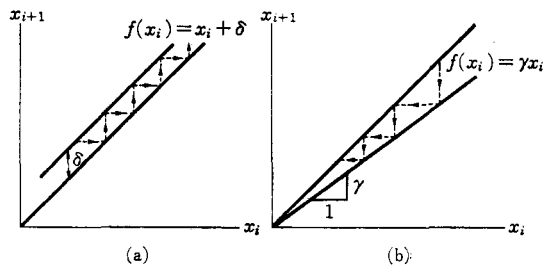


図 1.4

最も簡単な場合として、図1.4に、等差数列

$$(7) x_{i+1} = x_i + \delta$$

および等比数列

$$(8) x_{i+1} = \gamma x_i$$

の場合が示してある。ここに、 $\delta$ および $\gamma$ は、それぞれ、公差および公比である。

また、誤差その他の実際的な諸問題を別にしていえば、観測等によって与えられた数列を、リフレクション・チャートに打点し、これに直線なり曲線をあてはめれば、逆に、(6)式のような漸化式を推定する可能性も出てくる。

ここで、応用上の例題を1つ示しておくことしよう。化学では蒸溜という操作によって、ある液体の純度を増加させることがよく行なわれる。いま、物質Aと物質Bとが混合しており、Aの濃度が $x$ であるとき、これを沸騰させれば、気相中のAの濃度は $f(x)$ になる。そこで、気相の部分を別室にみちびき、冷却すれば、Aの濃度が $f(x)$ である液体を得ることができる。 $f(x)$ は物質によって定まる関数で、実験的に得られるが、たとえば、図1.5のような形をしている。

このように、1回の蒸溜で得られる濃度の上昇には限度があるので、与えられた混合液から、希望の濃度のものを得るには、蒸溜をくりかえさなければならない。蒸溜をくりかえしたとき、濃度がどのように上昇してゆくのかは、図1.5をリフレクション・チャートとして用いれば、ただちにわかる。これによって、たとえば、希望の濃度を得るのに、何回蒸溜をくりかえさなければならないのかを知ることができる。

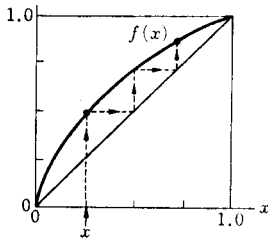


図 1.5

いわゆる精溜塔では、1つの塔の中が何段にも仕切られ、気化した物質が上段にのぼり、蒸溜がくりかえされるようになっている。そこで、精溜塔の設計には、リフレクション・チャートが用いられているが、くわしくは専門の文献を参照されたい。[2]

## 2. 数列の収束・発散——逐次近似法

図の表現の役割の1つは、物事を直観的に理解させることである。数列の収束・発散と漸化式の関係も、リフレクション・チャートを使えばよくわかることが多い。

数列  $\{x_i\}$  が  $\bar{x}$  に収束するときには、 $x_i$  も  $x_{i+1}$  も、ともに次第に  $\bar{x}$  に接近する。リフレクション・チャート上でいえば、点列が対角線上の1点  $(\bar{x}, \bar{x})$  に接近することになる。

したがって、数列が漸化式

$$(1) x_{i+1} = f(x_i)$$

で与えられる場合には、極限  $\bar{x}$  は、

$$(2) \bar{x} = f(\bar{x})$$

という関係を満たしている。このような点を、一般に、関数  $f$  の不動点という。

そこで、ある方程式を解こうとする際に、その方程式を、等価で、(2)式のような形のものにかきかえ、さらに、これに対応する(1)式のような漸化式をつくり、これによって作られる点列によって、不動点すなわち解に接近しようとする方法が、数値解析の分野では、しばしば用いられる。これを逐次近似法という。

逐次近似法によって解を求められるためには、少なくとも、その不動点を含むある区間の点から

出発するとき、点列が不動点に収束しなければならない。このような不動点を、**安定な不動点**という。ある不動点が安定であるための条件としては、たとえば、つぎのようなものが知られている。

「関数  $f(x)$  の不動点  $\bar{x}$  に対し、これを含むある区間  $D$  において、 $f(x)$  が連続であり、

$$(3) |f'(x)| < 1$$

が成立するとき、 $\bar{x}$  は安定な不動点である。」

漸化式(1)で作られる点列が、有限回でこの区間  $D$  に入れば、この点列は  $\bar{x}$  に収束する。このことが、リフレクション・チャート上でどのようになっているのかをみてみよう。

図 2.1 の関数  $f(x)$  は、 $\bar{x}$  と  $\bar{x}$  の2個所で対角線と交わっている。すなわち、 $\bar{x}$  および  $\bar{x}$  は、どちらも、関数  $f(x)$  の不動点である。また、関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  は、区間  $(a, b)$  において、その絶対値が1より小さい：

$$(4) |f'(x)| < 1 \quad x \in (a, b)$$

そして、 $\bar{x}$  はこの区間に含まれるが、 $\bar{x}$  は含まれない。いいかえれば、 $\bar{x}$  は安定な不動点であるが、 $\bar{x}$  では(4)式が成立しないから、 $\bar{x}$  は不安定である。

図 2.1 では、区間  $(a, b)$  の外にある1点  $x_0$  から出発して1つの点列を作っているが、この点列は数回の反復で区間  $(a, b)$  に入るのので、 $\bar{x}$  へ収束する。すなわち、方程式

$$(5) x = f(x)$$

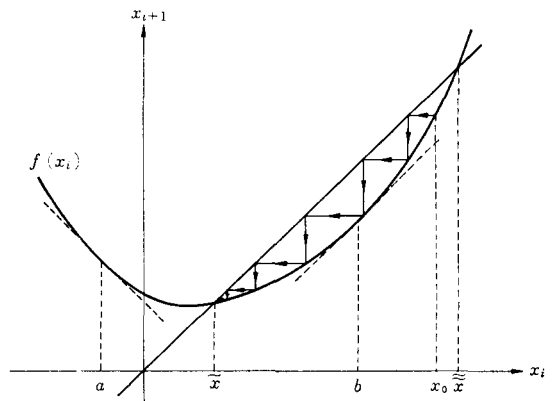


図 2.1

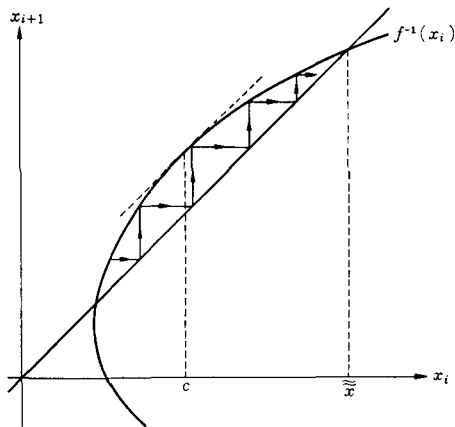


図 2.2

の1つの解が求まることになる。

もう1つの解 $\bar{x}$ へ収束する点列は、図2.1の関数による漸化式では得られない。もとの方程式と等価な別の漸化式で、上の条件を $\bar{x}$ について満たすようなものをさがしてこななければならない。たとえば、

$$(6) \quad x = f^{-1}(x)$$

という方程式である。 $f^{-1}(x)$ のグラフは、 $f(x)$ のグラフを、対角線を軸として回転すれば得られるから(図2.2)、こんどは、 $\bar{x}$ を含む区間で、

$$(7) \quad |f^{-1}(x)| < 1$$

となる。だから、(6)式に対応する漸化式によって点列を作れば、今度は $\bar{x}$ に収束する点列が得られる。もっとも、これは、図2.1において連結線の矢印を逆むきにしたものと同等だから当然のことだともいえる。

図2.1や2.2の点列は、階段状の連結線をたどって収束したが、不動点が安定であっても、(3)式において、 $f'(x)$ が負の値をとる場合には、くも

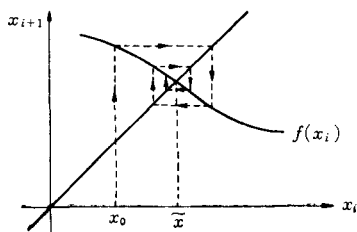


図 2.3

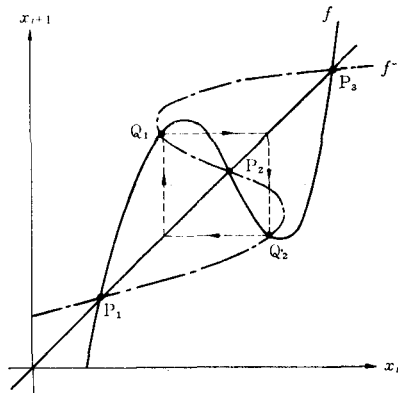


図 2.4

の巣状に振動しながら収束する点列が得られる。

つぎに、リフレクション・チャート上に、 $f$ と $f^{-1}$ のグラフを重ねて画いてみよう。一方が対角線と交われば、他方も同じ場所で対角線と交わる(図2.4、点 $P_1, P_2, P_3$ )。これは、つぎの2つの関係式

$$(8) \quad x = f(x)$$

$$(9) \quad x = f^{-1}(x)$$

が等価であることに対応している。

さらに、対角線以外の場所でも、これらが交わることがある。この場合には対角線を軸として対称の位置にもう1つの交点がある(図2.4、点 $Q_1, Q_2$ )。これは、 $f$ と $f^{-1}$ とが、対角線を軸として対称だからである。これらの点では、

$$(10) \quad f^{-1}(x) = f(x)$$

という関係式が成立しているわけだが、これは、

$$(11) \quad x = f(f(x))$$

という関係と等価である。いいかえれば、この関数 $f$ に対応する漸化式によって作られる点列が、点 $Q_1$ や $Q_2$ を通れば、

$$(12) \quad x_{i+2} = x_i$$

という関係が成立することになる。すなわち、 $Q_1$ および $Q_2$ によって、周期2のサイクルが形成されることになる。

安定な不動点の付近では、理論上、サイクルが形成されることはないが、漸化式の計算の際に、

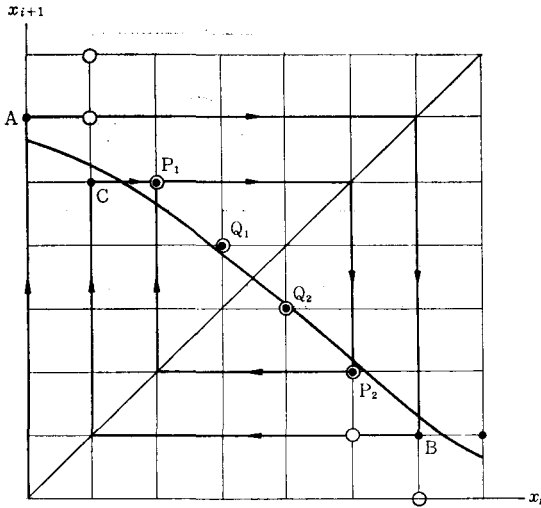


図 2.5

4捨5入等の操作が行なわれると、点列がサイクルに入って、収束しなくなることがある。いま、図 2.5 において、格子点だけが計算できる値だとすると、関数  $f(x)$  は黒丸で示した点におきかえられる。黒丸を、対角線を軸として回転したものを白丸で示した。黒丸と白丸が重なっている点、 $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  に点列がさしかかれば、サイクルが形成されるはずである。実際、点列が A 点までくれば、その後は、

$$ABCP_1P_2P_1P_2\dots$$

とつづいて、それ以上不動点には近づかないことになる。

漸化式を使って計算をするときには、この 4捨5入による振動や類似の現象がよく見られるから、桁数のとり方や初期値のとり方等には注意と工夫が必要である。

図 2.6 に 2~3 の例を示したが、3 以上の周期

をもつサイクルというものも考えられる。しかし、これをリフレクション・チャート上の作図でみつけるのはむずかしい。 $f^3, f^4, \dots$  の作図が、一般には困難だからである。サイクルの問題については、後の節で、別の観点から、もう少し話をしぼって考えてみることにしよう。

### 3. 薬価基準とうまみ幅モデル

OR のモデルを構成するうえにも、リフレクション・チャートを役立てることができる。1つの例として、わが国の医療保険制度における医薬品の価格——いわゆる薬価基準——の変動に関するうまみ幅モデルについて述べる。[3]

わが国の医療保険制度のもとでは、使用された医薬品の代金は、中央社会保険医療協議会が定める薬価基準に従って、社会保険診療支払基金から支払われている。この薬価基準は、例外的な事例をのぞいて、当該医薬品の実勢取引価格（医家が購入する価格）の累積分布の 90% 点を以って新薬価基準とする、いわゆる 90% バルク・ライン方式によって改訂されている。

この方式のもとにおける薬価基準の推移をモデル化するために、まず、上下限の仮定とよぶつぎのような仮定がもうけられた。すなわち、

「実勢取引価格  $p$  は、その薬価基準  $p_i$  をこえることなく、また、製造原価  $a_i$  と流通経費  $b_i$  の和

$$(1) \quad c_i : a_i + b_i$$

を下まわることはない。すなわち、次式が成立する。

$$(2) \quad c_i \leq p \leq p_i$$

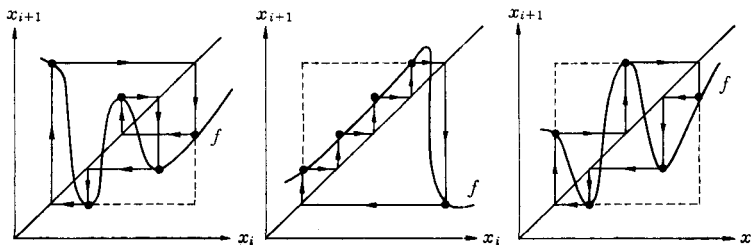
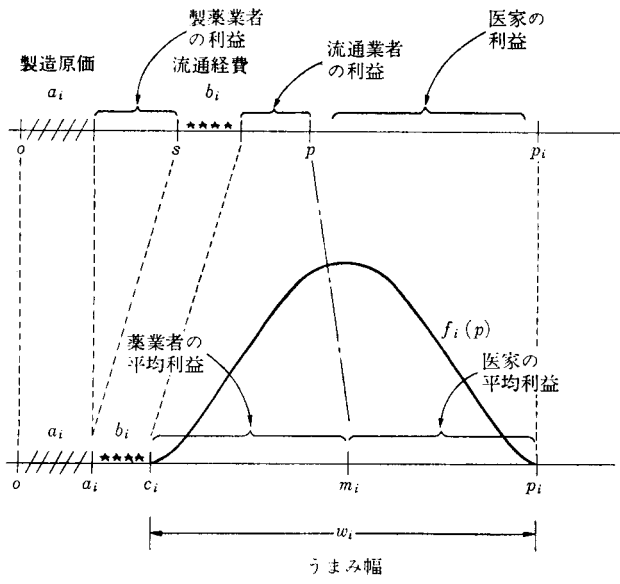


図 2.6



$p_i$ : 第  $i$  年度の薬価基準: 実勢取引価格の上限,  $p$ : 実勢取引価格,  $s$ : 製薬業者わたし価格,  $a_i$ : 製造原価,  $b_i$ : 流通経費,  $c_i$ : 実勢取引価格の下限,  $w_i$ : うまみ幅,  $m_i$ : 平均実勢取引価格,  $f_i(p)$ : 実勢取引価格の分布(密度関数)

図 3.1

この仮定の妥当性等に関する検証等については原論文にゆずることにして, この仮定のもとでは, 実勢取引価格は, 図 3.1 のように区間  $[c_i, p_i]$  上に分布することになる。

さて, このような状況では, 医家および薬業者(製薬業者と流通業者をあわせて薬業者とよぶ。)の第  $i$  年度平均利益はつぎのようになる。

(3) 医家の平均利益:  $u_i = p_i - m_i$

(4) 薬業者の平均利益:  $v_i = m_i - c_i$

ここに,  $m_i$  は第  $i$  年度平均実勢取引価格である。ここで, 区間の幅

(5)  $w_i = p_i - c_i$

をうまみ幅とよぶことにする。うまみ幅はまた, (3), (4)式から,

(6)  $w_i = u_i + v_i$

と書ける。すなわち, うまみ幅は, 薬業者と医家の平均利益の和である。いいかえれば, うまみ幅は, その医薬品 1 単位のもつ, 薬業者および医家にとっての経済的な有利さを示す尺度と考えることができる。

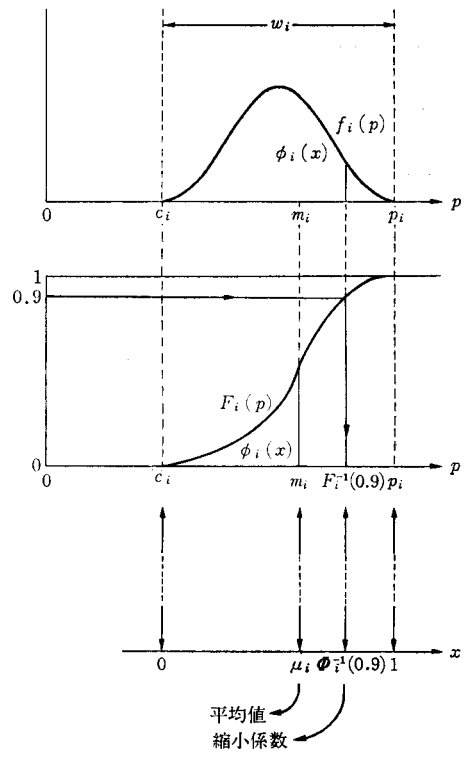


図 3.2

実勢取引価格は, このうまみ幅の上に分布している。(図3.2) そこで, これを単位として, 実勢取引価格を規準化しよう。すなわち第  $i$  年度の実勢取引価格の累積分布が,

(7)  $F_i(p) =$  取引価格が  $p$  以下であるものの割合で与えられるとき,

(8)  $x := (p - c_i) / w_i$

という新しい変数を導入し,

(9)  $\Phi_i(x) = F_i((p - c_i) / w_i)$

という関数を定義する。

$\Phi_i(x)$  の平均値を  $\mu_i$  とすれば, 平均実勢取引価格  $m_i$  は,

(10)  $m_i = c_i + \mu_i w_i = c_i + \mu_i (p_i - c_i)$

と書ける。

また, バルク・ライン水準 (=90%) に対応して,

(11)  $\pi_i := \Phi_i^{-1}(0.9)$

を縮小係数と定義すれば, 第  $i+1$  年度の薬価基準  $p_{i+1}$  は,

$$(12) \quad p_{i+1} = c_i + \pi_i w_i = c_i + \pi_i (p_i - c_i)$$

によって与えられる。これをうまみ幅モデルとよぶ。

ここでさらに、話を具体的にするために、**線形性の仮定**とよぶ、つぎの2つの仮定をおいてみた。

「(a) 実勢取引価格の下限  $c_i$  が年度によって変わらず一定である。すなわち、

$$(13) \quad c := c_0 = c_1 = \dots$$

が成立する。

(b) 実勢取引価格の規準化された分布関数  $\Phi_i(x)$  が年度によって変わらず、一定である。

したがって、 $\Phi_i(x)$  の平均値  $\mu_i$  や縮小係数  $\pi_i$  も一定で、

$$(14) \quad \mu := \mu_0 = \mu_1 = \dots$$

$$(15) \quad \pi := \pi_0 = \pi_1 = \dots$$

が成立する。」

この仮定は、必ずしもつねに成立することを期待してたてられたものではなく、物事の基準として設定されたものである。この仮定のもとでの、薬価基準の推移をリフレクション・チャート上に表示してみよう。そのために、(13)~(15)式を(10)および(12)式に代入すれば、

$$(16) \quad m_i = \mu p_i + (1 - \mu)c$$

$$(17) \quad p_{i+1} = \pi p_i + (1 - \pi)c$$

の2式が得られる。後者を**線形うまみ幅モデル**という。これらを、リフレクション・チャート上に

とったのが図3.3の直線  $L_q$  および  $L_m$  である。

薬価基準  $p_i$  は、漸化式(17)によって与えられるから、リフレクション・チャート上では、直線  $L_q$  と対角線  $L_d$  の間にはさまれる階段をつくれば、薬価基準の推移が得られる。また、同時に、平均実勢取引価格を表わす直線  $L_m$  と、実勢取引価格の下限  $c$  を表わす直線  $L_c$  を画いておけば、図3.3に示したように、うまみ幅  $w_i$ 、医家および薬業者の平均利益、 $u_i$  および  $v_i$  を図上で直接読みとることができる。

図3.3をみれば、線形うまみ幅モデルにおいて、薬価基準がどのように下降し、下限  $c$  に近づいてゆくか、また、うまみ幅および医家と薬業者の利益がどのようにゼロに近づいてゆくかがわかる。

うまみ幅がゼロに近づくのは、実際のところ、バルク・ライン方式による価格統制の大きな問題点である。うまみ幅がゼロになれば、薬業者はそ

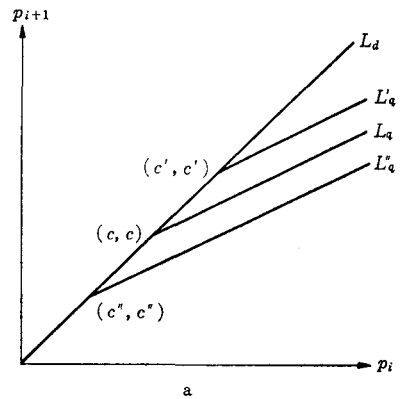


図 3.3

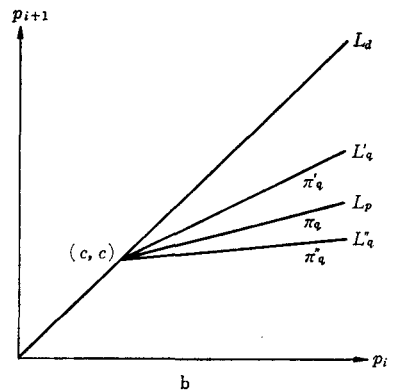


図 3.4

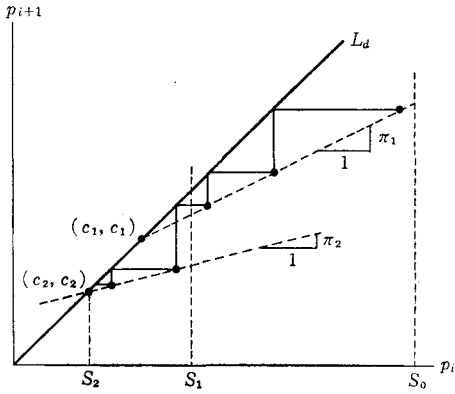


図 3.5

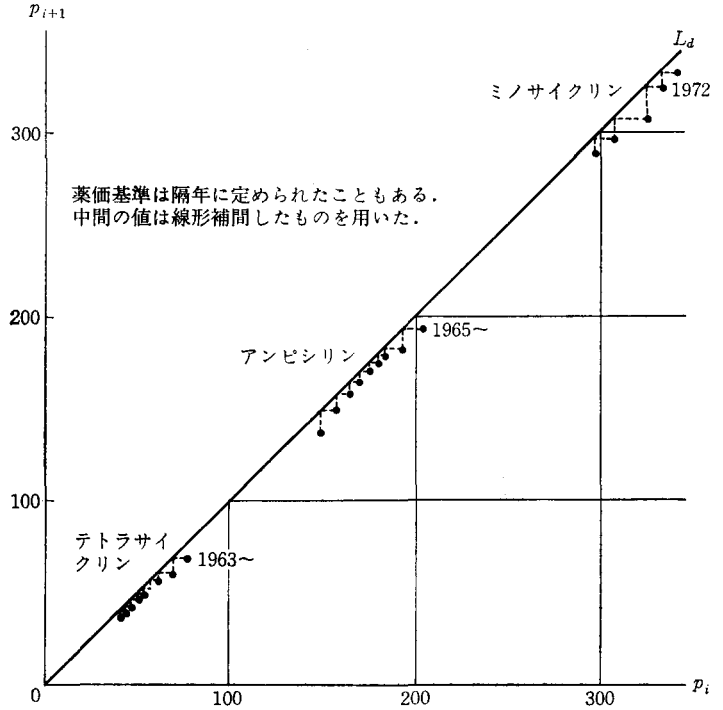


図 3.6

の医薬品を供給しなくなってしまう。このような事態になれば、別途、薬価基準を設定しなおさなければならないが、それ以前にもいろいろな手がとられる。技術的改良や流通経費を削減して下限  $c$  を下げようとしたり、実勢取引価格の分布を、調査期間だけでも、右側へおし上げるよう努力して、縮小係数が小さくならないように計る等である。

それゆえ、すでに述べたように、線形性の仮定は、そのままの形で成立を期待するというよりは、実勢取引価格の下限  $c_i$  や、縮小係数  $\pi_i$  がどのように変化したかを考える手がかりにするためのものと考えべきである。線形うまみ幅モデルにおいて、下限  $c$  が変動すれば、図 3.4 a のように、切式に対応する直線  $L_q$  は上下に平行移動する。また、縮小係数が変動すれば、図 3.4 b のように、勾配が変化する。

そこで、薬価基準表に収載された薬価基準をリフレクション・チャート上にプロットしたものをみれば、下限  $c_i$  や縮小係数  $\pi_i$  の変化をある程度

まで読みとることができるはずである。すなわち、図 3.5 のように、リフレクション・チャート上の点列に、何本かの線分をあてはめ、対角線との交点や勾配を調べれば、少なくとも原理的には、下限  $c_i$  と縮小係数  $\pi_i$  を推定することができる。

しかし、実際のデータをプロットしたもの(図 3.6)をみると、これから直接数値を推定するのはちょっと心もとないようにみえる。むしろ、図 3.7 のように、下限や縮小係数の標準的な変化に対する、リフレクション・チャート上のレスポンスを作って、チャートの鑑識眼をやしなっておき、これによって、実際のデータをプロットしたものから、背後の変動を洞察すべきであろう。

#### 4. 擬似乱数列発生メカニズム

電子計算機のプログラムによって発生される擬似乱数列は、モンテ・カルロ法やシミュレーションを行なううえで、不可欠のものである。このような擬似乱数列は、大部分、漸化式

$$(1) x_{i+1} = f(x_i)$$



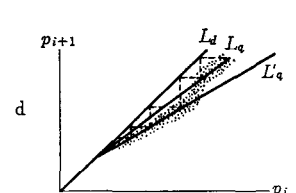
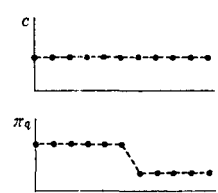
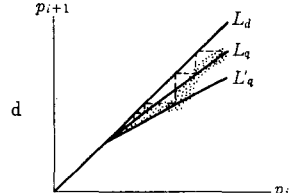
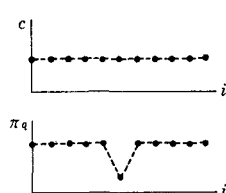
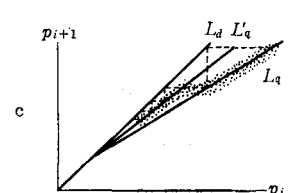
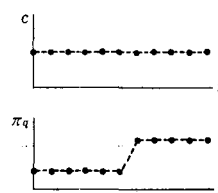
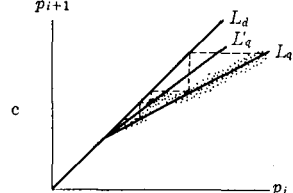
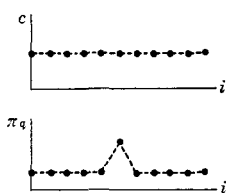
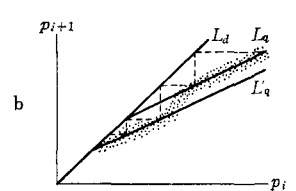
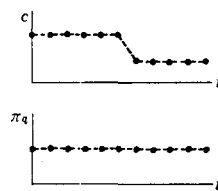
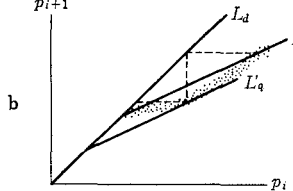
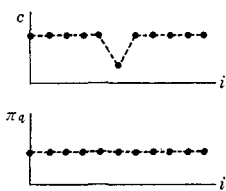
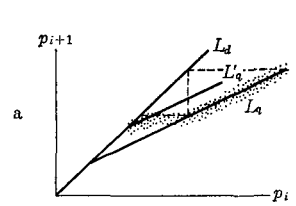
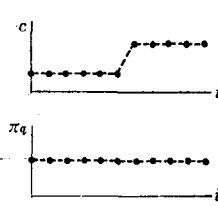
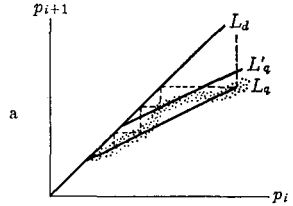
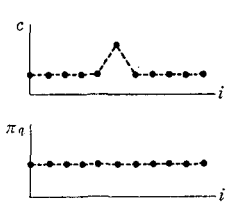


図 3.7 (a)

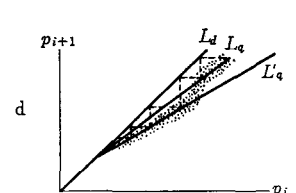
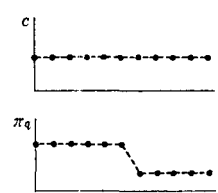
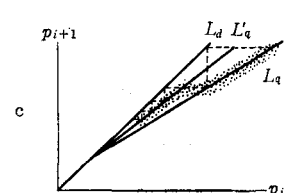
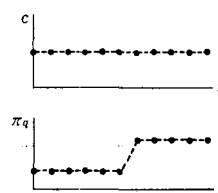
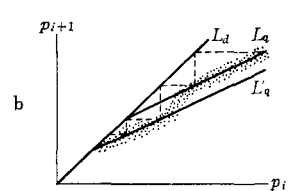
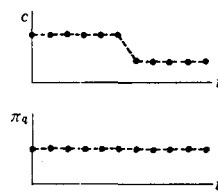
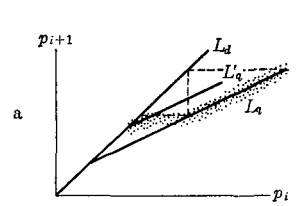
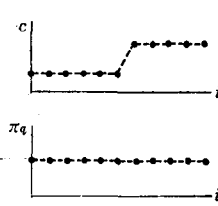


図 3.7 (b)

によって作られる数列であるが、この数列が一様乱数列としての性質を有するようにするため、 $f(x)$  の選び方にいろいろ苦心がはらわれている。

この問題のむずかしさは、とくに、「乱数列とは一体何か？」という定義がさほど明確でないという点にある。乱数とは、しいて言えば、サイコロを振ったときに得られるような数列、ということになるが、そうすると今度は、サイコロを振ったときに得られる数列というものの特性を記述しなければなくなる。——これがむずかしい。結局のところ、乱数列ならばこうあってほしいという要望事項の、不完全でしかも矛盾にみちた列挙をすることで我慢しなければならなくなる。

これらの要望事項を満たすために、どのような

配慮がされているのか？ その2~3は、リフレクション・チャート上に(1)式をえがくことによって原理を理解することができる。ここでは、漸化式(1)として、実用にも供され、構造が最も簡単な乗算合同法を例にとりて、2~3考えてみることにしよう。

乗算合同法 [4] (multiplicative congruent method) は、漸化式

$$(2) \quad x_{i+1} \equiv \lambda x_i \pmod{P}$$

によって、区間  $(0, P)$  上の一様乱数を作ることを目論むものである。とりあえず、

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda = 0.5, 2.0 \\ P = 20 \end{cases}$$

の場合について(2)を画いたのが図 4.1 (a), (b)であ

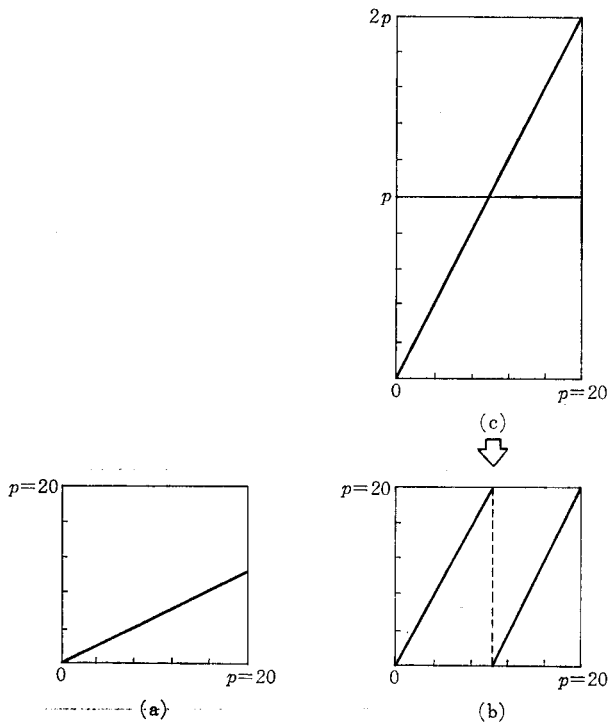


図 4.1

る。

$\lambda > 1$  の場合には、図 4.1 (c) に示す  $\lambda x_i$  のグラフを、 $P$  ごとに切りはなして重ね合わせて得られるグラフだから、 $f(x)$  は  $\lambda$  個の連続な区間からなりたつ鋸歯状の図形になる。

漸化式(2)が作る数列が、区間  $(0, P)$  上での一様乱数列としての性質をもつためには、関係式

$$(4) f((0, P)) = (0, P)$$

が成立しなければならない。つまり、区間  $(0, P)$  上に、 $f(x)$  の値域がおよばない所があると、その値は、数列の中には決して現われないことになり、具合がわるい。図 4.1 からも明らかのように、このためには、

$$(5) \lambda > 1$$

でなければならない。

さらに、つぎのような点から考えると、 $\lambda$  は 1 より大きいば

かりでなく、大きければ大きいほどよいことになる。実際、 $\lambda$  が小さいと、 $f(x)$  が連続に増加する区間が長くなり、数列の中に、増加あるいは減少する長い連ができてやすくなってしまう。

たとえば、

$$(6) \lambda = 2, 4 ; P = 20$$

の 2 つの場合を比較してみよう。いま、数列の中の要素  $x_i$  が  $x_i = 1$  となると、それにひきつづく要素は、それぞれ、

$$(7) \lambda = 2 \text{ の場合 :}$$

$$x_i = 1, 2, 4, 8, 16, 12$$

$$(8) \lambda = 4 \text{ の場合 :}$$

$$x_i = 1, 4, 16, 4$$

となる。  $x_i = 19$  となれば、それぞれ、

$$(9) \lambda = 2 \text{ の場合 :}$$

$$x_i = 19, 18, 16, 12, 4, 8$$

$$(10) \lambda = 4 \text{ の場合 :}$$

$$x_i = 19, 4, 16$$

となり、 $\lambda = 2$  の場合には、いずれも長い増加（減少）する連ができている（図 4.2）。

たしかに、サイコロを振って得られる数列の場合でも増加（減少）する連が現われることはあるが、上の  $\lambda = 2$  の場合のように、あからさまに現われてもっては不自然である。そこで、 $\lambda$  としては、大きな数がのぞましい、ということになる。

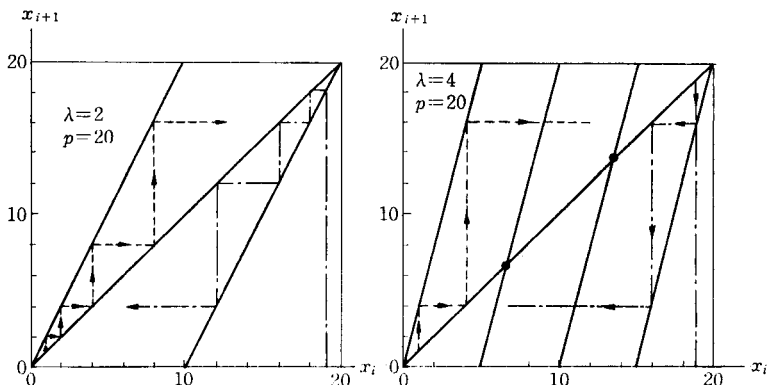
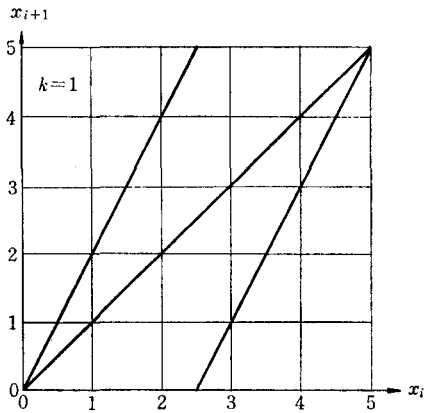
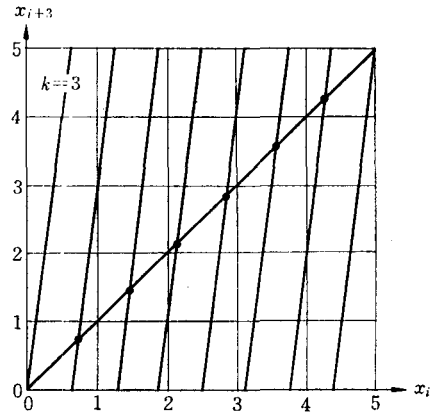


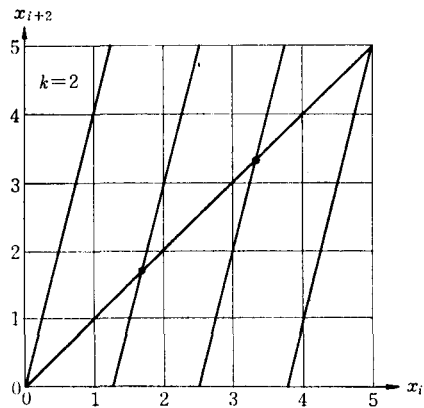
図 4.2



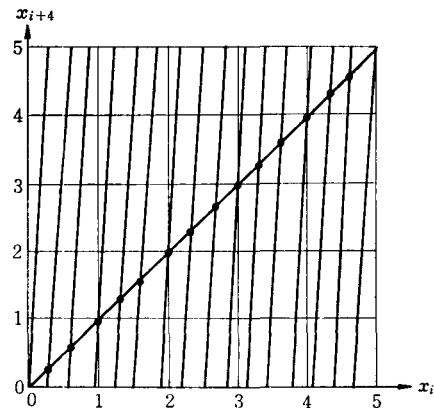
(a)



(c)



(b)



(d)

図 4.3

ところで、 $f(x)$  の不動点の数は、 $[\lambda-2]$  個である(図 4.2 参照)。だから、 $\lambda$  を大きくすると、不動点の数がふえる。そこで、不動点をめぐる問題を考察しなければならないが、ここでは、問題をちょっと一般化して、サイクルという観点から考えてみよう。不動点も、周期 1 のサイクルと考えられるからである。

関係式

$$(11) \quad x_{i+k} = x_i$$

がすべての  $i$  について成立するとき、数列  $\{x_i\}$  は周期  $k$  のサイクルをなすという。  $x_{i+k}$  は

$$(12) \quad x_{i+k} = f^k(x_i) = \overbrace{f(f(\dots f(x_i)))}^k$$

と書ける。そこで、

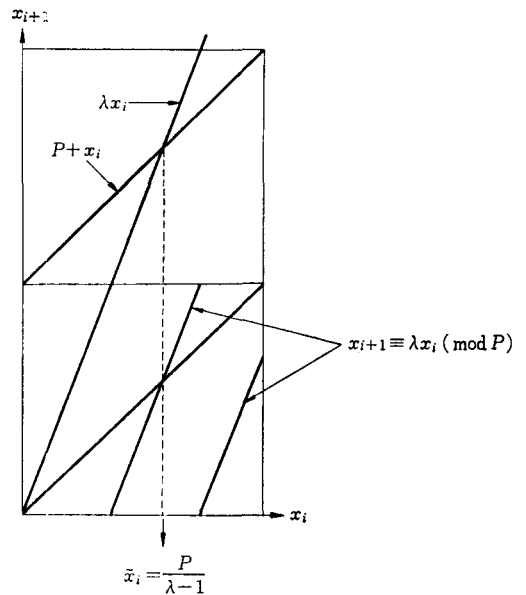


図 4.4

周期  $k$  のサイクルの要素は、 $f^k(\cdot)$  の不動点の集合

$$(13) Z = \{x \in (0, P) \mid x = f^k(x)\}$$

に属する数だということになる。

いま、

$$(14) x_{j+1} = f^k(x_j)$$

という漸化式を考えてみよう。 $f^k(x)$  の不動点達が安定であれば、この漸化式(14)によって作られる点列は、その近くへゆくとき吸いこまれてしまう。

このことを、もとの漸化式

$$(1 \text{ bis}) x_{i+1} = f(x_i)$$

について言えば、点列  $\{x_i\}$  が次第にそのサイクルに吸いこまれて、‘一緒にまわり出す’ことになる(図 1.9 でも周期 2 の安定サイクルを見た.)。

このようなサイクルを**安定サイクル**という。周期の短い安定サイクルが存在することは、擬似乱数として、もちろん望ましいことではない。

そこで、漸化式(12)をリフレクション・チャート上に画いてみよう。 $\lambda=2, P=5, k=1, 2, 3, 4$  の場合が図 4.3 (a), (b), (c), (d) に示されている。この図からもわかるように、関数  $f^k(x)$  のグラフは勾配が  $\lambda^k$  の鋸歯状の形をしており、不動点の位置は、

$$(15) x_{k,l} = \frac{lP}{\lambda^k - 1}, \quad l=1, 2, \dots, [\lambda^k - 2]$$

である(図 4.4 参照)。関数  $f^k(\cdot)$  の勾配が  $\lambda^k$  であるので、 $\lambda > 1$  であるかぎり、どの不動点も安定でなく、したがって、安定サイクルは存在しない。

サイクル、なかんずく周期の短いサイクルの存在は、たとえ安定でなくとも、好ましいことではない。サイクルを生ずるような点は、(15)式によってわかっているのだから、初期値を与えるときに、そのような値をさければよいわけだが、ここで、実用上の問題が起こってくる。——デジタル式電子計算機では、有理数しか扱うことができないのである。実質上同じことだから、話をはつきりさせるため、整数しか扱えないものとして、

図 4.3 にも示した、 $\lambda=2, P=5$  の場合をもう少し詳しく観察してみよう。

まず、 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  および  $\varphi_3(x)$  をみると、これらの関数の不動点で、定義域  $(0, P)$  に属し、しかも整数であるものは存在しない。それに対し、 $f^4(x)$  についてみれば、1, 2, 3 のすべてが不動点になっている。そこで、たとえば 1 を初期値として数列を作れば、

$$1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3$$

という長さ 4 サイクルをくりかえすことになる

不動点の位置は(15)式によって与えられるから、ある  $k$  に対して、

$$(16) \frac{iP}{\lambda^k - 1} = j, \quad 0 < i, 0 < j < P$$

なる整数  $(i, j)$  が存在すれば、

$$j, 2j, \dots < P$$

という数の中に周期  $k$  のサイクルが生ずる。とくに、 $j=1$  の場合には、(16)式は、

$$(17) \lambda^k - iP = 1$$

すなわち、

$$(18) \lambda^k \equiv 1 \pmod{P}$$

となる。すなわち、この漸化式によって作られる数列は、

$$(19) K := \min \{k \mid \lambda^k \equiv 1 \pmod{P}\}$$

という周期をもつサイクルである。

図 4.3 に示した、 $\lambda=2, P=5$  の場合についてみれば

$$\lambda^1 = 2$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda^3 = 8 \equiv 3 \pmod{5}$$

$$\lambda^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}$$

であるから、周期 4 のサイクルが現われる。また、図 4.3 からもあきらかなように、この場合には、(16)式で  $j \neq 1$  となるようなタイプのサイクルは現われない。

$\lambda$  や  $P$  が整数であるかぎり、(18)式を満たすような  $k$  が必ず存在する。別のいい方をすれば、われわれは  $P-2$  個の整数しか使えないのだから、ど

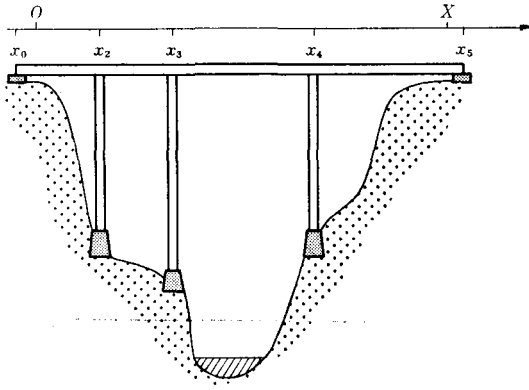


図 5.1

のような漸化式であろうと、 $P-1$  個目には同じ数に到達しなければならず、そして、同じ漸化式が使われているかぎり、同じ数列がくりかえされることになる。つまり、サイクルはいずれにせよ避けられないのである。

そこで、 $\lambda$  や  $P$  をうまく選んで、 $j=1$  のタイプ以外のサイクルが起らないようにし、(図4.3では実際そうになっている。)しかも、 $j=1$  のタイプのサイクルも、できるだけ周期が長くなるようにすることが問題になる。しかし、ここから先の議論は、もはや、リフレクション・チャート上の議論というより、整数論の領分なので、これ以上は立入らない。一例として、Lehmer[4]によれば、

$$\begin{cases} \lambda = 23 \\ P = 10^8 + 1 \end{cases}$$

のとき、

$$K = 5,882,253$$

となることをつけかわえておく。

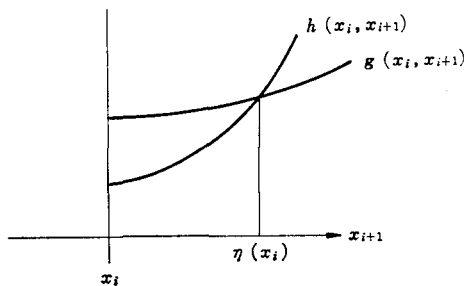


図 5.3

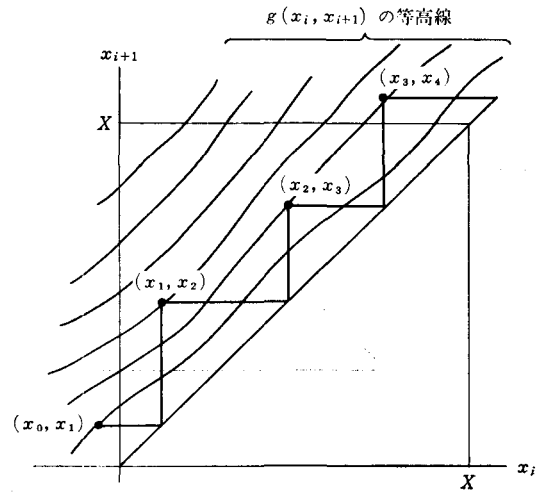


図 5.2

## 5. 最適化問題の図式解法

本節では、点列  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  をうまく選んで、‘費用’

$$(1) \quad g(x_0, x_1) + g(x_1, x_2) + \dots + g(x_{n-1}, x_n)$$

を最小にする最適化問題を考える。ここに、点列  $\{x_i\}$  は、

$$(2) \quad x_0 \leq 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq X \leq x_n$$

という条件を満たすものとする。X は与えられた定数。また、 $n$  はあらかじめ定められてはおらず、これも含めて(1)の最小化をはかりたい。

このような問題は、取替問題、層別の問題、折れ線による関数近似、ある種の制御問題等の他、橋梁の支柱の位置の決定等にもなっており(図5.1)。

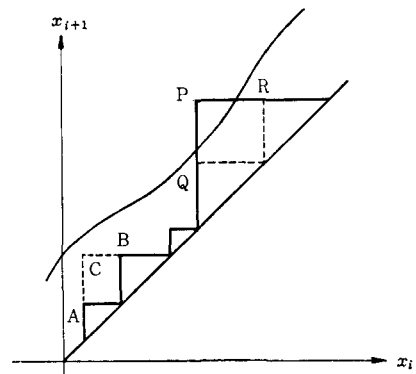


図 5.4

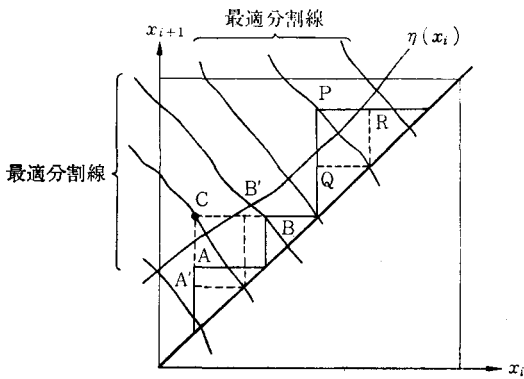


図 5.5

点列  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  をリフレクション・チャートに打点すれば、図 5.2 のような階段がえられるが、同時に、(1) 式を構成する関数  $g(x_i, x_{i+1})$  の等高線をかきこんでおけば、その点列に対応する目的関数(1)をたやすく計算できる。

つぎに、点列  $\{x_i\}$  の引きつづく 2 要素  $x_i, x_{i+1}$  の間に、もう 1 つの‘分割点’を挿入した場合の得失を考えてみよう。いま、

$$(3) \quad h(x_i, x_{i+1}) := \min_{x_i \leq \tau \leq x_{i+1}} [g(x_i, \tau) + g(\tau, x_{i+1})]$$

という関係を考えれば、 $h(x_i, x_{i+1})$  は  $x_i, x_{i+1}$  の間に最も有利なやり方で、もう一つの‘分割点’を挿入した場合の、 $x_i, x_{i+1}$  間の‘費用’である。 $h(x_i, x_{i+1})$  と  $g(x_i, x_{i+1})$  のグラフを画けば、通常、図 5.3 のように、ある点  $\eta(x_i)$  を境として、

$$(4) \quad \begin{cases} g(x_i, x_{i+1}) \geq h(x_i, x_{i+1}) & x_i \leq x_{i+1} \leq \eta(x_i) \\ g(x_i, x_{i+1}) \leq h(x_i, x_{i+1}) & \eta(x_i) \leq x_{i+1} \end{cases}$$

となるであろう。

すなわち、 $x_{i+1} > \eta(x_i)$  の場合には、 $x_i, x_{i+1}$  の間に、少なくとも、もう 1 つの‘分割点’を挿入して‘費用’をへらすことができる。図 5.4 のように、リフレクション・チャート上に  $\eta(x_i)$  のグラフ(臨界曲線とよぶ。)を記入しておけば、階段の A, B のような部分は C に、P のような部分は 2 つにわけて(わけ方についてはつぎにのべる。)費用を減らすことができる。

(3) 式において、最小値を与える  $\tau$  は、 $x_i$  および  $x_{i+1}$  の関数と考えることができる。これを、

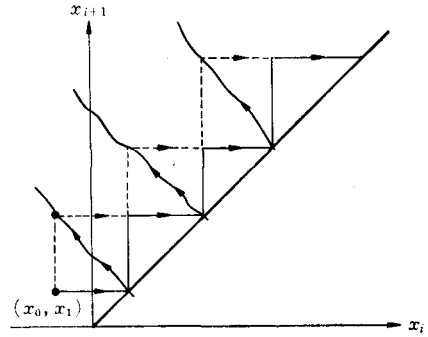


図 5.6

$$(5) \quad \tau(x_i, x_{i+1})$$

とかく。関数  $\tau(x_i, x_{i+1})$  の等高線をリフレクション・チャートに書きこみ、これを最適分割線とよぶ。(3) 式からただちにわかるように、

$$x_i \leq \tau(x_i, x_{i+1}) \leq x_{i+1}$$

であるから、

$$\tau(x, x) = x$$

したがって、 $\tau(x_i, x_{i+1})$  の等高線が対角線と交わる点の座標は、等高線がとる値と等しい。そこで、図 5.5 において、階段の AB のような部分は、C を通る最適分割線を使って、A'B' におきかえ、P のような部分は、P を通る最適分割線をつかって、Q, R という 2 つの部分におきかえれば、‘費用’を減らすことができる。

さて、以上 3 つの補助曲線： $g(x_i, x_{i+1})$  の等高線、臨界曲線および最適分割線をもちいて、最適な点列を構成する方法をのべる。図 5.6 に示すように、 $(x_0, x_1)$  を適当に選び、

$$x_1 = \tau(x_0, y)$$

となる  $y$  を求めて  $x_2$  とする。一般に、

$$x_{i+1} = \tau(x_i, y)$$

となる  $y$  を求めて  $x_{i+2}$  としてゆけば、 $x_{i+1}$  が  $x_i$  と  $x_{i+2}$  を最適な位置で分割しているような点列  $\{x_i\}$  を構成することができる。

さらに、いくつかの異なる  $(x_0, x_1)$  について同様の点列を求め、これらの中で、階段が臨界曲線の下側にあり、しかも、2 つの段をあわせれば、臨界曲線の上側にできるようなものについて、‘費

用'を等高線を求めて比較し、最小となるものに近づいてゆけばよい。

この方法は、図を用意するのに、普通、電子計算機とディスプレイ装置の助けをかりる必要があるが、それからの操作はすべて図上で行なわれるので、見通しがよく、また、感度分析もたやすくできる。さらに、精度の問題も、2~3の例題について試みた結果、十分実用にたえることがわかった。

## おわりに

グラフィック・ORの特集ということで、原稿の依頼をいただいた。筆者は、日頃から、なにごとによらず、図表を画いて理解することが大好きなので、さっそく執筆にとりかかったが、途中で気分が白けてしまうことが幾度もあった。

というのも、図表という強力な表現手段のかたわらに、文章による説明を書くのが、何ともまだるっこく、冗長に思われて仕方がなかったからである。

実際、数ページにわたる文章による記述で意をつくすことのできないことが、1枚の図表によって一瞬のうちに伝えられてしまうことも、まれではない。図的表現は、それほどの情報伝達力をもちうるものなのだ。

ただ、困ったことに、図表による表現は、多くの場合、一人歩きできず、文章による説明を、補助手段として要求している。これは、図表による表現法に関して、文章における文法や成句に相当するものが、確立されていないのみならず、図表の形式そのものが、分類・命名されていないことに原因があるのではなからうか？

ORのみならず、各専門分野において、開発された図的表現の方法を、おりにふれて、収集・分類しておくことが、ぜひ必要だと思う。今回、筆者が図的表現の一方法を取りあげたのも、このような考えにもとづくものである。読者諸兄の、OR活動の一助となれば幸いである。

なお、平本 巖(日科技研)、日比野真一、川瀬武志、福川忠昭、川島弘尚および、木村桂一(慶応大学)の諸氏には、原稿を読んでいただき、ご忠告、ご助言をたまわった。ここに、感謝の意を表したい。

## 参考文献

- [1] Мысовских, И. П. "Лекции по методам вычислений" ФИЗМАТГИЗ, 1962
  - [2] 藤田重文 "化学工学" 岩波全書 1958
  - [3] 柳井 浩, 嶋口充輝 "バルク・ライン方式による基準価格決定に関する2~3の考察——薬価基準をめぐって——" *JORSJ*, Vol. 21, No. 3 Sept., 1978
  - [4] Lehmer, D. H. "Mathematical methods in large scale computing unit" *Annals of Computation Laboratory of Harvard Univ.* Vol. 26 (1951)
  - [5] Takasawa, Y. and H. Yanai "An Approximate Solution of Optimal Allocation Problem by a Nomograph" *Computing* 14, (1975), Springer Verlag
- (やない・ひろし 慶応義塾大学)

## 事例報告の原稿募集!

ORの特徴は実践にあると言われていました。実際的な応用をぬきにした理論ということはORでは考えられません。ところがわが国のOR界の現状では理論的な研究発表に比べて実践的な事例の報告がやや少ない感があります。

本誌でも以前から会員の皆さんからの事例報告をお願いしていましたが、まだ十分な成果をあげているとは言えません。その理由のひとつとしては企業の秘密ということもあると思いますが、ORの実践例というものが理論的な目新しさがなければ価値が少ないと誤解されていることも一因となっている気がします。

もっと気軽に、「こうやったらこれだけ利益があった」とか、「この問題はこう処理したが、もっとよい方法はないか」というような事例や問題提起をどしどししていただきたいと思います。会員同士の知恵の交換というつもりでこの欄の活用をお願いいたします。

(編集委員会)