Voronoi 線図の効率的構成法に関する研究

（指導教官　伏見正則助教授）

東京大学大学院工学系研究科　情報工学専門課程　現在(財)電力中央研究所　大屋隆生

はじめに

Shamos [4]以来，幾何学図形の計算機アルゴリズムを扱う計算幾何学の分野が確立されたが，その中心課題のひとつとして Voronoi 線図がとりあげられている．また，Voronoi 線図は地理情報処理，都市計画，生態学，画像処理，数値計算法などの幅広い分野に登場する．Voronoi線図とは平面上にいくつかの母点が与えられたとき，平面を各母点をひとつだけ含む領域（勢力圏）に分割するものであって，各領域のどの点もその属する領域の母点のほうがそれ以外の母点より近いように分割されたものである．数式による定義は次のようになる．

平面上に n 個の点（母点）P_i（$i=1,\ldots,n$）が与えられたとき，P_i の“勢力圏”(Voronoi 多角形とよぶ) V_n (P_i) とは，

$$V_n\ (P_i)=\bigcap_{j=1}^{n}\{P\,|\,d\,(P,P_i)\leq d(P,P_j)\}$$

(d:Euclid 距離) で定義される．Voronoi 線図とは，

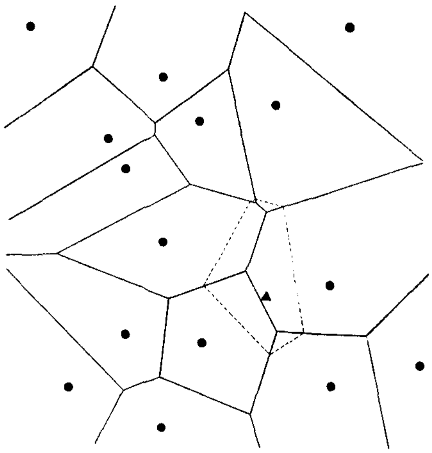

図 1　母点の添加にともなう修正
実線は●印の点の集合の Voronoi 線図，破線は添加した点▲の Voronoi 多角形

V_n (P_i) $(i=1,\ldots,n)$ による平面の分割 V_n である．

Voronoi線図の構成法としては，最悪の場合の計算量が O $(n\log n)$ の再帰二分法 [5] と O (n^2) の逐次添加法[1]が知られている．本論文において提案する逐次四分添加法は，逐次添加法における添加順序を四分木を用いて定めたものであり，平均的な計算量が母点の数 n に比例するように改良されている．

1.　逐次添加法

逐次添加法は，m 個の母点 P_i（$i=1,\ldots,m$）から成る Voronoi 線図 V_m に新たにひとつの母点 P_{m+1} を添加して V_{m+1} を作る操作を繰り返す方法である．母点 P_{m+1} の添加に必要な操作は以下のとおりである：

（I）　P_i $(i=1,\ldots,m)$ の中で P_{m+1} に最も近い点を求める（点位置決定とよぶ）．

（II）　P_{m+1} のVoronoi 多角形を求め，V_m のうち P_{m+1} の Voronoi 多角形の内部を消去する（図 1）．

（I）は，母点 P_i $(i=1,\ldots,m)$ のうちの適当な母点（出発点とよぶ）から始めて，V_m において Voronoi 辺を共有する母点の中から P_{m+1} により近い母点を探すことを繰り返す．その際できるだけ P_{m+1} に近い母点を出発点に選ぶ必要がある．また（II）では，P_{m+1} の近傍の母点のみが計算の手間にかかわるので，P_{m+1} の近傍の母点分布の相似性を保つようにすれば，各段の（II）の平均的な手間は m と無関係になる．

以下では母点が正方形内に分布していると考える．まず，次のような逐次添加法における工夫が考えられる．

α をパラメータとして $k=\lfloor\alpha\sqrt{n}\rfloor$ と定め，正方形の各辺を k 等分して k^2 個のセルを作り，母点をセルに振り分ける．k^2 個のセルにあらかじめ（たとえば図 2 の spiral 巻出し順のように）順番をつけておき，その順にしたがってセル内の母点をとり出して添加を行なう．その際，点位置決定の出発点としては，直前に添加した母点を用いる．この工夫により逐次添加法の平均的な計算量は何もしない場合に比べて減少するが，1 点あたりの計算時

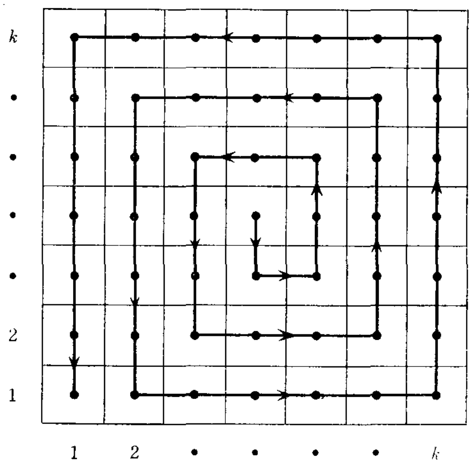

図 2　spiral 巻出し順

間は n とともに増加する．(§4参照)

2.　逐次四分添加法

逐次四分添加法は，逐次添加法において母点の添加順序および点位置決定の出発点を四分木を用いて以下のように定めたものである．ここで四分木の葉は単位正方形を 4^M 等分したセルに対応し，深さ k の節点は単位正方形を 4^K 等分した正方形（$=4^{K-M}$ 個のセルの合併）を表わし，深さ $k+1$ の節点4個の親である．

(1) αをパラメタとして $M=\lfloor\log_4(\alpha^2 n)\rfloor$ と定め，正方形の各辺を 2^M 等分して，4^M 個のセルを作り，母点をセルに振り分ける．

(2) 四分木の葉 r に対応するセル $(I(r), J(r))$ を以下の手順により定める．

```
c:=⌊2^M/3⌋; I(0):=C;J(0):=C;
u:=(−1)^M; m:=1; r:=0;S:=2c+u;
for t:=1 to M do
  begin
  for p:=1 to m do
    begin
    r:=r+1;I(r):=S−I(r−m);
    J(r):=J(r−m)
    end;
  m:=2m;
  for p:=1 to m do
    begin
    r:=r+1;I(r):=I(r−m);
    J(r):=S−J(r−m)
    end;
  m:=2m; u:=−2u; S:=s+u
  end
```

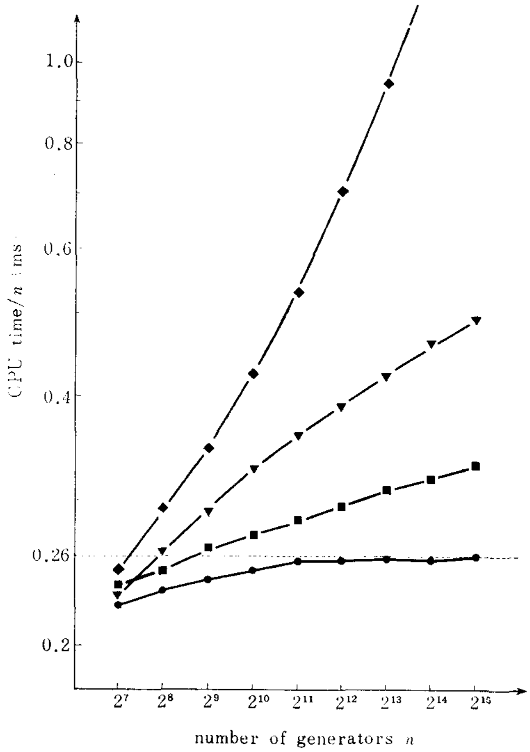

図 3　各種算法による1点あたりのCPU時間
▼：再帰二分法　◆：逐次添加法（工夫なし）■逐次添法（Spiral 巻出し順）　●：逐次四分添加法

(3) セル（＝四分木の葉）を番号順に探索し，母点が含まれていれば，任意に1つを選んで，その葉の空の祖先の節点すべてにその母点を書き込む．

(4) 四分木の根から幅優先（breadth−first；ただし同じ深さの節点は右側優先）で木の節点を調べ，未添加の母点が含まれていれば，その母点を添加する．点位置決定の出発点としては，その節点の親の節点に書き込まれている母点を用いる．

3.　計算機実験

本論文で提案した逐次四分添加法の効率を従来の再帰二分法，逐次添加法および工夫を加えた逐次添加法（spiral 巻出し順）と比較するため，正方形内にランダムに一様分布する n 個の母点に対する Voronoi 線図 V_n を構成するための CPU 時間/n を図3に示す．(図中のプロットは10組のパターンに対する平均値を示す；東京大

学大型計算機センターHITAC M-280H, VOS3/JSS4, 最適化 FORTRAN77, OPT＝2による）

他の算法では1点あたりの計算時間が n とともに増加するのに対し，逐次四分添加法（$\alpha=1$）では n によらずに0.26ms程度である．なお，Voronoi線図を表現するためのデータ構造としては標準的データ構造[2]を用いた．逐次四分添加法のパラメタとしては $\alpha=1$ がよいこと，また逐次四分添加法は母点分布の非一様性に対しても十分頑健なことが計算機実験により確かめられた．

さいごに

逐次四分添加法は，平均的な計算量が母点の数 n に比例する程度にまで改良されており，母点分布の非一様性に対しても十分頑健であるから，実際的な算法として推奨される．紙面の都合で詳しくはふれることができなかったが，Voronoi線図を表現するデータ構造としては，計算時間の短さ，プログラムの書きやすさ，汎用性の観点から，記憶領域を節約したHorspoolのデータ構造よりも，標準的デタ一構造がよい[3]．一般化Voronoi線図[2]や，多次元Voronoi線図においても逐次添加の手法を用いることができると予想される．

参考文献

[1] Green, P. J. and Sibson, R.: Computing Dirichlet Tessellation in the Plane. The Computer Journal, Vol. 21 (1978), pp. 168-173

[2] 伊理　正夫，他：地理的情報の処理に関する基本アルゴリズム．日本OR学会報文集，1983

[3] Ohya, T., Iri, M. and Murota, K.: Improvements of the Incremental Method for the Voronoi Diagram with Comparison of Various Algorithms. Submitted to Journal of the Operations Research Society of Japan

[4] Shamos, M. I.: Computational Geometry. Ph. D. Thesis, Yale University, 1978

[5] Shamos, M. I. and Hoey, D.: Closestpoint Problems. Proceedings of the 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, New York, 1975, pp. 151-162