

# 経済データの時系列分析と予測 (1)

高 森 寛

## 1. はじめに

確率過程理論に基礎をおく時系列分析は、科学・工学の分野では歴史は浅くはない。一般的には、予測や制御の問題に関連して、定常確率過程をスペクトル表現する、いわゆる“周波数領域”からのアプローチが中心であった。この方法を経済時系列の解析に応用しようとする試みも、いくつかなされてきたが、なかなか思うような成果が得られにくい面があった。その理由としては、ひとつには、スペクトルを推定するに必要な十分長い期間の経済データは、一般には得られにくいことが挙げられる。もうひとつは、経済など諸々の社会現象の諸変数には、定常時系列データとみなされるものは、まずほとんどないといってよいほど、少ないことも挙げられる。

10年少しほど前から、時系列を簡単な自己回帰・移動平均モデル (autoregressive moving-average model) すなわち ARMA モデルといわれるもので表現して、“時間領域”で分析する方法がつかわれるようになってきた。その方法については、Box と Jenkins の著書 [2] がくわしく紹介している。非定常なデータについても、なんらかの階差をとる操作をほどこして、定常とみなせるものに変換できるような時系列データは、特に、定質非定常時系列 (homogeneous non-stationary time series) と呼ばれ、取扱いが可能である。経済や、他の社会現象のデータの場合も、この定質非定常時系列とみなされるものが多いが、そのような時系列に関するモデルは、いわゆる ARIMA モデル (integrated autoregressive moving-average model) と呼ばれている。

マクロ経済データについての時系列分析は、米国では、Sims [7] などの研究がよく知られているが、日本でも、日本銀行などで先端をきってなされてきた (折谷, [4], [5])。米国での Sims などの研究と対比されるものと

しては、日本では、榊原氏らの研究 [6] が知られている。

定常な時系列の ARMA モデルを構築する際のモデル選択に関しては、ボックス・ジェンキンスの方法とはかなり趣を異にしたものとして、赤池氏の提唱される情報量基準 AIC をベースにして、モデル構造の同定と推定をほとんど同時に行なう手法が知られている。この方法については、赤池・中川両氏による解説書 [1] があり、また、統計数理研究所から、コンピュータ・プログラム “TIMSAC” が利用できるようになってきている。

AIC をつかってのほとんど自動的ともいえるモデル選択に比べると、ボックス・ジェンキンス流のやり方は、(i) モデル構造の同定、(ii) パラメータの推定、(iii) モデルの良さの診断 の段階をふみながら手づくりでモデルをつくる感じであるが、それなりに多くの利点もっている。特に、経済データの扱いのように、季節変動要因をモデル化する必要があるときにも、いくつかの特色と利点を活かすことができる。

以下では、実際の経済データをつかって、時系列分析についての若干の基礎理論、モデルづくりの実際、そして予測への活用を説明する。

## 2. 時系列モデル

### 2.1 確率過程

一般に、時間的に引きつづいて観察されるデータ  $z_1, z_2, \dots, z_t, \dots$  は時系列データといわれている。観察の時間間隔は、等間隔にとられるのが普通である。時系列データの例として図 1 に示しているのは、わが国のマクロ経済関係から、ハイパワード・マネーと貨幣供給量 ( $M_1$ ) をえらんで、1967年～80年の期間における月別データをプロットしたものである。本稿では、これらのデータをつかって時系列分析の実際を説明する。

時系列分析においては、観察値  $z_1, z_2, \dots, z_N$  の各値は、ある確率法則にしたがう確率変数列  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  のある実現値とみなされる。すなわち、時系列データ

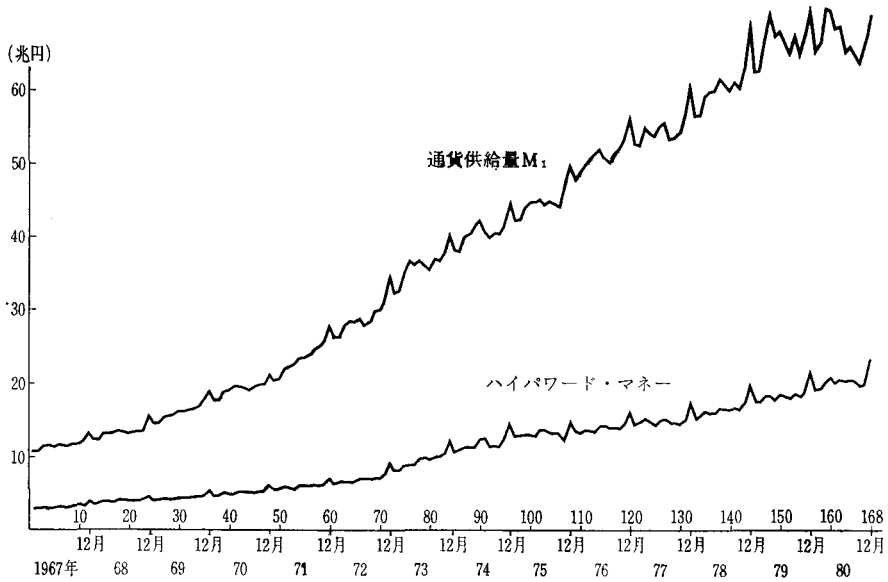


図 1 通貨供給量 ( $M_1$ ) とハイパワード・マネー：1967年1月～1980年12月

$z_1, z_2, \dots, z_N$  は、同時確率密度関数(同時分布ともいう)  $p_{1,2,\dots,N}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)$  をもつ  $N$  個の確率変数  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$  の一組の実現値である。このように、ある確率構造で時系列データを発生する確率変数列の数学モデルは、確率過程(略して、単に過程ともいう)と呼ばれている。

厳密にいうと、ある確率変数  $Z_i$  と、そのある実現値  $z_i$  とは、区別して別個の記号を用いるべきであるが、時系列分析の文献では、誤解の恐れのないときは、確率変数  $Z_i$  とかくべきところに  $z_i$  の記号を用いていることが多いので、ここでもその慣例にしたがうことにする。

簡単な確率過程の例として、ランダム・ウォークの過程があるが、この過程では、系列  $z_1, z_2, \dots, z_t, \dots$  は、次の確率モデルで発生する。

$$z_t = z_{t-1} + a_t \quad (2.1)$$

すなわち、時点  $t-1$  から  $t$  への変化分は、確率変数  $a_t$  で決まる。ここで、系列  $a_1, \dots, a_t, \dots$  は、それぞれ、期待値  $E(a_t)$  がゼロで、確率分布が同じの、しかも、互いに統計的独立であるような系列である。 $a_t$  と  $a_s$  は独立なので、 $t \neq s$  のとき、共分散  $COV(a_t, a_s)$  もゼロとなり、互いに無相関でもある。また、 $a_t$  の確率分布は正規分布であると仮定されることが多く、このような系列は、ホワイト・ノイズと呼ばれている。

## 2.2 定常過程と定質非定常過程

定常性について、ごく簡単に要約する。いま、任意の時間原点  $t$ 、時間差  $h$  および観察期間  $d$  において、同時分布  $p_{0,1,\dots,d}(z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+d})$  と  $p_{0,1,\dots,d}(z_{t+h}, z_{t+h+1},$

$\dots, z_{t+h+d})$  とが同一であるとき、この確率過程は“強い意味で”定常であるといわれる。このとき、 $z_t$  の期待値  $E(z_t)$ 、分散  $V(z_t)$  および  $z_t$  と  $z_{t+h}$  の共分散  $COV(z_t, z_{t+h})$  は、すべて時間  $t$  に無関係な定数となる。

また、同時分布の不変性を仮定せずに、期待値、分散、共分散(ある次数までのモーメント)のみが、時間的に不変であるときは、その過程は“弱い意味で”定常であるといわれる。 $z_t, z_{t+1}, \dots, z_{t+d}$  の同時分布が、多変量正規分布のとき、その過程はガウス過程といわれるが、このガウス過程においては、弱い定常性は強い定常性を意味することになる。

定常過程における  $z_t$  の変動は、ある不確定要因のもとで変動しながらも、その平均的水準すなわち  $E(z_t)$  の周辺で、平衡状態にとどまっているとみなせる。したがって、その確率構造の不変性が、ある時間範囲の未来についても仮定されるかぎりにおいて、 $z_t$  の未来の変動が  $E[z_t]$  の周辺のどのような範囲にあるかについて、確率的な記述ができることになる。

定常でない過程では、 $E(z_t)$  も  $V(z_t)$  も存在しない。その簡単な例は、ランダム・ウォークの過程で、(2.1)式で表わされる過程では、 $z_t$  の平均も分散も存在しない。しかし、ランダム・ウォーク過程の場合、系列  $z_1, \dots, z_t, \dots$  に関して、 $w_t = z_t - z_{t-1}$  で定義される階差系列  $w_1, \dots, w_t, \dots$  をとると、これは、(2.1)式から明らかのように、ホワイト・ノイズであり、定常である。このように、ある種の階差をとると定常過程となるような過程は、定質非定常過程 (homogeneous non-stationary

process)と呼ばれる。

### 2.3 後方シフト演算子について

時系列モデルの数式を操作する簡便な演算子として、後方シフト演算子 $B$ は、

$$B z_t = z_{t-1} \quad (2.2)$$

と定義される。さらに、 $B^2 z_t = B(B z_t) = B z_{t-1} = z_{t-2}$  すなわち、 $B^m z_t = z_{t-m}$  と定義する。また、 $B^k(B^s z_t) = B^{k+s} z_t = z_{t-k-s}$  であるから、演算子どうしの演算として

$$B^k \cdot B^s = B^s \cdot B^k = B^{k+s} \quad (2.3)$$

も意味をもつことになる。さらに、 $c, c_1, c_2$  を任意の実数とし、 $k, s$  を任意の整数として、

$$c B^k z_t = c z_{t-k} \quad (2.4)$$

$$(c_1 B^k + c_2 B^s) z_t = c_1 z_{t-k} + c_2 z_{t-s} \quad (2.5)$$

と定義される。また、 $\alpha(B) = \sum_{i=1}^m a_i B^i$ 、 $\beta(B) = \sum_{j=1}^n b_j B^j$  として、

$$\alpha(B) \cdot \beta(B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j B^{i+j} \quad (2.6)$$

のように、実数に関する多項式と同様の関係が成り立つことを示せる。さらに、交換則  $\alpha(B) \cdot \beta(B) = \beta(B) \cdot \alpha(B)$  も成立することを証明できる。

$B^m z_t$  において、 $m=0$  のときは、 $B^0 z_t = z_t$  であるが、 $B^0$  は単位演算子と呼ばれる、 $I$  とかくこともある。

## 3. 自己回帰・移動平均過程

### 3.1 自己回帰過程 (autoregressive process)

時系列過程を表現する有用な確率過程モデルとして、いわゆる自己回帰モデルがある。これは、過程の  $t$  時点の変数  $z_t$  を、 $p$  期前までの過程の値  $z_{t-1}, z_{t-2}, \dots, z_{t-p}$  の荷重和と時点  $t$  におけるホワイト・ノイズ  $a_t$  の和としてあらわす。

いま、等時間間隔  $t, t-1, t-2, \dots$  で観察される定常時系列を  $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$  として、これらの平均値  $\mu$  からの偏差を  $\bar{z}_t, \bar{z}_{t-1}, \bar{z}_{t-2}, \dots$  とする。すなわち、 $\bar{z}_t = z_t - \mu$  として、

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \phi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t \quad (3.1)$$

であらわされる過程は、 $p$  次の自己回帰過程、または、 $AR(p)$  過程と呼ばれている。

後方シフト演算子で(3.1)式を書き直すと、

$$\bar{z}_t - \phi_1 B \bar{z}_t - \phi_2 B^2 \bar{z}_t - \dots - \phi_p B^p \bar{z}_t = a_t \quad (3.1)'$$

であるから、 $p$  次の自己回帰演算子で、

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (3.2)$$

とすれば、 $AR(p)$  過程は、簡潔に、

$$\phi(B) \bar{z} = a_t \quad (3.1)''$$

と表わせる。(3.1)式の  $AR(p)$  モデルに含まれるパラメータは、 $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  と、 $a_t$  の分散  $\sigma_a^2$  であるから、実際の時系列データに、 $AR(p)$  モデルをあてはめる場合には、 $p+2$  個のパラメータを推定しなければならない。

自己回帰過程が定常であるためには、 $B$  についての方程式  $\phi(B)=0$  のすべての根が単位円の外側になければならないということが知られている。たとえば、 $z_t = z_{t-1} - 0.25 z_{t-2} + a_t$  で表わされる過程は定常である。なぜなら、これは  $(1-B+0.25B^2) z_t = a_t$  の過程であるが、 $1-B+0.25B^2=0$  を解くと、根は  $B=1 \pm i$  であり、複素平面上で単位円の外側に位置しているからである。(2.1)式のランダム・ウォーク過程は、 $(1-B) z_t = a_t$  であるから、 $\phi(B)=1-B=0$  の根  $B=1$  は、ちょうど単位円周上にあり、このことから、ランダム・ウォークが定常ではないことがわかる。

### 3.2 移動平均過程 (moving-average process)

時系列分析の応用で、もうひとつ有用なモデルは、次のような  $q$  次の移動平均過程、または、 $MA(q)$  過程と呼ばれるもので、

$$\bar{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.3)$$

で表わされる。ここで、 $a_t, a_{t-1}, \dots$  はホワイト・ノイズである。 $q$  次移動平均演算子を  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  とすれば、(3.3)式は簡潔に、

$$\bar{z}_t = \theta(B) a_t \quad (3.3)'$$

と書ける。パラメータは、 $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  の計  $q+2$  個である。

### 3.3 ARMA 過程と ARIMA 過程について

自己回帰の部分と移動平均の部分の両方をもった、より一般化したモデルとして、自己回帰・移動平均過程、もしくは、 $ARMA(p, q)$  過程と呼ばれるものは、

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.4)$$

あるいは、

$$\phi(B) \bar{z}_t = \theta(B) a_t \quad (3.4)'$$

で表わされるパラメータとして、 $\mu; \phi_1, \dots, \phi_p; \theta_1, \dots, \theta_q; \sigma_a^2$  の計  $p+q+2$  個を含んでいる。

$ARMA$  過程が定常であるためには、 $\phi(B)=0$  のすべての根が単位円の外側になければならない。

すでに述べたように、経済などの社会現象で現実に観察される時系列データでは、そのままでは、定常過程とみなされるものは少ない。しかし、非定常な変動といっても、それは、その変動にある特定のトレンドなどがあるために平均値や分散が存在しないという種類のもの、その点を除けば、変動の確率構造が固定しているとみなせるものが多い。そのような過程のモデルとして使われるのは、いわゆる定質非定常過程である。

過程  $\{z_t\}$  について、階差系列  $\{w_t\}$  を、

$$w_t = z_t - z_{t-1} = (1-B) z_t, \quad t=1, 2, \dots \quad (3.5)$$

で、つくることができる。さらに  $z_t$  の第  $d$  階差は、

$$w_t = (1-B)^d z_t, \quad t=1, 2, \dots \quad (3.6)$$

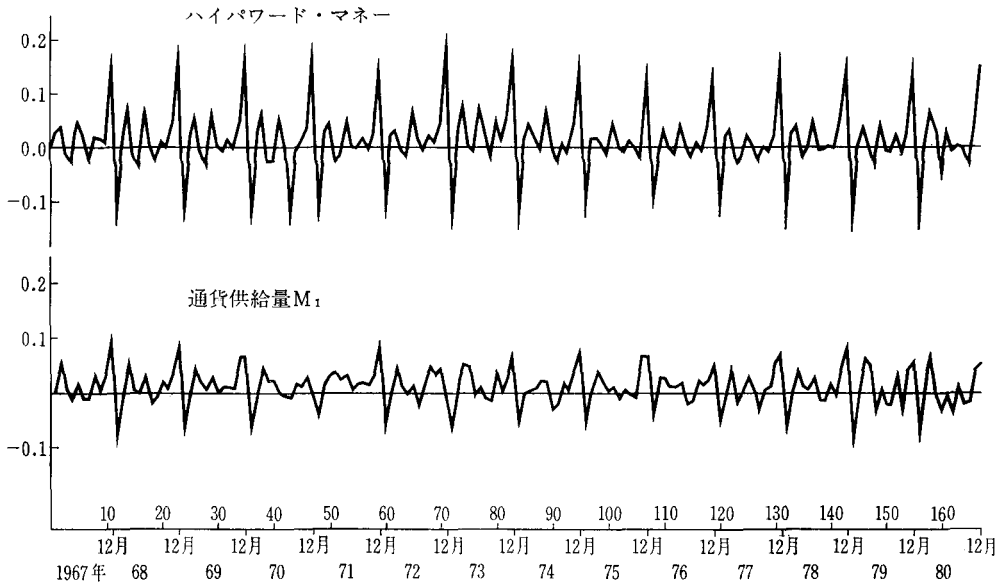


図2 ハイパワード・マネーと通貨供給量(M<sub>1</sub>)の対前月増加率:  $w_t = \nabla \log_e z_t$

で定義される。そして、この階差  $\{w_t\}$  が定常過程であるとき、過程  $\{z_t\}$  は“定質非定常過程”と呼ばれている。

経済時系列などの場合は、時の経過とともに、変動の振れが次第に拡大していくことが多い。このようなとき、原データ  $\{z_t'\}$  を定常な系列  $\{w_t\}$  に変換するひとつの方法は、原データの自然対数を取り、さらにその階差をとることである。この変換で得られる  $w_t$  は、概念的には、原データ  $z_t'$  の一期前の値  $z_{t-1}'$  からの変化率に相当する。すなわち、

$$\begin{aligned} w_t &= \log_e z_t' - \log_e z_{t-1}' = \log_e \frac{z_t'}{z_{t-1}'} \\ &= \log_e \left( 1 + \frac{z_t' - z_{t-1}'}{z_{t-1}'} \right) \doteq \frac{z_t' - z_{t-1}'}{z_{t-1}'} \quad (3.7) \end{aligned}$$

図1に示したハイパワード・マネーと貨幣供給量(M<sub>1</sub>)について、この変換をしてプロットしたものを図2に示す。

定質非定常過程を表現する一般的なモデルは、この  $w_t$  がARMA過程で発生するとするものである。すなわち、

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.8)$$

第1階差  $w_t$  の系列データが、このようにARMA過程で発生すると、 $z_t$  は、過去の  $w_t$  の総和として、

$$z_t = w_t + w_{t-1} + w_{t-2} + \dots \quad (3.9)$$

で得られる。(3.6)、(3.8)からなる過程は、自己回帰・加算・移動平均過程(integrated autoregressive-moving-average process)あるいは、略して、

ARIMA( $p, d, q$ )過程と呼ばれている。

(3.8)式は、演算子をつかうと  $\phi(B)w_t = \theta(B)a_t$  であるから、これに(3.6)式を代入すると、ARIMA( $p, d, q$ )過程の一般的な形は、

$$\phi(B)(1-B)^d z_t = \theta(B)a_t \quad (3.10)$$

である。

## 4. ARMA 過程と自己相関関数

### 4.1 定常過程の自己相関関数

与えられた時系列データの変動特性を説明できる適切なモデルを見つけるには、まずそのデータの過去の挙動によくあてはまるARIMA( $p, d, q$ )モデルの適当な次数  $p, d, q$  を特定化することが第1の段階である。これはモデル構造の同定と呼ばれている。そこで、データの変動特性は何で表わすかということ、それは自己相関関数、または、スペクトル密度関数で表わすのが普通である。

定常過程において、時間間隔が  $k$  離れている  $z_t$  と  $z_{t+k}$  との間の自己共分散は、

$$\gamma_k = \text{COV}[z_t, z_{t+k}] = E[(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)] \quad (4.1)$$

で定義され、これは時間  $t$  に独立な定数で、ラグ  $k$  の共分散と呼ばれる。ここで、 $k=0$  のときの  $\gamma_0$  は、明らかに、 $z_t$  の分散  $V[z_t] = \sigma^2$  に等しい。

また、ラグ  $k$  の自己相関係数  $\rho_k$  は、

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (4.2)$$

で定義される。明らかに、 $\rho_0 = 1$  であり、また、 $\gamma_k = \gamma_{-k}$ 、 $\rho_k = \rho_{-k}$  なので、 $\gamma_k, \rho_k$  ともに、 $k=0$  に関して左右対

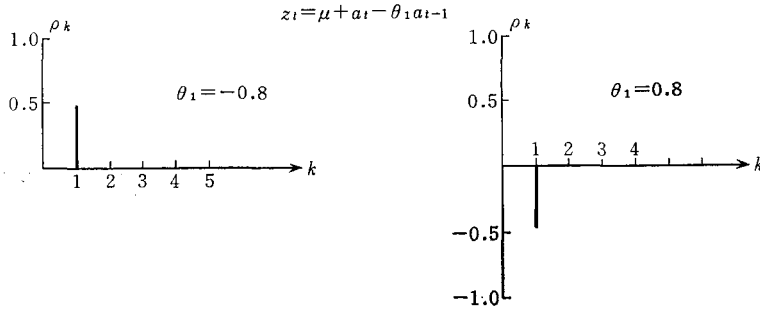


図3 MA(1)過程の自己相関関数

称である。\$k\$ を横軸として、\$\rho\_k\$ を棒グラフで示すものはコレログラムと呼ばれている。

(4.1), (4.2) 両式の \$\gamma\_k\$ と \$\rho\_k\$ は理論的な定数であり、実際には、\$N\$ 個の観察データ \$z\_1, z\_2, \dots, z\_N\$ から、これらを推定しなければならない。\$\gamma\_k\$ を推定する標本自己共分散 \$c\_k\$ は、\$N\$ 個のデータの平均 \$\bar{z}\$ をつかって、

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (z_i - \bar{z})(z_{i+k} - \bar{z}) \quad k=0, 1, 2, \dots, K \quad (4.3)$$

で得られる。さらに、ラグ \$k\$ の標本自己相関係数 \$r\_k\$ は、

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad (4.4)$$

で得られる。これら \$c\_k, r\_k\$ とともに、\$N\$ 個のデータにもとづく推定値であるから、推定誤差(標本誤差)をとまなうことに留意する必要がある。これについては、後にもういちど触れる。

#### 4.2 移動平均過程の自己相関関数

1 次の移動平均過程 MA(1) の場合、平均がゼロ、分散が \$\sigma\_a^2\$ のホワイト・ノイズを \$a\_t\$ として、

$$z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (4.5)$$

であるから、この過程の平均(期待値) \$E[z\_t]\$ と分散 \$V[z\_t] \equiv \gamma\_0\$ を求めると、

$$E[z_t] = \mu + E[a_t] - \theta_1 E[a_{t-1}] = \mu \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} V[z_t] &= E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})^2] \\ &= E[a_t^2] - 2\theta_1 E[a_t a_{t-1}] + E[\theta_1^2 a_{t-1}^2] \\ &= \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

である。また、ラグ 1 の自己共分散は、

$$\gamma_1 = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})(a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2})] = -\theta_1 \sigma_a^2 \quad (4.8)$$

であるが、ラグ \$k\$ が 1 以上になると、

$$\gamma_k = E[(a_t - \theta_1 a_{t-1})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1})] = 0 \quad (4.9)$$

したがって、MA(1)過程の自己相関関数は

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k=1 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

となる。例として、\$\theta\_1 = -0.8\$ の場合と、\$\theta\_1 = 0.8\$ の場合のコレログラムを図3に示す。

MA(1)過程では、\$z\_t\$ が相関をもつのは \$z\_{t-1}\$ および \$z\_{t+1}\$ のみであり、期間が 1 期以上へだたった \$z\_t\$ と \$z\_{t+k}\$ の間には相関がない。MA(1)過程は、1 期以上過去に起ったことについては記憶が残っていない過程であるといつてよい。

一般の MA(\$q\$)過程: \$z\_t = \mu + a\_t - \theta\_1 a\_{t-1} - \dots - \theta\_q a\_{t-q}\$ についても、

$$\begin{aligned} E[z_t] &= \mu, \quad V[z_t] \equiv \gamma_0 = \sigma_a^2 \sum_{i=1}^q \theta_i^2 \quad (\text{ただし } \theta_0 = 1) \\ \rho_k &= \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & k=1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

となることを導くことができる。

MA(\$q\$)過程のコレログラムの大きな特徴は、ラグが \$1, 2, \dots, q\$ までではゼロではない \$\rho\_k\$ の値が現われるが、それより大きいラグ \$k\$ に対しては、自己相関係数 \$\rho\_k\$ がゼロになることである。この特徴のことを、MA過程のコレログラムはラグが \$q\$ から先で、“切り落ち(cut off)”があるという。MA(\$q\$)過程の記憶は、\$q\$ 期までしか残存しないといえる。

#### 4.3 自己回帰過程と自己相関関数

\$p\$ 次の自己回帰過程 AR(\$p\$)は、

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \phi_p z_{t-p} + a_t \quad (4.12)$$

で発生する。この過程が定常であれば、この過程の平均値(期待値)について、\$E[z\_t] = E[z\_{t-2}] = \dots = E[z\_{t-p}] \equiv \mu\$ がいえるから、(4.12)について期待値をとると、\$\mu = \delta + \phi\_1 \mu + \phi\_2 \mu + \dots + \phi\_p \mu\$ が得られ、整理すると、

$$E[z_t] \equiv \mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p} \quad (4.13)$$

が得られる。次に、AR(1)過程

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t \quad (4.14)$$

の分散 \$V[z\_t] \equiv \gamma\_0\$ と自己相関関数 \$\rho\_k\$ を求める。この過程が定常であれば、分散が存在し、また、\$a\_t\$ と \$z\_{t-1}\$ とは統計的に独立であるから、

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

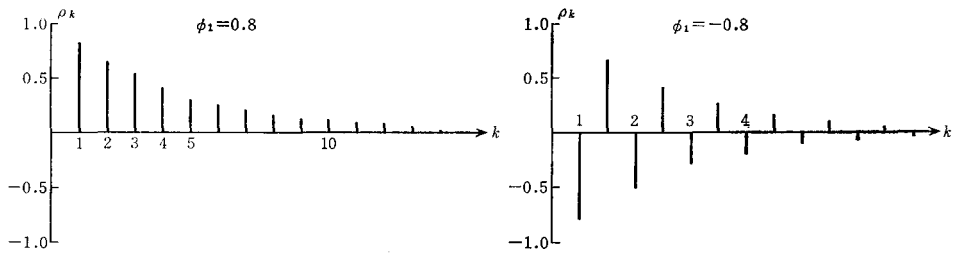


図 4 AR(1)過程の自己相関関数

$$V[z_t] = V[\delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t] = \phi_1^2 V[z_{t-1}] + V[a_t] \quad (4.15)$$

すなわち、

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_a^2$$

が得られるので、これを  $\gamma_0$  について解いて、

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \quad (4.16)$$

次に、 $\delta = 0$  において、共分散  $\gamma_1$  を求めると、

$$\gamma_1 = E[z_{t-1} z_t] = E[z_{t-1} (\phi_1 z_{t-1} + a_t)] = \phi_1 \gamma_0 \quad (4.17)$$

同様にして、ラグ  $k$  の共分散は  $\gamma_k = \phi_1^k \cdot \gamma_0$  となるので AR(1)過程の自己相関関数は、

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi_1^k \quad (4.18)$$

となる。 $\phi_1 = 0.8$  および  $\phi_1 = -0.8$  の場合について、AR(1)過程のコログラムを図 3 に示す。

(4.18)式から、明らかなように、AR(1)過程の自己相関関数は、MA過程の場合のような切り落ちがなく、次第に減衰するがゼロになることはない。

一般の AR( $p$ )過程については、(4.12)式について、 $\delta = 0$  において、両辺に  $z_{t-k}$  をかけて期待値をとると、

$$E[z_{t-k} z_t] = \phi_1 E[z_{t-k} z_{t-1}] + \phi_2 E[z_{t-k} z_{t-2}] + \dots + \phi_p E[z_{t-k} z_{t-p}] + E[z_{t-k} a_t] \quad (4.19)$$

であるから、

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad (4.20)$$

となる。この両辺を  $\gamma_0$  で割ることにより、

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad (4.21)$$

が得られる。 $k=1, 2, \dots, p$  について、(4.21)式は計  $p$  本の方程式を与えるが、これは、 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  を未知数とする連立方程式となっている。ただしこの式で  $k-i < 0$  のときは、 $\rho_{k-i} = \rho_{i-k}$  とする。また、 $\rho_0 = 1$  である。この連立方程式は、ユール・ウォーカー (yule-walker) の方程式と呼ばれ、自己相関係数  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  から、AR( $p$ )過程のパラメータ  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  を決める方程式となっている。また、自己相関係数  $\rho_i$  の推定値  $r_1, r_2,$

$\dots, r_p$  から、パラメータの初期推定値  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \dots, \hat{\phi}_p$  を求める式でもある。

AR(2)過程の場合、ユール・ウォーカー方程式は、

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_2 \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

となり、 $k$  が 2 を超える自己相関係数については、

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad (4.23)$$

が成り立つことになる。

以上のように、AR( $p$ )過程の自己相関関数  $\rho_k$  は、 $k$  が  $p$  を超えても、(4.21)式にしたがって減衰していくが、ゼロにはならない。すなわち、切り落ちが起らない。したがって、過去に起ったことの記憶がいつまでも残存していく過程であるといえる。

## 参考文献

- [1] 赤池弘次, 中川東一郎: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社, 昭和47年
- [2] Box, G. E. P., and Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, 1970
- [3] Nelson, C. R.: *Applied Time Series Analysis*, Holden-Day, 1973
- [4] 折谷吉治: 時系列分析による経済予測の展開, 「週刊東洋経済」, 近経シリーズ No. 50, 昭和54年10月
- [5] 折谷吉治: マネーサプライと物価, 実質GNPとの関係—インフレの成長抑圧効果の検証—, 「日本銀行特別研究室, 金融研究資料第7号」, 昭和56年
- [6] 榎原英資, 薬師寺泰蔵: 社会科学における理論と現実: 実証分析における1つの試論, 日本経済新聞社, 昭和56年
- [7] Sims, C. A.: *Macroeconomics and Reality*, *Econometrica*, January, 1980