ブロッキングをともなう待ち行列網の安定条件に関する研究

（指導教官　三根久教授）　　京都大学大学院工学研究科修士課程数理工学専攻　庄境　誠

1. はじめに

本論文の目的は，ブロッキング現象をともなう2つのタイプの待ち行列網，すなわち，多重プログラミングモデルとタンデム型モデルの安定条件についての解析である．これらの待ち行列網は適当なマルコフ性を有する場合，擬出生死滅過程と呼ばれる連続時間マルコフ過程により記述することができ，システムが安定であれば，定常確率ベクトルは幾何形式をもつことが知られている．以下ではこの結果を利用して，特に計算機システムに対応する多重プログラミングモデルの安定条件の陽表現を与える．さらに，臨界到着率の性質について議論する．これによって，安定なシステムの設計が可能になる．

2. 多重プログラミングモデル

多重プログラミング計算機システムは図1に示されるように入力行列と部分待ち行列網とから成る．後者は2つのサービス施設，ユニット-Iとユニット-IIを含む．ユニット-Iはc個のサービス率αの指数サーバー(CPU)と容量$N-c$の有限バッファをもつ．ユニット-IIはr個のサービス率βの指数サーバー(I/O)と無限容量のバッファをもつ．客(ジョブ)はパラメータλのポアソン過程にしたがって入力行列に到着する．ユニット-Iでサービスを受けた客はθ_1, θ_2, θ_3の確率でユニット-Iへもどるか，ユニット-IIへ進むか，あるいはシステムを退去するものとする．このシステムに対するパラメータを次のように設定する．

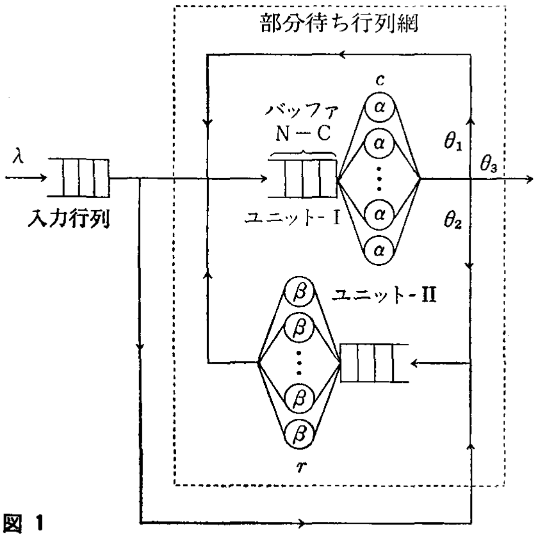

図 1

(i) 最大多重度M

部分待ち行列網の系内人数(多重度)はM以下に保たれる．多重度がMに達していない場合，ユニット-Iに空きがあれば入力行列の客はユニット-I へ進む．なければ，ユニット-II へ進む．解析上，$M \geqq \max(N+1, c+r)$とする．

(ii) スケジューリング規則G

多重度がMの時，客がシステムから退去すると入力行列の客が1人ユニット-かユニット-IIに進む．前者を規則A，後者を規則Bと呼ぶ．

(iii) 完全ブロッキング点r^*, $1 \leqq r^* \leqq \min(M-N, r)$

ユニット-Iの客数がNに達すると，その後でユニット-IIでのサービスを受け終った客はユニット-Iへ進めずそのままサーバーを占有する．この現象をブロッキングと呼び，サーバーがブロックされるという．ブロックされたサーバー数がr^*に達するとその瞬間にまだブロックされていないサーバーもすべてサービスを中断する．これを完全ブロッキングがおこるという．

(iv) サービス再開点d^*, $0 \leqq d^* \leqq r^*-1$

完全ブロッキングがおこった後，ブロックされているサーバー数がd^*まで減るとブロックされていないサーバーはサービスを再開する．

3. 定常確率ベクトル

次のような状態空間を定めれば，このモデルは擬出生死滅過程として記述できる．

状態空間 $E=\{(i, j, k), i \geqq 0, j=0.1 \cdots N+d^*, \overline{N+d^*+1}, N+d^*+1, \cdots, \overline{N+r^*-1}, N+r^*-1, \overline{N+r^*}, 0 \leqq k \leqq M\}$

i：入力行列内の客数

j：ユニット-I内の客およびユニット-IIにサービス後も留っている客の総数，バーつきのものは完全ブロッキングがおこり，ユニット-IIではサービスが行なわれていないことを示す．

k：ユニット-IIで現在サービスを受けているか，待っている客の数

ただし，$j+k<M$ のとき $i=0$，また，$j+k=M$ のとき $k=M-j$ であることに注意すると，すべての状態は2変数の組で表わすことができる．この過程の無限小生成作用素 $\boldsymbol{P}$ は可能な状態遷移に着目すれば図2に示されるブロック三重対角形式となる．ただし，図2において $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ はしかるべき次元の行列である．

この過程が正再帰的であるとき，システムは安定であるといわれ，定常状態における入力行列の客数は確率1で有限となる．$\boldsymbol{P}$ および $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ の定常確率ベクトルを $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots)$ および $\boldsymbol{\pi}$ で表わすと次の定理が成り立つ．

定理1　$\lambda<\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{e}$ なら，かつそのときにかぎりシステムは安定である．$\lambda<\boldsymbol{\pi} \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{e}$ なら

(i)　$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{R}^i$, $i \geqq 0$, $\boldsymbol{R}$ は $\boldsymbol{R}^2 \boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{R} \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_0=0$ の最小解

(ii)　$\boldsymbol{y} \boldsymbol{e}+\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})^{-1} \boldsymbol{e}=1$, $(\boldsymbol{y}\ \boldsymbol{x}_0)\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}=0$

が成り立つ．

4. 安定条件

定理2

$$\gamma_A=r\beta/c_\alpha \theta_2$$

$$\gamma_B=r\beta/c_\alpha(\theta_2+\theta_3)$$

$$\eta_G(n)=\sum_{l=0}^{n}\left(\frac{\gamma_G}{r}\right)^l(\min(M-N, r)-r^*+l)!$$

とおく．システムがスケジューリング規則 G にしたがうとき，安定条件は式(1)で与えられる．

$$\lambda<\alpha\theta_3\left\{c-\sum_{j=0}^{c-1}\frac{(c-j)c^j\gamma_G{}^j}{j!}\pi_0\right\} \tag{1}$$

ここで，

$$\pi_0=\left\{\sum_{j=0}^{c-1}\frac{c^j\gamma_G{}^j}{j!}+\frac{c^c}{c!}\sum_{j=c}^{\min(M-r, N)-1}\gamma_G{}^j + \frac{c^c r!}{c!}\sum_{j=\min(M-r,N)}^{N+d^*-1}\frac{\gamma_G{}^j}{r^{j-\min(M-r,N)}(\min(M,N+r)-j)!} + \frac{c^c r!}{c!\,\eta_G(r^*-d^*-1)}\sum_{j=N+d^*}^{N+r^*-1}\frac{\gamma_G{}^j\eta_G(N+r^*-j)}{r^{j-\min(M-r,N)}(\min(M,N+r)-j)!}\right\}^{-1}$$

である．

5. 臨界到着率の性質

式(1)の右辺を λ^* とおき，臨界到着率と呼ぶ．

定理3　λ^* は d^* に関して狭義に単調増加する．

したがって，以下 d^* を最大値 r^*-1 に設定する．このとき，次の定理が成り立つ．

$$P=\begin{pmatrix} B_1 & B_0 & & & 0 \\ B_2 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & A_2 & A_1 & A_0 \\ 0 & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

図 2

定理4　(i) λ^* は，$N+r \geqq M>N$ なる M に関して狭義に単調増加する．また，$M \geqq N+r$ のとき，λ^* は一定値をとる．

(ii) λ^* は r^* に関して狭義に単調増加する．

システム設計に関するパラメータについて次の定理がえられる．

定理5　(i) λ^* は N に関して狭義に単調増加する．

(ii) α が c に反比例するとき，λ^* は c に関して狭義に単調減少する．

(iii) β が r に反比例するとき，次のことが成り立つ．

$\lambda^*(r=r_0, r^*=r_1)>\lambda^*(r=r_0-1, r^*=r_1)$,
$M-N \geqq r_0>r_1>1$

$\lambda^*(r=r_0, r^*=1)=\lambda^*(r_0-1, r^*=1)$,
$M-N \geqq r_0>1$

$\lambda^*(r=r_0, r^*=r_1)<\lambda^*(r=r_0+1, r^*=r_1)$,
$r_0 \geqq M-N \geqq r_1>1$

特に，r^* を最大値 $\min(M-N, r)$ に設定すると

$\lambda^*(r=1)<\lambda^*(r=2)<\cdots<\lambda^*(r=M-N-1)<\lambda^*(r=M-N)>\lambda^*(r=M-N+1)>\cdots$

となる．

(iv) λ^* は β に関して狭義に単調増加し，

$$\lim_{\beta\to 0}\lambda^*=0,\quad \lim_{\beta\to\infty}\lambda^*=c\alpha\theta_3$$

である．また α に関して

$$\lim_{\alpha\to 0}\lambda^*=0$$

および

$$\lim_{\alpha\to\infty}\lambda^*=\begin{cases} r\beta\theta_3/\theta_2, & \text{規則A} \\ r\beta\theta_3/(\theta_2+\theta_3), & \text{規則B} \end{cases}$$

が成り立つ．

6. おわりに

以上で示された臨界到着率の性質の中で特に注目すべき点は次のとおりである．すなわち単一ユニットシステムではサービス率 α の c 個の指数サーバーはサービス率 $c\alpha$ の1個の指数サーバーに取り換えるほうが望ましいことが知られているが，ブロッキングがおこる場合には逆転現象が認められる点，また最大多重度を $N+r$ 以上にしても臨界到着率はまったく増加しない点等である．

なお本論文では上とは形態を異にする多重プログラミングモデルおよび2段，3段のタンデム型モデルについても同様の解析を試み安定条件について議論している．