

経済データの時系列分析と予測 (3)

高森 寛

5.6 自己回帰・移動平均過程の同定

前節の表 5.1 に整理したように、純粹の移動平均過程 MA(q) の特徴は、理論的には、自己相関コログラムにおけるラグ q 以降の切り落ち (cut off) に現われる。また、純粹の自己回帰過程 AR(p) の理論的特徴は、偏自己相関コログラムにおけるラグ p 以降の切り落ちである。

自己回帰部分と移動平均部分の両方を含む混合過程の場合は、自己相関コログラムに切り落ちが生じないで、次第に減衰するパターンとなる。

最も簡単な混合過程 ARMA(1, 1) は、

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (5.8)$$

であるが、その自己相関関数は

$$\rho_1 = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1} \quad (5.9(a))$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1}, \quad k=2, 3, \dots \quad (5.9(b))$$

となることを示すことができる。また、過程の期待値 $E[z_t]$ とトレンド定数 δ の間には、

$$E[z_t] = \frac{\delta}{1 - \phi_1} \quad (5.10)$$

の関係が成り立つ。(5.9) 式から、明らかに、自己相関関数は切り落ちない。

また、混合過程の場合は、等価的に、無限の次数の自

己回帰型過程として表わせることも示せる。そして、偏自己相関関数 ϕ_{kk} は、近似的に、自己回帰過程の係数 ϕ_k の値に近いことから、混合過程については、偏自己相関コログラムにも切り落ちが生じないことがわかる。

以上から、標本自己相関、標本偏自己相関の両方のコログラムとも、比較的小さいラグで明白な切り落ちがあると判定しにくい場合は、混合型モデルを考えなければならぬ。

—混合モデルの同定—

図 5.6 に示しているのは、利子率をあらわすコールレート(無条件物、東京平均、1967年1月~1980年12月[16])の月別データ z_t の対前月差 $w_t = \nabla z_t \equiv z_t - z_{t-1}$ をプロットしている。このデータ w_t の自己相関と偏自己相関の標本コログラムを図 5.7 に示す。点線は標準誤差 $\hat{\sigma}_r$ の 2 倍の位置を示しているが、自己相関のほうは、ラグ 1 の r_1 からラグ 6 の r_6 まで有意であり、偏自己相関のほうもかなり長いラグにわたって有意な $\hat{\phi}_{kk}$ が観察されるので、純粹の MA または AR モデルをあてはめようとすると、単純なモデルにはなりそうもない。そこで、混合モデルを試みることになるが、まず、簡単な ARMA(1, 1) で試してみるのが順当であろう。

パラメータの初期推定を得るには、理論式(5.9(b))に、 ρ_1 と ρ_2 に、それらの推定値 $r_1 = .38$ と $r_2 = .22$ を代入して、

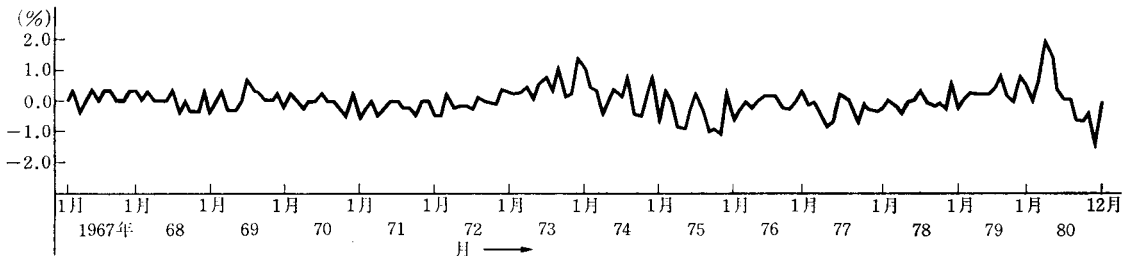


図 5.6 短期利子率(コール・レート) : 対前月差 : $w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1}$

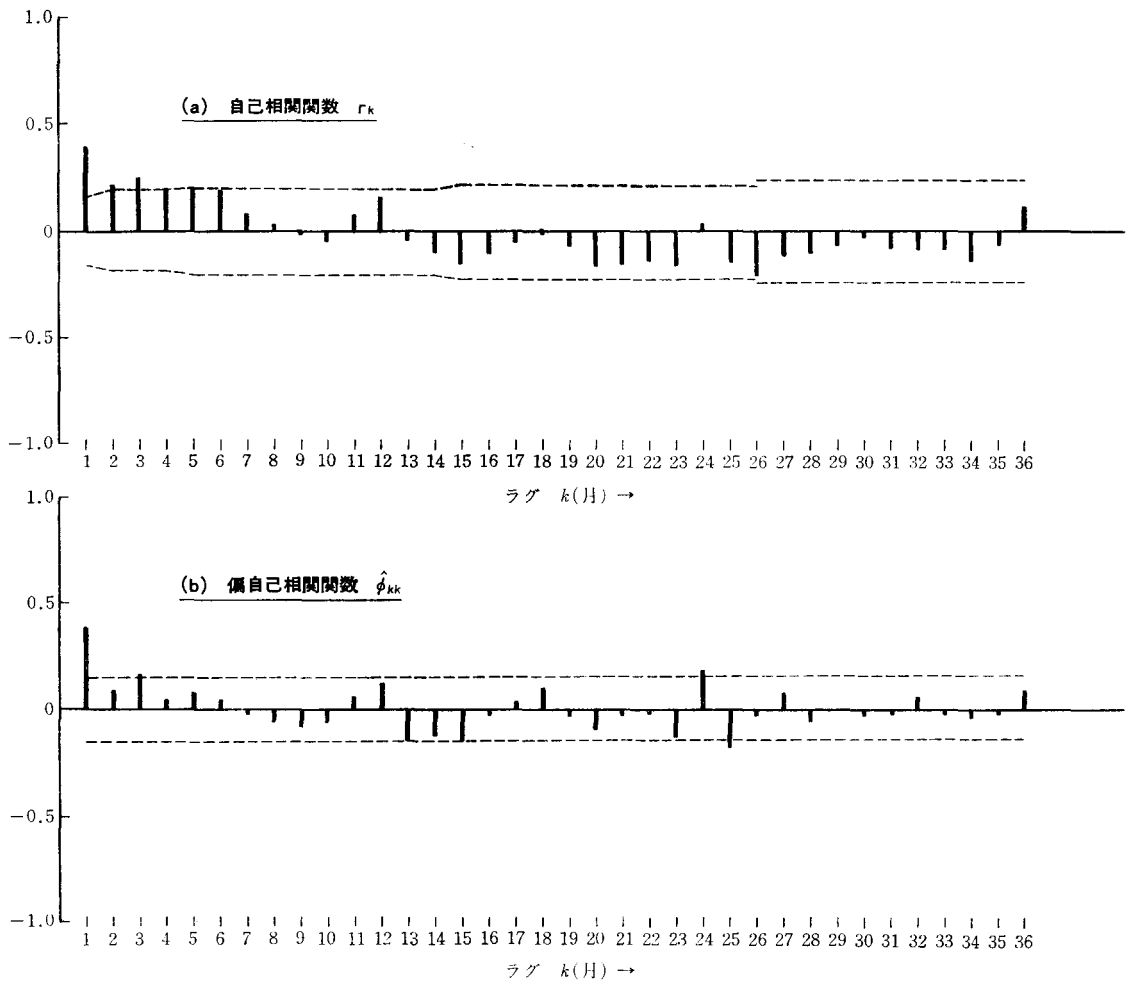


図 5.7 自己相関関数と偏自己相関関数：コール・レート対前月差 $w_t = \nabla z_t$

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1} = \frac{.21}{.38} = .55 \quad (5.12)$$

が得られる。さらに、 $\hat{\theta}_1$ を求めるために、 $r_1 = .38$ と $\hat{\phi}_1 = .55$ を (5.9(a)) 式に代入する。

$$.38 = \frac{(1 - .55\hat{\theta}_1)(.55 - \hat{\theta}_1)}{1 + \hat{\theta}_1 - 2(.55)\hat{\theta}_1} \quad (5.13)$$

これを解くと、 $\hat{\theta}_1 = .69$ が得られる。(もうひとつの根 $\hat{\theta}_1 = 4.5$ があるが、これは、いわゆる、逆換条件 *invertibility* を満たさないため採用しない。) また、図 5.6 のデータ w_t の標本平均は $\bar{w}_t = .0218$ (%) であり、その標準誤差は $\hat{\sigma}_w = .036$ (%) と推定される。したがって、 $\bar{w}_t / \hat{\sigma}_w = .0218 / .036 = .605$ が 2 を超えないため、 $\bar{w}_t = .0218$ は有意ではないので、 $E[w_t] = 0$ と判断する。よって、(5.10) 式の関係から、トレンド項 δ もゼロと判定することになる。コールレートの対前差データ $w_t = \nabla z_t$ について得られた初期モデルは、

$$w_t = .55w_{t-1} + a_t - .69a_t \quad (5.14)$$

となる。

6. モデル推定と適性の診断

6.1 パラメータの推定

時系列データ z_1, z_2, \dots, z_N が、特定次数 p, d, q の ARIMA 過程から発生しているとして、パラメータ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \delta, \sigma_a^2$ の値を推定する問題は、統計的推定論の領域であり、多くの方法が提案されているが、それらについては、ここでは議論しない。

基本的には、適当に階差をとって定常化されたデータ・ベクトル $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)'$ が与えられたとき、正規性の仮定のもとで、尤度関数を最大化する推定量を求める問題である。この場合、尤度関数は、

$$L(\Phi, \theta, \delta, \sigma_a^2 | w) = (2\pi)^{-N/2} (\sigma_a^2)^{-N/2}$$

表 6.1 季節移動平均モデル推定—通貨供給量

推定初期値	推定値	95%信頼区間
H	.44	.714 [.584 ; .845]
残差二乗和	.05119	自由度154 残差二乗平均.0003324
残差個数	155	残差標準誤差($\hat{\sigma}_a$) .0182

$$\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^N \hat{a}(\Phi, \theta, \delta)_t^2\right] \quad (6.1)$$

となる。ただし、 $\hat{a}(\Phi, \theta, \delta)_t$ は、残差に相当し、

$$\hat{a}(\Phi, \theta, \delta)_t = w_t - \phi_1 w_{t-1} - \dots - \phi_p w_{t-p} + \delta + \theta \hat{a}_{t-1} + \dots + \theta_q \hat{a}_{t-q} \quad (6.2)$$

である。このように、推定の問題は、非線形の尤度関数(6.1)を最大化するパラメータ Φ, θ, δ の値を求める問題に帰着するが、ある条件のもとでは、残差二乗和関数 $S(\Phi, \theta, \delta) = \sum_{t=1}^N \hat{a}(\Phi, \theta, \delta)_t^2$ を最小化する推定量が、ほぼ近似的に、尤度関数を最大化することも知られている。残差二乗和を最小化する方法としては、マーカート(marquardt)のアルゴリズムなどがよく知られている。

統計数理研究所のプログラム TIMSAC, [10], [11], [12] には、尤度関数を正確に最大化するもの、AIC 基準によって、次数 p, d, q の決定も含めて、最尤推定値を求めるプログラムなどがそろっている。

ARIMA モデルのパラメータ推定に特有の困難な問題としては初期値問題がある。データに ARMA (p, q) をあてはめると残差は(6.2)式に相当するものであるが、残差 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_N$ は、 $w_0, w_{-1}, \dots, w_{1-p}, \hat{a}_0, \hat{a}_{-1}, \hat{a}_{1-q}$ に依存する。いわゆる後方予測をして、これらの値を推定したり、ある特定の値を仮定したりしなければならない。

筆者が現在使っているプログラムは、ウィスコンシン大学で開発された“Box-Jenkins 時系列分析用プログラム^{11,2)}”で、パラメータ推定には、マーカートのアルゴリズムをつかっている。前回5.3節での通貨供給量 M_t データ分析で適切なモデル構造は、季節移動平均型の

$$\nabla \nabla_{12} \log_e z_t = (1 - \theta B^{12}) a_t \quad (6.3)$$

であることが明らかになったが、パラメータ推定計算の結果は、表6.1のとおりである。また、図5.6のコールレート対前差 $w_t = \nabla z_t$ の分析では、コールレート原データ $\{z_t\}$ のモデルとしては、ARIMA(1,1,1)の、

$$(1 - \phi_1 B) \nabla z_t = (1 - \theta_1 B) a_t \quad (6.4)$$

を、ひとまず試してみることにしたが、推定計算の結

表 6.2 ARIMA (1,1,1) モデル推定—利子率 (コールレート)

パラメータ	推定初期値	推定値	95%信頼区間
ϕ_1	.55	.825	[.635 ; 1.016]
θ_1	.69	.562	[.289 ; 0.835]
残差二乗和	.003035	自由度164 残差二乗平均 0.18509	
残差個数	166	残差標準偏差($\hat{\sigma}_a$) 0.43022	

果を表6.2に示す。

6.2 モデルの適性の診断

推定されたモデルの、いわゆる“できばえ”は、次の観点からなされる。

- (i) パラメータ推定値の標準誤差との関係で、推定値が統計的に有意であるかどうか。
- (ii) 得られたモデルの構造に難点はないか。AR部分の定常条件、MA部分の逆換条件に関するもの。
- (iii) 残差系列がホワイトノイズであるかどうか。

(i)に関しては、パラメータの95%信頼区間がゼロの値を含んでいるようだと、得られた推定値は有意であるとはいえない。すなわち、パラメータの真の値がゼロであるという仮説を棄却できない。上記の2つのケースの推定結果では、どの信頼区間も、下限、上限とも正であるから、これらの推定値は十分に有意である。

(ii)に関する診断では、モデルのAR部分 $\Phi(B)$ 、MA部分 $\theta(B)$ について、 $\Phi(B) = 0, \theta(B) = 0$ の根がすべて単位内の外側にあることの確認である。表6.1の $\hat{H}_1 = .714$ 、また表6.2の $\hat{\phi}_1 = .825, \hat{\theta}_1 = .562$ は、いずれも、絶対値が1より小さいので、 $1 - \phi_1 B = 0, 1 - \theta_1 B = 0$ の根は単位内の外側である。ただ、表6.2の推定では、 ϕ_1 の95%信頼区間は、その上限に近いところではあるが、1を含んでいるので、 $\phi_1 = 1$ である仮説を完全には棄却できない。 $\phi_1 = 1$ ならば、AR部分は、 $1 - \phi_1 B = 1 - B$ であるから、もういちど階差をとることに等しい。

(iii)に関する診断では、モデルをあてはめたあとの残差 \hat{a}_t がホワイト・ノイズかどうかの検定をすることになる。もし、 \hat{a}_t がホワイト・ノイズではないということになれば、この残差データには、まだ、将来の z_t の予測のために利用できる情報が残っているわけで、そのモデルは、まだ原データの情報を完全に活用しきっていないと判断しなければならない。

6.3 残差系列 $\{\hat{a}_t\}$ がホワイト・ノイズかどうかの検定

ある時系列過程 $\{a_t\}$ が、ホワイト・ノイズであれば、その自己相関関数 ρ_k は、すべてのラグ k について、ゼロの値である。また、そのような過程から発生したデータの標本自己相関関数 r_k の標準誤差としては、5.2節で

脚注1) このプログラムは国際大学大槻聡幸氏との共同研究で利用しているものである。

2) 一部は対話方式で利用できるようにしてある。開発は北沢博之氏による[13]。

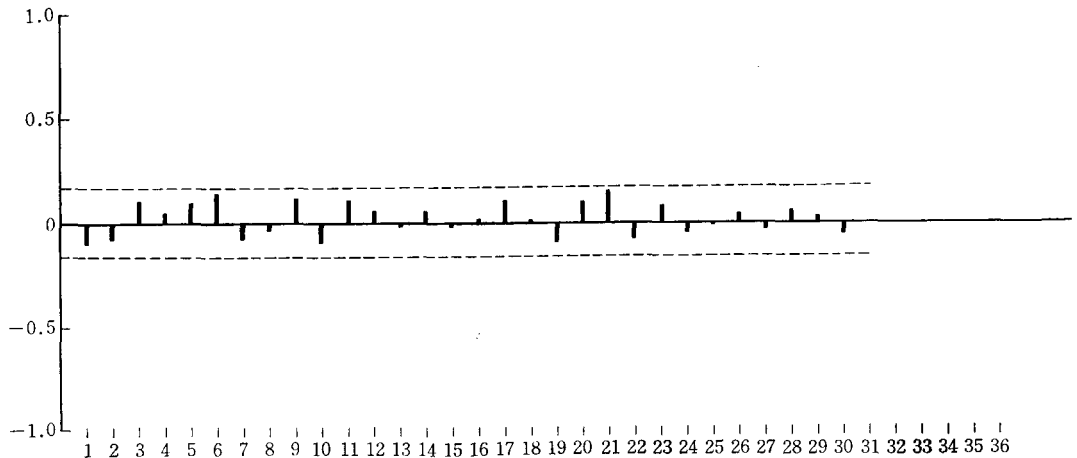


図 6.1 通貨供給量モデル $\nabla_{12} \nabla \log_e z_t = (1 - .714 B^{12}) a_t$ の残差 $\{a_t\}$ の自己相関コログラム

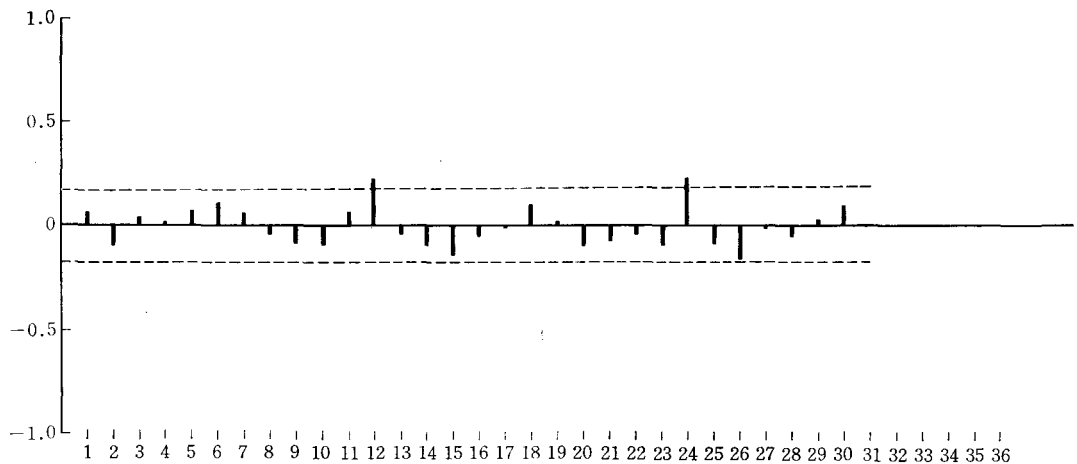


図 6.2 コール・レートモデル $(1 - .825 B) \nabla z_t = (1 - .562 B) a_t$ の残差 $\{a_t\}$ の自己相関コログラム

述べたように、近似的に、(5.1)式をつかえるから、

$$\hat{\sigma}_r = \sqrt{V[r_k]} = \sqrt{1/N} \quad (6.5)$$

を得る。したがって、残差 a_t のデータ数を N' として、その標本自己相関係数 r_k が、ほぼ $\pm 2\hat{\sigma}_r = \pm 2/\sqrt{N'}$ の範囲から外へ出ないようであれば、 a_t はホワイト・ノイズであると判断してよい。しかし、 r_k はあくまでも標本誤差をとまなるものであるから、1~2の r_k が $\pm 2\hat{\sigma}_r$ の外に出たとしても、ホワイト・ノイズであることを完全には否定できない。

そこで、ボックスとピアース(Box and Pierce)[15]は、ラグが1からKまでの標本自己相関係数 r_1, \dots, r_K を一括して、それらが全体として十分小さいかどうかを検定できる統計量Qを提唱している。それによれば、Nをデータ数として、次の統計量

$$Q = N \sum_{k=1}^K r_k^2 \quad (6.6)$$

は、自由度が $K - p - q$ のカイ二乗分布をしている。し

たがって、Qが、たとえば有意水準5%の棄却値 $\chi_{.05}^2$ を超えなければ、残差 $\{a_t\}$ はホワイト・ノイズであると判定できる。

通貨供給量 M_t について、表6.1に示すモデル推定の際の残差 $\{a_t\}$ の自己相関コログラムを図6.1に示す。また、コールレートについては、表6.2のモデル推定の際の残差の自己相関コログラムを図6.2に示している。点線で示しているのは、 $\pm 2\hat{\sigma}_r$ の位置である。図6.1の通貨供給量モデルの場合は、すべての r_k が $\pm 2\hat{\sigma}_r$ の範囲におさまっている。また、 $K=12$ として、Q統計量を求めると、 $Q = N \sum_{k=1}^{12} r_k^2 = 18.31$ であった。Qの自由度は、 $K - p - q = 12 - 1 - 0 = 11$ であり、有意水準5%として棄却値は $\chi_{.05}^2 = 19.7$ である。Q=18.31は $\chi_{.05}^2$ を超えていない。したがって、2つの検定から、残差 $\{a_t\}$ はホワイトノイズであると判断してよい。

表6.1に得られたモデルは、いかにも簡単な構造のも

表 6.3

パラメータ	推定初期値	推定値	95%信頼区間
ϕ_1	.90	.84	[.69; 1.00]
θ_1	.65	.50	[.25; .74]
θ	.32	.81	[.69; .92]

残差二乗和	.254	自由度	151	残差二乗平均	.168
残差個数	154			残差標準誤差	.410

のではあるが、以上の診断から、これ以上モデルを複雑で精緻なものにしても、あまり大きな結果は期待できない。

一方、図 6.2 のコレログラムのほうは、ラグ 12, 24 の自己相関係数 $r_{12}=.22$, $r_{24}=.23$ は、その標準誤差の 2 倍、 $2\hat{\sigma}_r=2(.08)=.16$ を超えており、明らかに、有意である。また、 $K=24$ として、Q 統計量を計算してみると $Q=N \sum_{k=1}^{24} r_k^2=40.155$ である。この Q の自由度は、 $K-p-q=24-1-1=22$ であり、棄却値は $\chi_{.05}^2=33.9$ であるので、 $Q=40.155$ は棄却値を超えている。以上から、

表 6.2 に推定したコールレートのモデル: $(1-.825B) \nabla z_t=(1-.562B)a_t$ の残差 $\{\hat{a}_t\}$ にはラグ 12, 24 の有意な自己相関が存在しており、モデルには、季節変動要因を組み込むべきであることを示唆している。

そこで、(6.4) 式のモデルをベースにして、次のような季節 ARMA モデルを推定する。

$$(1-\phi_1 B) \nabla \nabla_{12} z_t=(1-\theta_1 B)(1-\theta B^{12})a_t \quad (6.7)$$

推定結果を表 6.3 に示す。

このモデル推定による残差系列の標本自己相関係数で、やや大きなものとしては、 $r_9=-.12$, $r_{11}=.14$, $r_{15}=-.15$ などであったが、推定標準誤差 $\hat{\sigma}_r$ が .08 なので、有意なものはないとみなせる。また、 $K=12$ として、Q 統計量は、 $Q=N \sum_{k=1}^{12} r_k^2=7.4$ であった。この推定モデルはパラメータを 3 個含むので、Q の自由度は $K-3=9$ となり、有意水準 5% として棄却値は $\chi_{.05}^2=16.9$ であるから、 $Q=7.4$ の値は十分に小さい。よって、残差系列はホワイトノイズであると考えてよい。

7. ARIMA モデルによる予測について

時系列モデルをつくる通常の目的は、それをつかって、その時系列変数の何期か将来の値について予測することにある。以下に、推定して得られた ARIMA モデルをつかっての予測について説明する。

7.1 ARIMA 過程のランダム・ショック表現

一般に、ARIMA 過程

$$\phi(B) \cdot \nabla^d z_t=\theta(B)a_t \quad (7.1)$$

は、等価的に、過去のランダム・ショック (ホワイト・ノイズ) の線形関数

$$z_t=a_t+\psi_1 a_{t-1}+\dots+\psi_j a_{t-j}+\dots \quad (7.2)$$

の表現に変換することができ、これは“ランダム・ショック形式”と呼ばれている。

たとえば、AR(1)過程:

$$z_t=\phi_1 z_{t-1}+a_t \quad (7.3)$$

は、これに $z_{t-1}=\phi_1 z_{t-2}+a_{t-1}$ を代入すると、 $z_t=a_t+\phi_1 a_{t-1}+\phi_1^2 z_{t-2}$ となる。これに、さらに $z_{t-2}=\phi_1 z_{t-3}+a_{t-2}$ を代入するプロセスを繰り返していくと、

$$z_t=a_t+\phi_1 a_{t-1}+\dots+\phi_1^j a_{t-j}+\dots \\ = (1+\phi_1 B+\dots+\phi_1^j B^j+\dots)a_t \quad (7.4)$$

の形に変換される。

ここで、(7.3) 式の $(1-\phi_1 B)z_t=a_t$ が、等価的に、(7.4) 式に置き換えられたのであるから、 $(1-\alpha B)$ の逆演算子 $(1-\alpha B)^{-1}$ として、

$$(1-\alpha B)^{-1}=1+\alpha B+\dots+\alpha^j B^j+\dots \quad (7.5)$$

を定義し、 $(1-\alpha B)^{-1} \cdot (1-\alpha B)=(1-\alpha B)(1-\alpha B)^{-1}=I$ と約束すると都合がよい。ここで、 I は単位演算子で、 $I z_t=z_t$ とする。

この逆演算子をつかって、たとえば、ARIMA(0, 1, 1) 過程: $(1-B)z_t=(1-\theta B)a_t$ のランダム・ショック形式を求めるには、この両辺に $(1-B)^{-1}$ をかけて、

$$z_t=(1-B)^{-1}(1-\theta B)a_t=(1+B+B^2+B^3+\dots) \\ (1-\theta B)a_t \\ =\{1+(1-\theta)B+(1-\theta)^2 B^2+\dots+(1-\theta)^j B^j+\dots\}a_t \quad (7.7)$$

が得られる。

7.2 最小平均二乗誤差予測(minimum mean square error forecast)

いま、時点 t において、 l 期先の z_{t+l} の値を予測したいとして、その予測値を $\hat{z}_t(l)$ とかく。 z_{t+l} は、ランダム・ショック形式(7.2)であらわすと、

$$z_{t+l}=a_{t+l}+\psi_1 a_{t+l-1}+\dots+\psi_{l-1} a_{t+1}+\psi_l a_t \\ +\psi_{l+1} a_{t-1}+\dots \quad (7.8)$$

である。

時点 t において、 $\hat{z}_t(l)$ を求めるには、時点 t までのデータしか利用できないから、予測 $\hat{z}_t(l)$ は、観察 z_t, z_{t-1}, \dots の線形関数で求めるものとする。それは結局、時点 t までのランダム・ショック a_t, a_{t-1}, \dots の線形関数であらわされることになる。

すなわち、

$$\hat{z}_t(l)=\psi_l^* a_t+\psi_{l+1}^* a_{t-1}+\psi_{l+2}^* a_{t-2}+\dots \quad (7.9)$$

ここで、問題は、 $\hat{z}_t(l)$ が良い予測であるためには、 $\psi_l^*, \psi_{l+1}^*, \dots$ がどんな値であることが望ましいかということである。

(7.8)式と(7.9)式から、 l 期先の予測誤差 $e_t(l)$ の二乗の平均は、

$$E[e_t(l)^2] \equiv E[z_{t+l} - \hat{z}_t(l)]^2 = (1 + \Psi_1^2 + \dots + \Psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=1}^l [\Psi_{t+j} - \Psi_{t+j}^*]^2 \sigma_a^2 \quad (7.10)$$

この $E[e_t(l)^2]$ は、 $\Psi_{t+j}^* = \Psi_{t+j}$ であるときに、最小化されることになる。すなわち、そのとき、 $\hat{z}_t(l)$ は、最小平均二乗誤差予測である。

さて、(7.8)式の z_{t+l} を、時点 t において予測しようとする、 a_t, a_{t-1}, \dots はもうすでに実現した値であり、 $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_{t+l}$ はこれから実現する確率変数である。このように、 a_t, a_{t-1}, \dots はすでに実現済みという条件のもとで(7.8)式の期待値 $E[z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \dots] \equiv E_t[z_{t+l}]$ をとると、

$$\begin{aligned} E_t[z_{t+l}] &= E[a_{t+l} + \Psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \Psi_{l-1} a_{t+1} \\ &\quad + \Psi_l a_t + \Psi_{l+1} a_{t-1} + \dots] \\ &= E[e_t(l)] + \hat{z}_t(l) = \hat{z}_t(l) \end{aligned} \quad (7.11)$$

となる。すなわち、時点 t までの z_t の値が既知であるという条件のもとでの z_{t+l} の条件付期待値 $E[z_{t+l} | z_t, z_{t-1}, \dots]$ を求めれば、それは、 z_{t+l} に関する最小平均二乗誤差予測(最小 MSE 予測)でもあることがわかる。

$\hat{z}_t(l)$ は、 t を固定すると l の関数なので、予測関数とも呼ばれている。 $\hat{z}_t[l]$ の予測誤差 $e_t(l)$ は

$$\begin{aligned} e_t(l) &= z_{t+l} - \hat{z}_t(l) = a_{t+l} + \Psi_1 a_{t+l-1} + \dots \\ &\quad + \Psi_{l-1} a_{t+1} \end{aligned} \quad (7.12)$$

であり、予測誤差の期待値は、 $E[e_t(l)] = 0$ であり、予測 $\hat{z}_t(l)$ には偏りはない。また、 $e_t(l)$ の分散は、

$$V[l] = V[e_t(l)] = (1 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \dots + \Psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 \quad (7.13)$$

となる。これから、 z_{t+l} についての信頼区間を求めることができる。

いま、時点 t において、 $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+L}$ の線形関数 $F_t(L) = f_1 z_{t+1} + \dots + f_L z_{t+L}$ からなる量 $F_t(L)$ を予測したいときは、 z_{t+l} の最小 MSE 予測 $\hat{z}_t(l)$ を用いて、 $\hat{F}_t(L) = f_1 \hat{z}_t(1) + \dots + f_L \hat{z}_t(L)$ が $F_t(L)$ の最小平均二乗誤差予測であることも知られている。

たとえば、 $w_t = z_t - z_{t-1}$ であるとき、 $z_{t+L} = z_t + w_{t+1} + \dots + w_{t+L}$ であるから、 w_t についての最小 MSE 予測 $\hat{w}_t(l)$ を用いて、 z_{t+L} の最小 MSE 予測 $\hat{z}_t(L) = z_t + \hat{w}_t(1) + \dots + \hat{w}_t(L)$ が得られることになる。

7.3 予測誤差としての残差

予測 $\hat{z}_t(l)$ を計算するには、過去から現在に至るランダム・ショック(ホワイト・ノイズ) a_t, a_{t-1}, \dots の値を知らなければならない。

(7.12)式から、1期先の予測 $\hat{z}_t(1)$ の予測誤差は、

$$e_t(1) = z_{t+1} - \hat{z}_t(1) = a_{t+1} \quad (7.14)$$

となり、その時系列過程を発生している確率動因として

のノイズ、あるいは残差として知られているものに等しいことがわかる。 $\hat{z}_t(1)$ は、時点 t において利用できる観察値 z_t, z_{t-1}, \dots の線形関数のうちで、 z_{t+1} を最小の MSE で予測するものであるが、実際には、 z_{t+1} が実現して、予測値と実現値との乖離を表わしているのが(7.14)式である。ノイズ a_t が、別名ショックとか、イノベーション (innovation) と呼ばれるのはこのためであると考えられる。

予測を行なうには、過去に起こったショック a_t, a_{t-1}, \dots を知る必要があるが、そのためには、過去の1期先予測の誤差を記憶しておけばよいことになる。

参考文献

- [1]~[7]: 前々回参照
- [8], [9]: 前回参照
- [10] Akaike, H., E. Arahata and T. Ozaki, TIMSAC-74-A Time Series Analysis and Control Program Package(1), *Computer Science Monographs No.5*, The Institute of Statistical Mathematics, mar. 1975
- [11] Akaike, H., Arahata and T. Ozaki, TIMSAC-74(2), *Comp. Sci. Monographs No.6*, Inst. of Math. Stat., Feb. 1976
- [12] Akaike, H., G. Kitagawa, E. Arahata and F. Tada, TIMSAC-78, *Comp. Sci. Monographs No.11*, Inst. of Math. Stat., Feb. 1979
- [13] 高森 寛, 北沢博之「対話型時系列分析システム(1)」, 青山コンピュータ・サイエンス, 第10巻, 第1号, 青山学院大情報科学研究センター, 1982
- [14] 高森 寛「時系列分析理論の基本的枠組」, 青山コンピュータ・サイエンス, 第11巻, 第1号, 青山学院大情報科学研究センター-1983年9月
- [15] Box, G. E. P., and D. E. Pierce, Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive Moving Average Time Series Models, *Journal of the American Statistical Association*, 64(1970).
- [16] 経済企画庁調査局編, 「経済変動観測資料年報」, 昭和55年7月
- [17] Vandaele, W., *Applied Time Series and Box-Jenkins Models*, Academic Press, 1983