

# 経済データの時系列分析と予測 (4)

高 森 寛

## 7.4 条件付期待予測の計算

時点  $t$  において、それまでの過去のデータが既知であるという条件 ( $H_t$ ) のもとでの、 $l$  期先の時系列変数  $z_{t+l}$  の条件付期待値  $E(z_{t+l}|H_t)$  を求めれば、それは  $z_{t+l}$  についての最小平均二乗誤差予測 (最小 MSE 予測) でもあることを 7.2 節で触れた。一般に ARIMA 過程について 1 期先の  $z_{t+1}$  は、

$$z_{t+1} = \phi_1 z_t + \dots + \phi_p z_{t-(p+d)+1} + \delta + a_{t+1} - \theta_1 a_t - \dots - \theta_q a_{t-q+1} \quad (7.14)$$

の形となる。ここで、係数  $\Phi$  は、AR 部の係数  $\phi_i$  と階差  $(1-B)^d$  の階数  $d$  で決まってくる。時点  $t$  までのすべてのデータは実現済みであり、期待値  $E[a_{t+1}|H_t]$  はゼロであるので 1 期先予測  $\hat{z}_t(1)$  は、

$$\hat{z}_t(1) = E(z_{t+1}|H_t) = \phi_1 z_t + \dots + \phi_p z_{t-(p+d)+1} + \delta - \theta_1 a_t - \dots - \theta_q a_{t-q+1} \quad (7.15)$$

となる。したがって  $\hat{z}_t(1)$  を求めるには過去における攪乱 (残差)  $a_t, a_{t-1}, \dots$  を知る必要があるが、すでに述べたように、これらについては、過去における 1 期先予測の予測誤差

$$a_{t-i} = z_{t-i} - \hat{z}_{t-i}(1) \quad (7.16)$$

を利用すればよい。

$l$  期先予測  $\hat{z}_t(l)$  については、時点  $t$  より先 (未来) の攪乱はすべて期待値がゼロとなるので、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(l) = E(z_{t+l}|H_t) &= \phi_1 E(z_{t+l-1}|H_t) + \dots \\ &+ \phi_{p+d} E(z_{t+l-(p+d)}|H_t) + \delta - \theta_l a_t - \dots - \theta_q a_{t-(q-l)} \end{aligned} \quad (7.17)$$

となる。ここで  $l > q$  においては、攪乱  $a_t, a_{t-1}, \dots$  の項はなくなる。

また、この (7.17) 式において、 $z_{t+l-1}, z_{t+l-2}, \dots$  等の期待値については、それらの予測をつかうことになるから (7.17) 式は、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(l) &= \phi_1 \hat{z}_t(l-1) + \dots + \phi_{p+d} z_t [l - (p+d)] + \delta \\ &- \theta_l a_t - \dots - \theta_q a_{t-(q-l)} \end{aligned} \quad (7.18)$$

となる。

## 7.5 定常過程の予測プロファイル

簡単な ARIMA 過程を例にとりて、予測の計算方法を示し、また、予測プロファイルの特徴を示す。まず、AR(1)過程

$$z_t = \delta + \phi_1 z_{t-1} + a_t \quad (7.19)$$

について、時点  $t$  における  $l$  期先の予測  $\hat{z}_t(l)$  は、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(1) &= \phi_1 z_t + \delta & l=1 \\ \hat{z}_t(l) &= \phi_1 \hat{z}_t(l-1) + \delta & l>1 \end{aligned} \quad (7.20)$$

である。これらの予測  $\hat{z}_t(l)$  を求めるに当っては、過去から現時点  $t$  に至るまでの予測誤差

$$a_{t-k} = z_{t-k} - \hat{z}_{t-k}(1)$$

は、まったく関係してこないことに留意すべきである。

また (7.20) 式の子関数の特徴としては、 $l$  が大きくなるにつれて次第に指数 (関数) 的に減衰してゆく形状となる。このことをもっと明白に示すために、

$z_{t+l} = \phi_1 z_{t+l-1} + a_t$  を (7.4) 式のランダム・ショック形式に変換すると、

$$z_{t+l} = \mu + a_{t-l} + \phi_1 a_{t+l-1} + \phi_1^2 a_{t+l-2} + \dots \quad (7.21)$$

となる。ただし  $\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$  である。

したがって、その予測プロファイルは、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(l) &= \mu + \phi_1^l a_t + \phi_1^{l+1} a_{t-1} + \dots \\ &= \mu + \phi_1^l (a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots), l \geq 1 \end{aligned} \quad (7.22)$$

この (7.22) 式のカッコ内は、 $z_t - \mu$  すなわち、時点  $t$  における観察値  $z_t$  の過程平均  $\mu$  からの偏差に相当するから、

$$\hat{z}_t(l) = \mu + \phi_1^l (z_t - \mu) \quad (7.23)$$

となる。したがって時点  $t$  における偏差  $(z_t - \mu)$  が  $l$  が大きくなるにつれて、 $\phi_1$  の率で減衰してゆく。よって図 7.1 のようなプロファイルとなる。

いっぽう、MA(1)過程

$$z_{t+l} = \delta - a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1} \quad (7.24)$$

の場合の予測は、

$$\hat{z}_t(1) = \delta - \theta_1 a_t$$

$$z_t(l) = \delta \quad l > 1 \quad (7.25)$$

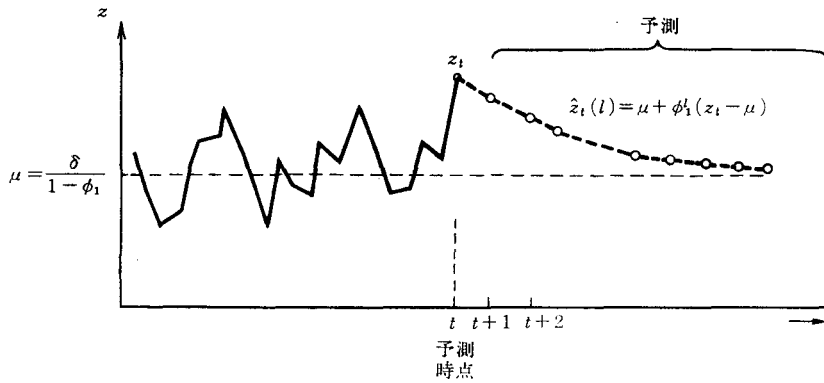


図7.1 AR(1)過程の予測プロファイル

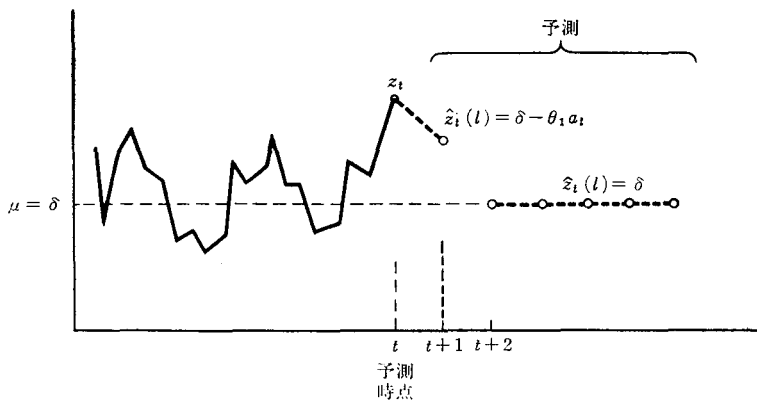


図7.2 MA(1)過程の予測プロファイル

となる。したがって、MA(1)の予測の場合は、図7.2に示すように、1期先の予測  $\hat{z}_t(1)$  は、時点  $t$  における攪乱(予測誤差)  $a_t$  によって決まるが、1期以上先の期の予測値は単に過程の平均  $\mu = \delta$  となる。

4.2節で指摘したように、MA(1)過程の自己相関係数は、ラグ  $k$  が1の  $\rho_1$  のみがゼロではない値となり、それ以外の  $\rho_k$  はすべてゼロとなり、過程に起こったことの記憶が1期間だけしか残存しない過程である。このことが、MA(1)過程の予測プロファイルにもよく現われているといえる。

一般的にMA( $q$ )過程の予測プロファイル  $\hat{z}_t(l)$  は、 $l = 1, 2, \dots, q$  までが過去の攪乱に依存して決まるが、その先の期については、過程の  $\mu = \delta$  になると類推されるが、実際にそのとおりであることを示せる。

## 7.6 非定常過程の予測プロファイル

### 7.6.1 ARI(1,1)過程の例

非定常過程で簡単なのはARIMA(1,1,0)過程

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B)z_t = \delta + a_t \quad (7.26)$$

である。これはMA部分がないのでARI(1,1)とも呼

ばれるが、階差方程式

$$z_t = (1 + \phi_1)z_{t-1} - \phi_1 z_{t-2} + \delta + a_t \quad (7.27)$$

の形であらわされる。(7.15)式に相当する1期先予測は

$$\hat{z}_t(1) = (1 + \phi_1)z_t - \phi_1 z_{t-1} + \delta \quad (7.28)$$

また多期先の予測は、(7.18)式から

$$\hat{z}_t(2) = (1 + \phi_1)\hat{z}_t(1) - \phi_1 z_t + \delta \quad (7.29)$$

$$\hat{z}_t(l) = (1 + \phi_1)\hat{z}_t(l-1) - \phi_1 \hat{z}_t(l-2) + \delta \quad l > 2$$

である。

予測プロファイル(7.28)、(7.29)を求めるもう1つの

簡単な方法は、 $z_{t+l}$  は階差  $w_t = \nabla z_t$  の和、すなわち、

$$z_{t+l} = z_t + w_{t+1} + \dots + w_{t+l} \quad (7.30)$$

の関係を使うことである。

この場合7.2節で触れたように  $z_{t+l}$  の条件付期待予測

$\hat{z}_t(l)$  は、 $z_t$  に  $w_{t+1}, \dots, w_{t+l}$  の条件付期待予測を加えたものとして得られる。そして階差  $w_t$  のほうはAR(1)過程

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \delta + a_t \quad (7.31)$$

であるから、前節(7.20)式の予測プロファイルとなる。

いま時点  $t$  において、 $w_t$  がその平均  $\mu = \frac{\delta}{1 - \phi_1}$  から  $w_t$

$-\mu$  だけへたっているとする、 $w_t$  の予測  $\hat{w}_t(l)$  は、

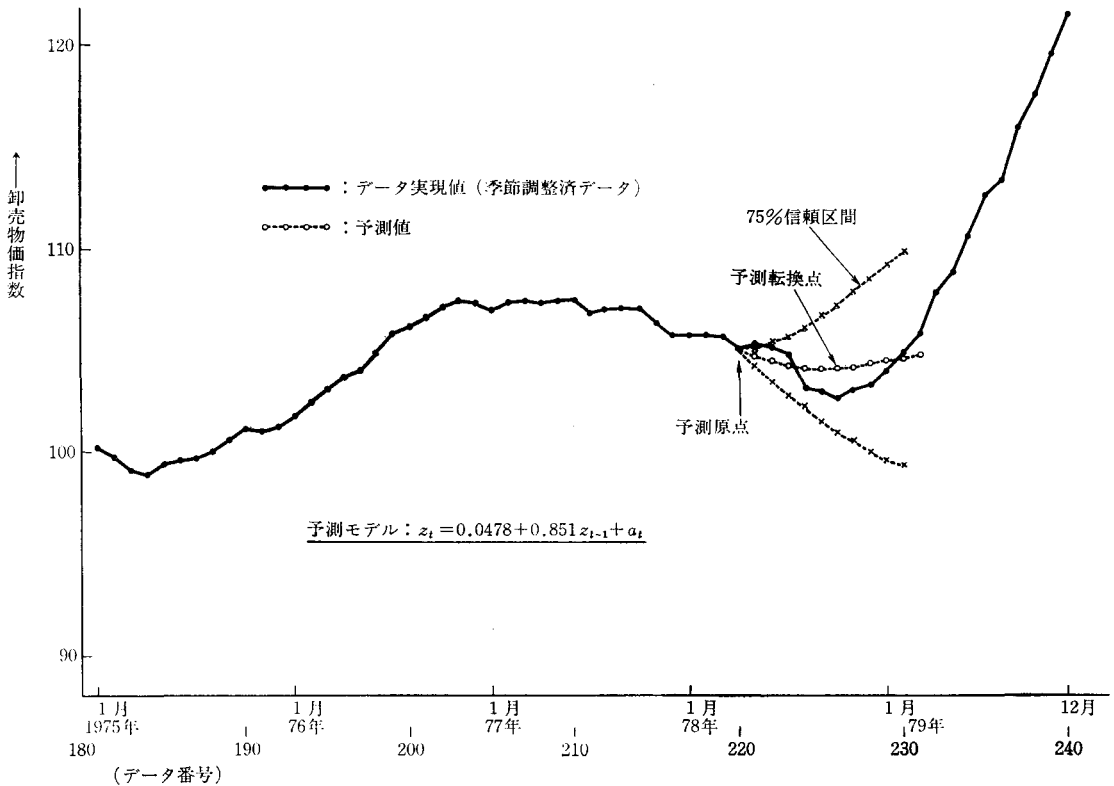


図7.3 卸売物価指数AR I (1,1)モデルによる予測プロフィールと信頼区間. 予測原点: 1978年4月

$$\hat{w}_t(l) = \mu + \phi_1^l (w_t - \mu) \quad (7.32)$$

にしたがって減衰して、平均に近づく。したがって、 $z_t$ の予測プロフィール

$$\hat{z}_t(l) = z_t + \hat{w}_t(1) + \dots + \hat{w}_t(l) \quad (7.33)$$

は勾配が  $\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1}$  の漸近直線に近づく。

特に、経済時系列データでは、トレンドファクタ  $\delta$  は正の値であるから予測プロフィール  $\hat{z}_t(l)$  の漸近線は勾配が正、すなわち上向きの直線である。しかし時点  $t$  において、 $w_t$  がその平均  $\mu$  よりも小さい ( $w_t - \mu < 0$ ) とときは、(7.32)式から明らかのように、 $\hat{w}_t(1), \hat{w}_t(2) \dots$  が、しばらく負で、ある時点で正となるケースがある。そのような時は、 $z_t$  の予測プロフィールは当初減少し、ある時点で増加の方向に転ずるプロフィールとなる。すなわち減少傾向から増加傾向へ転ずる転換点 (turning point) をもったプロフィールとなる。

例として図7.3に示すような卸売物価指数(1960年1月~1979年12月, 季節調整済) データについて、予測プロフィールを求めてみる。この240個の観察データについてAR I (1,1)モデルを推定してみると、

$$(1 - 0.85142B) \nabla z_t = 0.04782 + a_t \quad (7.34)$$

が得られた。実際には、この推定モデルの残差には若干

の自己相関が残っており、もうすこしモデル改良の余地があるのであるが、ここでは予測計算の簡単な例としてこのモデルを使う。

いま、モデル (7.34) 式をつかって、 $t=220$  の時点 (1978年4月) を予測原点として予測プロフィールを求めてみる。 $z_{219}=105.6$  から  $z_{220}=105.1$  への階差  $w_{220}=105.1-105.6=-0.5$  を初期値として、

$$\hat{w}_t(l) = 0.85142 \hat{w}_t(l-1) + 0.04782 \quad (7.35)$$

の関係をつかって、表7.1のように  $\hat{w}_{220}(l)$  と  $\hat{z}_{220}(l)$  を計算できる。

また  $l$  が大きくなるにつれて  $\hat{w}_{220}(l)$  は、過程の平均  $\mu = \frac{\delta}{1-\phi_1} = \frac{0.04782}{1-0.85142} = 0.32$  に近づく。すなわち、物価指数は長期的には毎月0.32ずつ増加していくことが予想される。表7.1で注目すべきことは、このモデルを使って  $t=220$  (78年4月) の時点で物価指数を予測したとするならば、むしろ5か月間は物価が下りつづけることが予測されていることである。そして転換点は6か月先ごろに予測されている。図7.3には実際のデータの変動 (観察個数240個のうち後半の180~240番目の範囲のみを示す。) と、表7.1に得られた予測プロフィール ( $l=24$ まで) を重ねて示す。また区間

表7.1 ARI(1,1)モデルによる予測計算

$l$	$\hat{w}_{220}(l)$	$\hat{z}_{220}(l) = z_{220} + \hat{w}_{220}(1) + \dots + \hat{w}_{220}(l)$
0	-0.05	105.1
1	-0.378	104.72
2	-0.274	104.44
3	-0.185	104.26
4	-0.110	104.15
5	0.046	104.11
6	0.009	104.12
7	0.055	104.17
8	0.095	104.27
9	0.12	104.39
10	0.16	104.55

予測としての75%信頼区間も示す。また図7.4には、同じモデルを使って1期先予測 $\hat{z}_t(1)$ と実際データ実現値とを重ねて示している。

7.6.2 IMA(1,1)過程の予測

非定常過程で、もうひとつ簡単なのは、ARIMA(0, 1, 1)過程

$$z_t - z_{t-1} = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad (7.36)$$

である。これはAR部分がないのでIMA(1,1)過程とも呼ばれる。時点 $t$ において、1期先の

$$z_{t+1} = z_t + \delta + a_{t+1} - \theta_1 a_t \quad (7.37)$$

を予測するには、時点 $t$ までのすべてのデータが既知であるという条件( $H_t$ )のもとでの条件付期待値を求めればよいから、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(1) &= E[z_{t+1} | H_t] \\ &= z_t + \delta - \theta_1 a_t \end{aligned} \quad (7.38)$$

となる。1期先以上の予測としては、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(l) &= \hat{z}_t(l-1) + \delta \\ &= \hat{z}_t(1) + (l-1)\delta \quad l > 1 \end{aligned} \quad (7.39)$$

である。したがって、この予測プロファイルは時点 $t+1$ において $\hat{z}_t(1)$ を出発点とした勾配が $\delta$ の直線となる。

ここで、(7.38)式に得られたIMA(1,1)過程の条件付期待予測、すなわち最小MSE予測 $\hat{z}_t(1)$ は、実は、時系列データの指数平滑予測(Exponentially Weighted Moving-Average, EWMA)であることを示せる。それを簡単に

示すために、いまトレンドファクター $\delta$ はゼロと仮定する。(7.37)式から(7.38)式を引くと、

$$z_{t+1} - z_t(1) = a_{t+1} \quad (7.39)$$

であるから、すでに7.3節でも示したように、ノイズ(攪乱) $a_t$ は、1期先予測 $\hat{z}_{t-1}(1)$ の予測誤差 $z_t - \hat{z}_{t-1}(1) = a_t$ である。さて、これを(7.38)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{z}_t(1) &= z_t - \theta(z_t - \hat{z}_{t-1}(1)) \\ &= (1-\theta)z_t + \theta_1 \hat{z}_{t-1}(1) \end{aligned} \quad (7.40)$$

この(7.40)式は、時点 $t-1$ において、 $z_t$ についての予測 $\hat{z}_{t-1}(1)$ を得た後、時点 $t$ において、データ実現値 $z_t$ の観察を新たに加えて、 $z_{t+1}$ についての予測 $\hat{z}_t(1)$ へと更新する式を与えるものとして重要である。すなわち $\hat{z}_{t-1}(1)$ と $z_t$ の荷重平均として $\hat{z}_t(1)$ に更新される。また、さらに(7.40)式に $\hat{z}_{t-1}(1) = (1-\theta_1)z_{t-1} + \theta_1 \hat{z}_{t-2}(1)$ を代入すると、

$$\hat{z}_t(1) = (1-\theta_1)z_t + \theta_1(1-\theta_1)z_{t-1} + \theta_1^2 \hat{z}_{t-2}(1) \quad (7.41)$$

が得られ、この $\hat{z}_{t-2}(1)$ にさらに同様の代入を行なうというプロセスをくりかえしてゆくと、

$$\hat{z}_t(1) = (1-\theta_1)z_t + \theta_1(1-\theta_1)z_{t-1} + \theta_1^2(1-\theta_1)z_{t-2} + \dots \quad (7.42)$$

が得られる。これはまさしく過去の観察データ $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$ についての指数荷重移動平均EWMA、すなわち、指数平滑予測の式である。

以上から、データ発生過程がIMA(1,1)過程であ

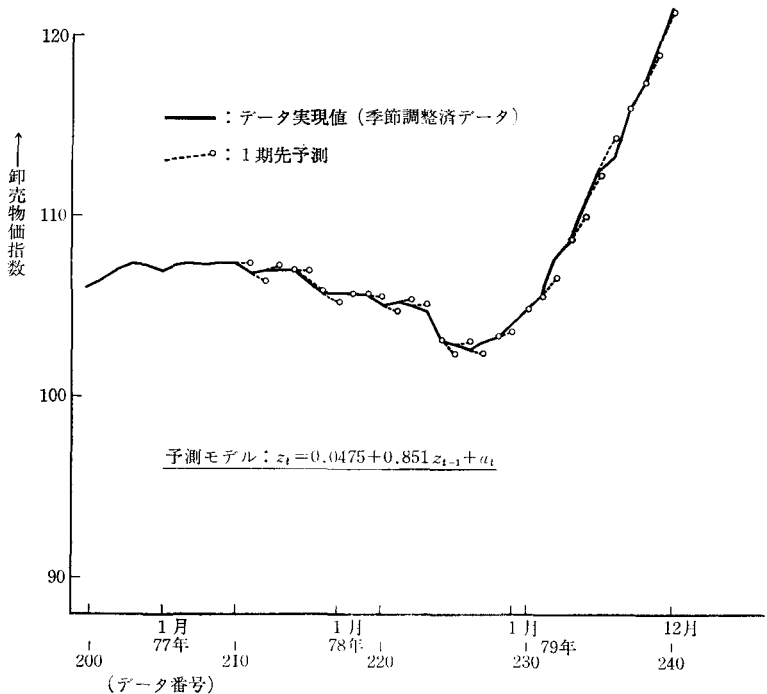


図7.4 卸売物価指数ARI(1,1)モデルによる1期先予測と実現値

るときは、指数平滑予測が最小平均二乗誤差予測であることが明らかとなった。しかも、従来指数平滑予測における荷重係数 $\theta_t$ の値の決め方については、あまりはつきりした理論がなく、恣意的な感じがあった。しかし、ここで、IMA(1,1)過程については、そのMA部分の係数 $\theta_t$ を予測式(7.40)、(7.42)式に用いるのが最適であるという理論的根拠が与えられたことになる。

IMA(1,1)過程以外のARIMA過程については、指数平滑予測は最小MSE予測にならない。

### 7.6.3 季節型ARIMA過程の予測

通貨供給量 $M_1$ のデータ(本シリーズ(1)の図1)について、6.1節では季節移動平均型のモデル

$$(1-B)(1-B^{12})\log_e z_t = (1-\theta B^{12})a_t \quad (6.3)$$

$$\theta = 0.714$$

が得られた。このモデルをつかって季節型ARIMA過程の予測計算と予測プロファイルの例を示す。いま(6.3)式を $x_t = \log_e z_t$ とおいて書き直すと、

$$(1-B-B^{12}+B^{13})x_t = (1-0.714B^{12})a_t \quad (6.3)'$$

したがって、

$$x_t = x_{t-1} + x_{t-12} - x_{t-13} + a_t - 0.714a_{t-12} \quad (6.3)''$$

ここで階差 $w_t = x_t - x_{t-1}$ をつかって書き直すと、

$$x_t = x_{t-1} + w_{t-12} + a_t - 0.714a_{t-12} \quad (6.3)'''$$

いま時点 $t$ において1期先の

$$x_{t+1} = x_t + w_{t-11} + a_{t+1} - 0.714a_{t-11}$$

を予測するために、 $t$ までのすべてのデータが既知であるという条件( $H_t$ )のもとでの期待値 $\hat{z}_t(1)$ を求めると、

$$\hat{z}_t(1) = x_t + w_{t-11} - 0.714a_{t-11} \quad (7.43)$$

である。予測原点 $t$ がある年の10月であるとして、翌月11月の $x_{t+1}$ を予測するものとする。(7.43)式において、 $x_t$ は、その10月における実現値 $x_t = \log_e z_t$ である。また、 $w_{t-11}$ は、その前年における10月から11月への増分であり、 $a_{t-11}$ は、前年10月に11月の $x_{t-11}$ を予測した際の予測誤差

$$a_{t-11} = x_{t-11} - \hat{x}_{t-12}(1) \quad (7.44)$$

である。これら $x_t, w_{t-11}, a_{t-11}$ は時点 $t$ においては、すべて既知であるから、(7.43)式をつかって $\hat{z}_t(1)$ を求めることができる。

同様に、 $l$ 期先の

$$x_{t+l} = x_{t+l-1} + w_{t+l-12} + a_t - 0.714a_{t+l-12} \quad (7.45)$$

を予測するには、12期先まで( $l \leq 12$ )は

$$\hat{x}_t(l) = \hat{x}_t(l-1) + w_{t+l-12} + 0.714a_{t+l-12}, \quad 2 \leq l \leq 12 \quad (7.46)$$

であるが、12期以上先( $l > 12$ )の予測になると、

$$\begin{aligned} \hat{x}_t(l) &= \hat{x}_t(l-1) + \hat{w}_t(l-12) \\ &= \hat{x}_t(l-1) + \hat{x}_t(l-12) + \hat{x}_t(l-13), \quad l > 12 \end{aligned} \quad (7.47)$$

となる。さて、このモデルは、原データ $z_t$ について対数

変換をしてつくったモデルであるから、得られた予測値 $\hat{x}_t(l)$ については、その逆変換をして予測 $\hat{z}_t(l)$ を得ることになる。すなわち、

$$\hat{z}_t(l) = \exp[\hat{x}_t(l)] \quad (7.48)$$

以上のようにして、通貨供給量 $M_1$ について得られた季節移動平均型モデル(6.3)式をつかって予測値と実績値を重ねて示したのが図7.5である。1974年12月(データ番号96)と74年12月(データ132)の2つの時点を予測原点として想定して、それぞれ18期先までの予測プロファイルを求めたものである。予測区間として75%信頼区間も示してある。

通常は、単一時系列ARIMAモデルは比較的短期の予測に利用されるものであるが、図7.5からも明らかのように、ここに得られたような簡単な季節型モデルが得られた場合は、18期(1年半)ほどの多期間にわたってかなりの予測精度を期待できることがわかる。

一般に、非定常のARIMA過程では、図7.4の場合のように、予測信頼区間の幅が急速に広がってしまうモデルも多いのであるが、図7.5の場合は区間の幅が多期にわたってあまり広がらないことに注目すべきであろう。また図7.5において、特に77年12月(データ:132)を予測原点として想定したケースの予測プロファイルは、実績値と比較してその値、変動パターンともに、きわめて精度が高いものであることは、注目に値しよう。

## 結 言

この講座では、経済データの時系列分析に関して、主に単一時系列のARIMAモデルによる分析の方法を扱ってきた。しかもボックス・ジェンキンス流の方法を主に紹介した。単一時系列ARIMAモデルは、主に短期の予測に有効であるとされているが、前節で示したように、とり扱う経済データの性質によっては、きわめて簡単な構造のARIMAモデルによっても、かなり多期間にわたって、精度の高い予測が可能となる場合もある。

時系列分析の分野としては、多変数の時系列分析の領域がある。そこでは変数間の依存関係、因果関係、フィードバックの構造等の解明等をも扱うことができる。また、多変数ARIMAモデルは、計量経済同時方程式モデルとも密接な関係がある。

本講座で扱ったような単一時系列分析の場合は、その分析の目的は予測を主なものとするが、予測に加えて、計画やコントロールをも分析の目的とするようになると多変数時系列分析を行なうことになる。

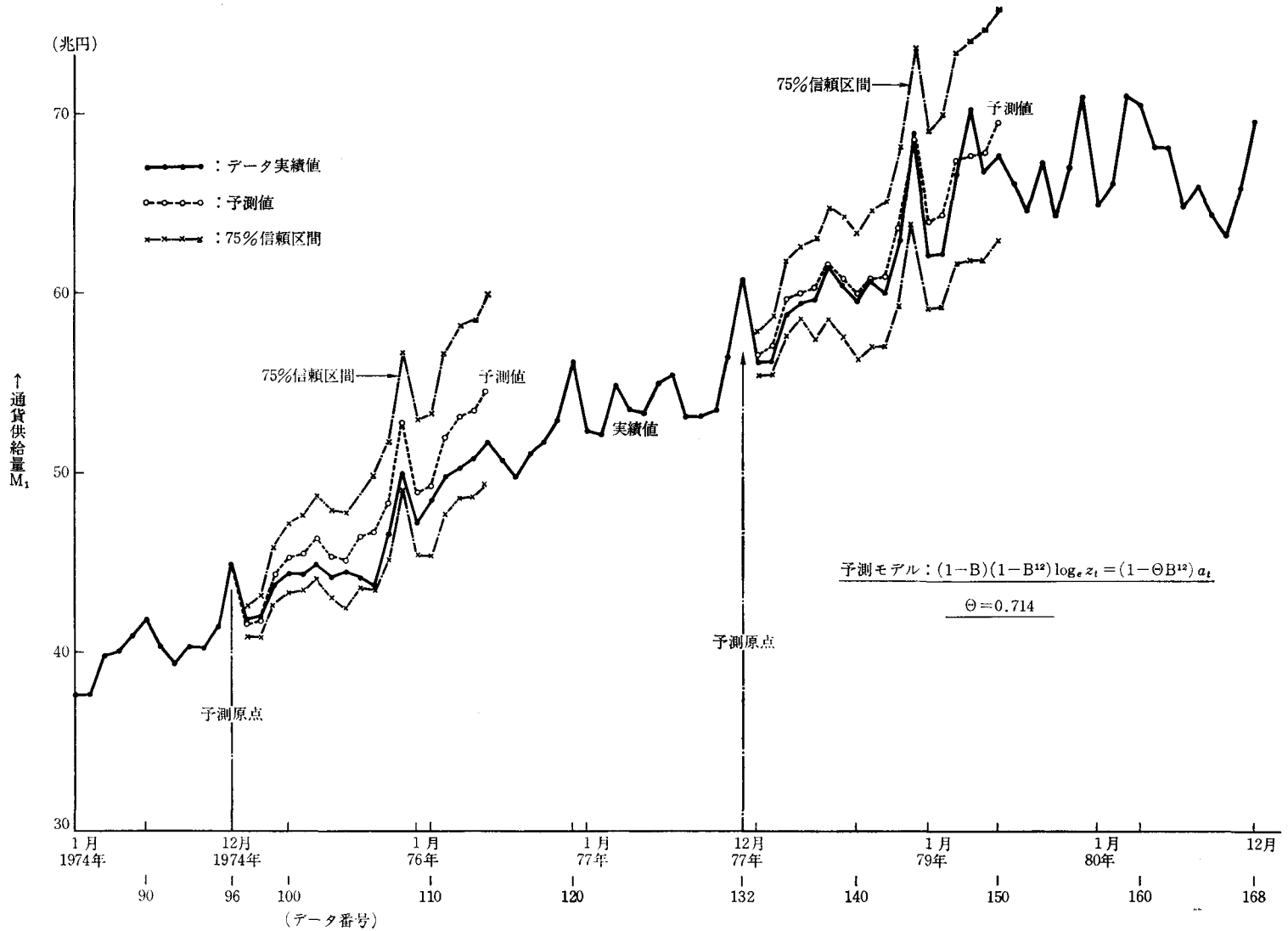


図7.5 季節移動平均型モデルによる子測値と75%信頼区間：通貨供給量  $M_1$