

QNA: Queueing Network Analyzer について (3)

木村 俊一

6. 各ノードにおける待ち特性量

5章の結果として、QNの各ノードへの客の到着過程については、到着時間間隔の平均と変動係数が、それぞれ、トラフィック率方程式(5.1)と、トラフィック変動方程式(5.5)を解くことにより得ることができる。また、各ノードでの客のサービス時間については、その平均と変動係数が、入力データとしてすでに与えられている。したがって、これらのパラメータのみに依存するGI/G/m待ち行列に対する近似を用いれば、QNを近似的にノード1つ1つに分解して解析することができる。本章では、分解された個々のノードにおける待ち特性量について考察するため、パラメータに付けられたノード番号を示す添字は省略する。

6.1 単一窓口ノード

この節では、窓口数 $m=1$ のノードについて、その待ち特性量を近似解析する。定常状態における客の待ち時間を W で表わすことにする。QNAでは、その平均 EW については、次の近似式を用いている。

$$EW = \frac{(c_a^2 + c_s^2)\tau\rho g}{2(1-\rho)} \quad (6.1)$$

ただし、

$$g \equiv g(\rho, c_a^2, c_s^2) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{2(1-\rho)}{3\rho} \frac{(1-c_a^2)^2}{c_a^2 + c_s^2}\right\}, & c_a^2 < 1 \\ 1, & c_a^2 \geq 1 \end{cases} \quad (6.2)$$

(6.1)は、重負荷近似 (heavy traffic approximation) [7] にもとづく項に修正項 g を乗ずる形をしており、 $c_a^2 < 1$ のとき、GI/G/1待ち行列の平均待ち時間に対する Kraemer & Langenbach-Belz [9] の近似 (KL近似と略す) と一致する。 $c_a^2 \geq 1$ のときには、KL近似における複雑な式で表わされる修正項が、それほど精度の向上に寄与していないことが判明したため、 $g=1$ を用

いている。この場合、(6.1)は、GI/G/1待ち行列に対する Sakasegawa [10], Yu [16] の近似式と一致する。明らかに、M/G/1待ち行列に対しては、(6.1)は厳密解を与える。

ノードにおける(サービス中の客を含む)客数を N で表わすことにする。このとき、任意時点において窓口が稼動中である確率は、

$$P\{N > 0\} = \rho \quad (6.3)$$

で与えられ、また、平均客数 EN は、Littleの公式を用いて、

$$EN = \rho + \lambda EW \quad (6.4)$$

で与えられる(たとえば、[4, pp. 399-415]参照)。(6.3)および(6.4)における EN と EW のあいだの関係については、定常な非再生到着過程に対しても厳密に成立する [1, pp. 106-111]。

客の待ち確率 $\sigma \equiv P\{W > 0\}$ については、QNAでは、 σ に対する KL 近似

$$\sigma = \rho + (c_a^2 - 1)(1 - \rho)\rho h \quad (6.5)$$

を用いている [9]。ただし、

$$h \equiv h(\rho, c_a^2, c_s^2) = \begin{cases} \frac{1 + c_a^2 + \rho c_s^2}{1 + \rho(c_s^2 - 1) + \rho^2(4c_a^2 + c_s^2)}, & c_a^2 < 1 \\ \frac{4\rho}{c_a^2 + \rho^2(4c_a^2 + c_s^2)}, & c_a^2 \geq 1 \end{cases} \quad (6.6)$$

(6.5)は、M/G/1待ち行列に対する厳密解 $\sigma = \rho$ に修正項を加える形をしている。

次に、窓口が稼動中であるという条件の下での待ち時間 D を解析する。明らかに、その平均については、関係式 $ED = EW/\sigma$ によって求めることができる。ここでは、 D の変動係数 c_D に対する近似式を導くことにしよう。GI/G/1待ち行列の条件付き待ち時間 D は、到着時間間隔分布よりもサービス時間分布に強く依存していると考えられるため、M/G/1待ち行列に対する D の変動係数 c_D を、GI/G/1待ち行列のその近似として用い

ることとする。M/G/1 待ち行列に対しては、

$$c_D^2 = 2\rho + \frac{4(1-\rho)d_s^3}{3(c_s^2+1)^2} \quad (6.7)$$

となる。ここで、 d_s は、サービス時間を表す確率変数を v としたとき、 $d_s^3 = E(v^3)/(Ev)^3$ で定義される。 d_s^3 には3次モーメント $E(v^3)$ が含まれているために、何らかの近似が必要である。サービス時間分布として、変動係数に応じて、分布 $E_k(c_s^2 < 1)$, あるいは $H_2^b(c_s^2 \geq 1)$ をあてはめることで、 d_s^3 を次の式によって近似する [11]。

$$d_s^3 = \begin{cases} (2c_s^2+1)(c_s^2+1), & c_s^2 < 1 \\ 3c_s^2(c_s^2+1), & c_s^2 \geq 1 \end{cases} \quad (6.8)$$

(6.8) は、その作り方から、分布 E_k, H_2^b に対しては厳密に成り立つ。(6.1), (6.5), (6.7), (6.8) より、 D の分散が、

$$\text{Var}(D) = (ED)^2 c_D^2 = (EW)^2 c_D^2 / \sigma^2 \quad (6.9)$$

と求められる。 D に対するこれらの近似を用いると、 W の変動係数 c_W を、

$$c_W^2 = \frac{E(W^2)}{(EW)^2} - 1 = \frac{\sigma E(D^2)}{(\sigma ED)^2} - 1 = \frac{c_D^2 + 1 - \sigma}{\sigma} \quad (6.10)$$

によって計算することができる。 W の分散については、(6.9)と同様に、

$$\text{Var}(W) = (EW)^2 c_W^2 \quad (6.11)$$

によって求めることができる。

QNAでは、以上の待ち特性量のモーメントに対する近似に加えて、条件付き待ち時間 D の近似分布が計算される。この近似は、 D の変動係数に応じて、次の4種類の分布をあてはめることによってなされる。

- (i) $c_D^2 > 1.01$ のとき、 H_2^b
- (ii) $0.99 \leq c_D^2 \leq 1.01$ のとき、 M
- (iii) $0.501 \leq c_D^2 < 0.99$ のとき、 E_2^g
- (iv) $c_D^2 < 0.501$ のとき、 E_2

ここで、 E_2^g は2次の一般アーラン分布 (generalized Erlang distribution) を表わし、その密度関数を h とすると、

$$h(x) = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} (e^{-\gamma_2 x} - e^{-\gamma_1 x}), \quad x \geq 0 \quad (6.12)$$

によって定義される。ただし、

$$\gamma_i^{-1} = \frac{1}{2} \{ ED + (-1)^i \sqrt{2 \text{Var}(D) - (ED)^2} \}, \quad i=1, 2 \quad (6.13)$$

2次のアーラン分布 E_2 は、 E_2^g において $\gamma_1 = \gamma_2$ とする特別な場合に相当する。一定サービス時間の場合には $d_s^3 = 1$ となり、このとき、(6.7)により決定される c_D^2 は、その最小値 $(1+2\rho)/3 \geq 1/3$ をとる。このことから、分布のあてはめのケース(iv)は、まれにしか起こらないことがわかる。

ノードにおける客数 N の分散についても、M/G/1 待

ち行列に対する結果を修正することで、その近似解を導くこととする。M/G/1 待ち行列のサービス時間と待ち時間の分布関数を、それぞれ、 $H(t), W(t) (t \geq 0)$ で表わす。このとき、任意時点において系内に j 人の客がいる定常状態確率 p_j は、

$$p_j = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} d\{W * H(t)\}, \quad j \geq 0$$

と表わすことができる。したがって、

$$\begin{aligned} E(N^2) &= \sum_{j=0}^\infty j^2 p_j \\ &= \lambda EW + \rho + \lambda^2 E(W^2) + 2\lambda \rho EW + \rho^2 (c_s^2 + 1) \end{aligned}$$

を得る。これより、M/G/1 待ち行列に対しては、

$$\text{Var}(N) = \lambda EW + \rho + \rho^2 c_s^2 + \lambda^2 \text{Var}(W) \quad (6.14)$$

が成り立つ。GI/G/1 待ち行列に対しては、客数 N の変動係数 c_N を、

$$c_N^2 = Y_1 Y_2 / Y_3 \quad (6.15)$$

で定義する。ただし、 Y_1 は、(6.1), (6.11) を (6.14) に代入した値を表わし、

$$\begin{aligned} Y_2 &= (1 - \rho + \sigma) / \max\{(1 - \sigma + \rho), 10^{-6}\} \\ Y_3 &= \max\{(\rho + \lambda EW)^2, 10^{-6}\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

と表わされる。ここで、 \max をとる操作はゼロによる割り算を避けるためであり、本質的ではない。(6.15)において Y_1 / Y_3 が主となる項であり、 Y_2 はその修正項の役割を果たしている。M/G/1 および GI/M/1 待ち行列に対しては、 Y_2 は正確な修正値を与えているので、もし、 $\sigma, EW, \text{Var}(W)$ の正確な値を求めることができれば、これらの待ち行列に対しては、(6.15)は厳密解を与える。また、重負荷の状況では、(6.15)は漸近的に正確になっている。(6.4), (6.15)を用いると、GI/G/1 待ち行列に対する N の分散が、

$$\text{Var}(N) = (EN)^2 c_N^2 \quad (6.17)$$

によって求めることができる。

6.2 複数窓口ノード

QNAの第1版におけるGI/G/m待ち行列の待ち特性量の近似は、残念ながら、前節の単一窓口の場合の近似ほど成功しているとはいえない。これは、GI/G/m待ち行列の解析の困難さに起因しており、早急な改善が望まれるQNAの問題点の1つである。

M/M/m待ち行列の待ち特性量の厳密解を、たとえば平均待ち時間については、 $EW(M/M/m)$ のように書き表わすことにしよう。QNAでは、GI/G/m待ち行列の待ち特性量を、M/M/m待ち行列に対する厳密解をそのまま、あるいは少し修正して近似している。平均待ち時間については、Köllerström [8] の重負荷近似を考慮して、

$$EW = \frac{c_a^2 + c_s^2}{2} EW(M/M/m) \quad (6.18)$$

を用いている。平均系内客数については、Littleの公式(6.4)によっている。\$W\$と\$N\$の変動係数については、ほとんど手つかずと言ってよく、単純に、

$$c_W^2 = c_W^2(M/M/m), \quad c_N^2 = c_N^2(M/M/m) \quad (6.19)$$

とおいっているにすぎない。アルゴリズムによる接近法を含めて、より高い精度をもつ近似が必要である。

7. システムの性能評価

QN全体の性能を評価する尺度は、次の2つの観点から考える必要がある。1つは、ネットワーク型システムを管理する者の観点であり、もう1つは、サービスを受ける客の立場からの観点である。

システムを管理する立場からは、スループット(throughput)が、QN全体の性能を評価する尺度として基本的なものと考えられる。スループットは、QN外部からの総到着率

$$\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_{0i} \quad (7.1)$$

として定義される。これに対して、QN外部への総退去率は、

$$d_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i (1 - \sum_{j=1}^n a_{ij}) = \lambda_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i (\gamma_i - 1) \quad (7.2)$$

によって定義され、各ノードにおいて客の生成・結合が行なわれない場合、すなわち、\$\gamma_i = 1 (i=1, \dots, n)\$のときには、スループットと一致する。\$\lambda_0, d_0\$に関連した尺度としては、単位時間あたりのサービス終了回数=サービス完了率が、

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_i \quad (7.3)$$

と表わされる。

QN全体での客の総数を\$N\$で表わすと、その平均は、

$$EN = \sum_{i=1}^n EN_i \quad (7.4)$$

となる。分散についてはノード相互間の相関を無視できないが、パラメトリック分解の基本的な考え方である各ノードは互いに独立であるとの近似にしたがうと、

$$\text{Var}(N) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(N_i) \quad (7.5)$$

と表わされる。マルコフ型QNにおいては、積形式解(product form solution)をもつことから、(7.5)が確かに成り立つが、一般のQNについては、(7.5)は近似でしかないことに注意しよう。

一方、客の立場からシステムの性能評価を行なうさいには、入力仕様に応じた2つの異なった解釈が考えられる。標準入力仕様に関しては、QN内をたどる客のルートは、経路行列によって巨視的に決定され、特定の客のルートとは必ずしも一致しない。これに対して、クラス

・ルート入力仕様は微視的と呼ぶことができるだろう。以下では、入力仕様に対応するこれら2つの解釈により、システムの性能評価尺度を考察してみよう。

巨視的解釈

標準入力仕様からの巨視的解釈をとる場合には、QN内の客の振舞いは、吸収マルコフ連鎖の理論によって完全に記述できる。2.1節でも述べたように、経路行列\$Q\$は、QNの外部を吸収状態、内部のノードを過渡状態とする吸収マルコフ連鎖の過渡状態間の推移を表わす部分推移確率行列に他ならない。したがって、\$I=I\$のときには、(5.2)にあらわれる行列\$F \equiv (I-Q)^{-1}\$は、この吸収マルコフ連鎖の基本行列(fundamental matrix)になっている[5]。基本行列\$F\$を用いると、QN外部からノード\$i\$に到着した客のノード\$j\$への訪問回数\$n_{ij}\$のモーメントを容易に計算することができる。たとえば、\$n_{ij}\$の2次までのモーメントについては、

$$En_{ij} = (F)_{ij}, \quad E(n_{ij}^2) = (F(2F_{dq} - I))_{ij} \quad (7.6)$$

となる。ただし、\$F_{dq} = ((F)_{ij} \delta_{ij})\$。

巨視的解釈の基本的な評価尺度として、QN内での総滞在時間(total sojourn time)\$T\$の平均と分散を、(7.6)より計算してみよう。QNへ到着した客のノード\$i\$への訪問回数を\$V_i\$で表わすことにする。客はQN外部からノード\$j\$へ確率\$\lambda_{0j}/\lambda_0\$で到着するから、(5.2), (7.6)によって、

$$EV_i = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{0j}}{\lambda_0} En_{ji} = \frac{\lambda_i}{\lambda_0} \quad (7.7)$$

\$i=1, \dots, n\$

$$E(V_i^2) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{0j}}{\lambda_0} (F(2F_{dq} - I))_{ji} \quad (7.8)$$

が得られる。分散については、\$\text{Var}(V_i) = E(V_i^2) - (EV_i)^2\$によって計算できる。

ノード\$i\$への\$k\$回目の訪問時の客の滞在時間を\$T_{ki}\$、客がQN内にいるあいだにノード\$i\$で費やす時間を\$T_i\$と表わすと、

$$T_i = \sum_{k=1}^{V_i} T_{ki}, \quad i=1, \dots, n \quad (7.9)$$

の関係式が成り立つ。QN内での総滞在時間\$T\$は、

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{V_i} T_{ki} \quad (7.10)$$

によって定義される。これより、\$T\$の平均については、Waldの等式(Wald's equation)[4, pp.171-172]によって、

$$ET = \sum_{i=1}^n ET_i = \sum_{i=1}^n EV_i (EW_i + \tau_i) \quad (7.11)$$

と求めることができる。\$T\$の分散を求めるにあたっては、各ノードにおける滞在時間が、与えられた特定のルートに関して、独立であることを仮定する必要がある。この仮定は、厳密には、\$M/M/1\$ノードをもつ非循環型

(acyclic) QNについてさえも成立しないが、近似的には、一般のQNに対しても成り立つ場合がある。この仮定の下では、(7.10)において、 (V_1, \dots, V_n) が与えられたときに、 T_{kt} は互いに独立となるから、

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \sum_{i=1}^n E\left(\left(\sum_{k=1}^{V_i} T_{ki}\right)^2\right) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n E\left(\sum_{k=1}^{V_i} T_{ki} \sum_{l=1}^{V_j} T_{lj}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \{EV_i E(T_{i1}^2) + E(V_i(V_i-1))(ET_{i1})^2\} \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n ET_{i1} ET_{1j} E(V_i V_j) \end{aligned}$$

となり、これより、 T の分散が、

$$\begin{aligned} \text{Var}(T) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(T_i) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n ET_{i1} ET_{1j} \text{Cov}(V_i, V_j) \end{aligned} \quad (7.12)$$

と求められる。ここで、 T_i の分散については、(7.9)より、

$$\begin{aligned} \text{Var}(T_i) &= EV_i \{ \text{Var}(W_i) + \tau_i^2 c_{i1}^2 \} \\ &\quad + \text{Var}(V_i) (EW_i + \tau_i) \quad i=1, \dots, n \end{aligned} \quad (7.13)$$

となる。しかしながら、QNAの第1版では、 $\text{Var}(T)$ の計算において、(7.12)の共分散の項を無視している。

微視的解釈

クラス・ルート入力仕様からの微視的解釈では、あるクラスの客に固有な評価尺度を求めることが中心課題である。2.2節での記号を用いると、クラス $k(k=1, \dots, r)$ の客に対して次の評価尺度が考えられる。まず、QN内の総サービス時間の平均は、

$$\sum_{j=1}^{n_k} \tau_{kj}$$

となり、平均総待ち時間については、

$$\sum_{j=1}^{n_k} EW_{n_{kj}}$$

で与えられる。したがって、総滞在時間あるいは応答時間(response time)の平均は、これらの和として表わすことができる。

同様に、総サービス時間の分散は、

$$\sum_{j=1}^{n_k} \tau_{kj}^2 c_{kj}^2$$

となり、総待ち時間の分散についても、ノード相互間の独立性の近似の下で、

$$\sum_{j=1}^{n_k} \text{Var}(W_{n_{kj}})$$

と求められる。総滞在時間の分散は、明らかに、これらの和として表わせる。

8. 適用例

Whitt [12, 15] は、ノード数にして10個程度までの

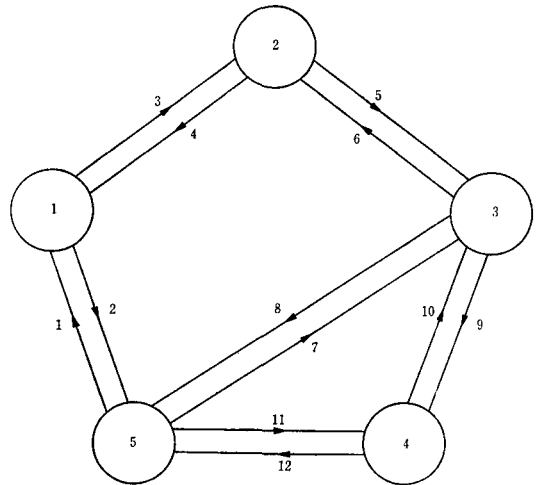


図 8.1 Gelenbe & Mitrani のパケット交換通信ネットワークモデル

さまざまな形状のQNの待ち特性量をQNAを用いて近似解析し、シミュレーションとの比較によりその近似精度を評価している。この章では、QNAの1つの適用例として、Gelenbe & Mitrani [2, pp.138-142] によって最初に解析されたあるパケット交換通信ネットワークに対する Whitt [12] の結果を紹介する。

対象とするQNモデルは、図 8.1 で示されるように、5個のパケット交換ノードと12本の一方方向データリンクから成っている。このQNで注意すべきことは、各リンクが窓口に相当し、リンク上で伝送を待っているパケットが待ち行列を作る点である。すなわち、これまでのQNに関する用語では、12個の単一窓口ノードをもつQNにあたる。パケットは、独立なポアソン過程にしたがって交換ノードに到着する。各交換ノードへのパケットの外部到着率は、交換ノード1から順に、6.00, 8.25, 7.50, 6.75, 1.50 であるとする。QN外部から交換ノード i に到着したパケットは、確率 d_{ij} で交換ノード j を最終目的地としている。また、最終目的地 j をもつ各パケットは、交換ノード i からリンク r_{ij} を経て次の交換ノードへ進む。ここでは、これらのパラメータとして、次の値を用いる。

$$D \equiv (d_{ij}) = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.10 & 0.20 & 0.10 & 0.60 \\ 0.40 & 0.00 & 0.40 & 0.15 & 0.05 \\ 0.10 & 0.20 & 0.00 & 0.60 & 0.10 \\ 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.00 & 0.10 \\ -0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.35 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$R \equiv (r_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 9 & 8 \\ 10 & 10 & 10 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 7 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

表 8.1 Gelenbe & Mitrani の QN モデルに対する
入力データ

ルート 番号 (k)	OD†ノ 下の組	$\hat{\lambda}_k$	c_k^2	n_k	$(n_{k1}, \dots, n_{kn_k})$
1	1,2	0.60	1	1	3
2	1,3	1.20	1	2	3,5
3	1,4	0.60	1	3	3,5,9
4	1,5	3.60	1	1	2
5	2,1	3.30	1	1	4
6	2,3	3.30	1	1	5
7	2,4	1.24	1	2	5,9
8	2,5	0.41	1	2	4,2
9	3,1	0.75	1	2	6,4
10	3,2	1.50	1	1	6
11	3,4	4.50	1	1	9
12	3,5	0.75	1	1	8
13	4,1	2.03	1	3	10,6,4
14	4,2	2.03	1	2	10,6
15	4,3	2.03	1	1	10
16	4,5	0.68	1	1	12
17	5,1	0.15	1	1	1
18	5,2	0.38	1	2	1,3
19	5,3	0.45	1	1	7
20	5,4	0.53	1	1	11

†OD=Origin-Destination

ただし、行列 R の対角成分のゼロは、パケットが QN 外部へ退去することを意味する。リンクの伝送速度=サービス率は、リンク 1, 2, 7, 8, 11, 12 に対しては 4.8、その他のリンクに対しては 48 であるとする。パケット長は一定であることから、リンク j における伝送時間の変動係数 c_{sj} は、すべての j について $c_{sj}=0$ となる。

この Gelenbe & Mitrani の QN モデルは、2.2 節で述べたクラス・ルート入力をもつ QN として、QNA によって解析することができる。すなわち、行列 D と R から、そのルートの数は全部で 20 であることがわかる。さらに、外部到着率の値を用いると、必要な入力データを表 8.1 のように求めることができる。表 8.2 は、平均リンク内パケット数に対する QNA による近似解を、Gelenbe & Pujolle [3] の拡散近似解およびシミュレーション値と比較したものである。この表におけるシミュレーション値は、パケット数にしてわずか 6,000 個で打ち切ったデータから推定されたものであり、その信頼性にはかなり問題がある。このことは、たとえば、各リンクにおけるトラフィック密度とシミュレーション値を比較することで確かめることができる。すなわち、トラフィック密度は各リンクにおける伝送中の平均パケット数に等しいことから ((5.4) 参照)、平均リンク内パケット数を下回することは絶対にありえない。しかし、明らかに、リンク 5, 7 および 11 におけるシミュレーション値はそれぞれのトラフィック密度を下回っており、信頼できる値ではないことがわかる。また、一般に、重負荷であるほどシミュレーションデータのばらつきが大きくなることから、リンク 2 におけるシミュレーション値も信頼に足る数値ではないことに注意する必要がある。

表 8.2 からは、さらに、Gelenbe & Mitrani が与えている数値には、データの入力ミスによる誤りがあることもわかる。これは、各リンク上での伝送時間分布を指数分布に置き換えた $M/M/1$ 近似に対する Whitt の追試結果と彼らの結果とのずれから明らかである。

表 8.2 の結果はこのようないくつかの問題点を含んでいるが、2 つの $M/M/1$ 近似の値が一致し、シミュレ

表 8.2 平均リンク内パケット数に対する近似解の比較

リンク番号	トラフィック密度	シミュレーション値	$M/M/1$ 近似		拡散近似	QNA
			Gelenbe & Mitrani	Whitt	Gelenbe & Pujolle	
1	.110	0.117	0.123	0.124	0.116	0.117
2	.835	1.920	3.000	5.076	1.875	2.955
3	.058	0.132	0.139	0.061	0.131	0.060
4	.135	0.163	0.170	0.156	0.157	0.146
5	.132	0.105	0.127	0.152	0.125	0.142
6	.131	0.173	0.157	0.151	0.146	0.141
7	.094	0.087	0.104	0.103	0.099	0.099
8	.156	0.208	0.185	0.185	0.171	0.171
9	.132	0.155	0.162	0.152	0.147	0.142
10	.127	0.129	0.145	0.145	0.136	0.136
11	.110	0.106	0.123	0.124	0.116	0.117
12	.142	0.154	0.164	0.165	0.152	0.153

ーション値がトラフィック密度を下回らないリンク8,10および12に関しては、拡散近似とQNAはほとんど同じ平均リンク内パケット数を与えることから、他のリンクも含めたQNAの近似解については、ある程度の精度が期待できると考えられる。

9. むすび

Bell 研究所で研究・開発されたソフトウェア QNA の概要とその基礎となる数学について解説してきたが、最後に、QNAの問題点およびそれと表裏一体の関係にある今後の拡張の方向についてふれておこう。

(1) ネットワーク構造の一般化

QNAの第1版では、各ノードが、“待ち合い室に制限のない”、“先着順サービス”待ち行列の“開いた”QNをその対象としている。QNAの拡張の1つの重要な方向としては、QNに対するこれらの制約の一部、あるいは全部の緩和がまずあげられる。しかし、これらの制約はどの1つについてもゆるめることはそう容易ではない。特に、待ち合い室の待ち客数に制限を設けることは、ブロッキング(blocking)によりノード相互間の結びつきを強めるために、分解近似に代わる新たな近似手法の開発が必要となる。サービス規律の緩和については、後着順サービス、非割込み優先サービス等に対して、ある程度までは可能と考えられる。閉じた(closed)QNについては、分解近似の考え方にしたがうならば、その解は積形式でなければならない。したがって、QN内の各ノードにおける客数の同時分布を評価するためには、周辺分布の陽な近似解と正規化定数の計算法を与える必要がある。

(2) 3-モーメント近似の必要性

QNAの第1版では、各ノードでの到着とサービスを表わす確率過程を、それぞれ、平均と変動係数の2つのパラメータによって特徴づけている。これは、各確率過程の3次以上のモーメントが、平均値等の低次の主要な待ち特性量にそれほど大きな影響を与えないという考えにもとづいているが、Whitt [13, 14] は、変動係数が大きい場合には、3次モーメントまでを含めた近似が不可欠であることを $GI/M/1$ 待ち行列を用いて示している。この3-モーメント近似を含むQNAの改良版が、現在 Bell 研究所で開発中である。

(3) 複数窓口ノードに対する近似の改良

6.2節でも述べたように、複数窓口ノードに対しては、QNAの第1版は待ち特性量の種類とその近似精度のいづれについても十分なものとはいえない。シミュレーションとの比較による精度評価も、ほとんどなされていないといつてよいだろう。 $M/G/m$ 待ち行列に対する使

いやすい近似解[6]の利用等によって、かなりの改良をはかる必要がある。

(4) その他の改良・拡張

5章で述べたハイブリッド法は、重ね合わせに対しては実用上ほとんど問題とならないほどの良い近似を与えるが、退去に対しては定式化を行なったにすぎない。定常区間法による近似(5.22)の改良とともに、適当な重み関数 $\{w_{ij}\}$ を見つける必要がある。

QNAの第1版では、クラス・ルート入力仕様は各クラスごとに固定したルートを仮定しているが、これをマルコフ的経路選択に変更することはそれほどむずかしくはない。しかし、クラスの数が多き場合には、入力の手間・記憶容量の面での問題が生じるかもしれない。

この他、ノードにおける客の生成・結合個数を確率変数にすると、6章の各ノードにおける待ち特性量の近似を改良する等、細かい点についてはいろいろと考えられるので、読者の方々の工夫に期待したいと思う。

* * *

Bell 研究所における待ち行列の研究は、基礎理論から応用まで非常に広範囲かつ多岐にわたっているが、AT & T の分割を境にして、応用のほうに少し重点が移ってくるのではないかと予想されている。また、人材も豊富で、研究者とは別に数値実験等を担当する技術スタッフもそろっている。これに対して、日本における研究状況は、地理的、言語的ハンディにもかかわらず、基礎理論・応用それぞれにすばらしい業績をあげているものの、研究グループが小規模で、両者が有機的に結合されていないために、研究者個人の努力に任されているのが現状である。このままでは量的にも質的にも日米間の研究格差は開くばかりである。日本においても、大学・企業の枠を越えた研究者の組織化を検討すべき時期ではないだろうか。

謝辞 本報告をまとめるにあたって、未発表論文を含む数々の貴重な資料をいただいた Bell 研究所の Ward Whitt, Martin I. Reiman 両博士、Rutgers 大学の Sousan L. Albin 教授に感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Franken, P., D. König, U. Arndt and V. Schmidt, *Queues and Point Processes*, Akademie-Verlag, Berlin, 1981.
- [2] Gelenbe, E. and I. Mitrani, *Analysis and Synthesis of Computer Systems*, Academic Press, New York, 1980.
- [3] Gelenbe, E. and G. Pujolle, "The Behaviour

- of a Single Queue in a General Queueing Network," *Acta Informatica*, **7**, 123-136 (1976).
- [4] Heyman, D. P. and M. J. Sobel, *Stochastic Models in Operations Research, Vol. 1*, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [5] Kemeny, J. G. and J. L. Snell, *Finite Markov Chains*, Van Nostrand, Princeton, 1960.
- [6] 木村俊一, "M/G/s待ち行列の近似について," 数理解析研究所講究録, No.519, 『待ち行列理論とその周辺』, pp.224-233 (1984).
- [7] Kingman, J. F. C., "The Single Server Queue in Heavy Traffic," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57**, 902-904 (1961).
- [8] Köllerström, J., "Heavy Traffic Theory for Queues with Several Servers. I," *J. Appl. Prob.*, **11**, 544-552 (1974).
- [9] Kraemer, W. and M. Langenbach-Belz, "Approximate Formulae for the Delay in the Queueing System GI/G/1," *Proc. 8th International Teletraffic Congress*, pp.235-1/8, Melbourne, 1976.
- [10] Sakasegawa, H., "An Approximation Formula $L_q \approx \alpha \cdot \rho^{\beta} / (1 - \rho)$," *Ann. Inst. Statist. Math.*, **29**, Part A, 67-75 (1977).
- [11] Whitt, W., "The Queueing Network Analyzer," *Bell System Tech. J.*, **62**, 2779-2815 (1983).
- [12] Whitt, W., "Performance of the Queueing Network Analyzer," *Bell System Tech. J.*, **62**, 2817-2843 (1983).
- [13] Whitt, W., "On Approximations for Queues, I: Extremal Distributions," *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, **63**, 115-138 (1984).
- [14] Whitt, W., "On Approximations for Queues, III: Mixtures of Exponential Distributions," *AT&T Bell Lab. Tech. J.*, **63**, 163-175 (1984).
- [15] Whitt, W., "Approximations for Departure Processes and Queues in Series," *Nav. Res. Log. Qtr.*, to appear.
- [16] Yu, P. S., "On Accuracy Improvement and Applicability Conditions of Diffusion Approximation with Applications to Modelling of Computer Systems," Tech. Rep. No. 129, Digital Systems Laboratory, Stanford University, 1977.

• ミニ • ミニ •

• O • R •

空海と最澄

• 友に教えられて、映画「空海」を見た。今年は、空海入定1150年にあたり、真言密教が現代にもつ意義があらためて問われている。奈良を中心とする既成仏教にあきたらず、大自然のなかで苦行を積み、生きて半数も帰国できないとされる遣唐使船で入唐。みずからの哲学、理論を生命を賭して確立しようとする情熱を、現代人はもっているだろうか。

• 根源の理を究めんとする学問への姿勢とともに、実践的宗教として、経典を学ばまえに、まず実践をと、人生にとっての宗教への実践過程を具体的に説いた土俗性は、今日に生きる教訓であろう。さらに、みずから濟世利民のために諸国を行脚し、これを実践にうつしたことは、多くの伝説や満濃池などの事蹟がこれを

物語る。

• しかし、理論的体系のもつ指導性の重要なことを忘れてはならない、空海にあっては、東洋のあらゆる思想の批判のうえに、その理があった。空海に経典の借用を望み、最後に拒否された最澄は、同じ密教でも、理性をその根底においた。ともに入唐しながら、官僧として朝廷の庇護の下にあった立場がそうさせたのであろう。最澄の叡山からは、法然、親鸞、日蓮など多くの思想家を生んだ。

• 25周年記念長期計画で実学への回帰を指向したOR. 理論と実践のバランスをあらためて考えてみよう。

(山下達哉)