



# 流れの中の最短時間航路

柳井 浩

## 1. はしがき

川の流れは普通、兩岸近くではゆるやかであり、中程で早い。こんな川を、出力一定のモーター・ボートで川岸の1点を出発して、対岸の1点や、同じ岸の別の1点に到達したい。このとき、どのような航路をとれば所要時間が最も短くなるだろうか？

ざっと考えても次のようなことがわかる。(i)目的地が同じ岸の上流にある1点ならば、岸すれすれに流れを逆のぼってゆけばよい(図1, 曲線A)。(ii)目的地が対岸の、しかも上流の1点ならば、兩岸近くでは舵を流れにさかかって上流むきにとり、流れのゆるやかなうちに川をさかのぼっておく。川の中程では、ボートを対岸に向けて流される時間を短くする(図1, 曲線B)。(iii)目的地が下流にある場合には、流れを利用すべく沖合に出てから目的地に向う(図1, 曲線C, D)。

所要時間を短くしようと思えば、このような航路をとるのがよいだろう。目的地が下流にある場合には、適当な沖合で直線コースに沿って流されてみてはどうだろうかという疑問もわく。本稿では、このようなことを、定式化と計算にもとづいて、定量的に確かめてみることにしよう。

## 2. 定式化

**座標の設定** 出発点を座標原点0とし、下流に向かってx軸、対岸に向かってy軸をとる。川幅は $2w$ 、目的地のx座標は $2e$ とする。

**流速分布** 岸からyの位置における川の流速は非負で対称な、2回連続微分可能な狭義の凹関数 $p(y)$ によって与えられるものとする：

$$p(y) \in D_2[0, 2w] \quad (1)$$

$$p(y) = p(2w - y) \quad (2)$$

これらの仮定からただちに

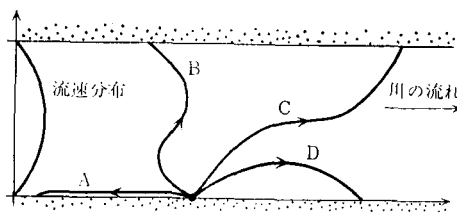


図1 最短時間航路の形

$$p_{\min} : \min_y p(y) = p(0) \geq 0 \quad (3)$$

$$p_{\max} : \max_y p(y) = p(w) \quad (4)$$

および

$$p'(y) > 0 \quad y \in [0, w) \quad (5)$$

$$p'(w) = 0 \quad (6)$$

が導かれる。また、 $p(y)$  は  $y=w$  において解析的であるものとする(図2)。

**ボートの運動方程式** ボートの出力、すなわち静止水面でのボートの速度を1とするとき、ボートの運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta + p(y) \quad (7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin \theta \quad (8)$$

と書ける。ここに $t$ は時間、 $\theta$ はボートとx軸のなす角度である(図3)。

**初期条件** ボートが時刻0に原点を出発するものとするれば、初期条件は

$$x(0) = 0 \quad (9)$$

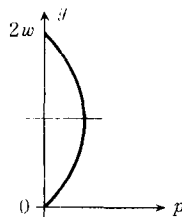


図2 流速分布

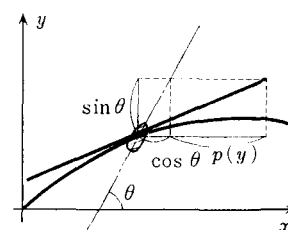


図3 ボートの運動

$$y(0)=0 \quad (10)$$

となる。

**所要時間** ボートが点0を出発して目的地に到達するまでの所要時間  $T$  は(7)式により

$$T = \int_0^{2e} \frac{1}{\cos \theta + p(y)} dx \quad (11)$$

と書ける。

いっぽう, (7)および(8)式から

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + p(y)} \quad (12)$$

という関係が得られる。この式は,  $y$  という位置にあるボートの向きを  $\theta$  とするとき, 航路の勾配  $y'$  がいかなる値になるのかを示している。逆にいえば,  $y$  と  $y'$  の値が決まれば,  $\theta$  が定まる。それゆえ, (11)式の被積分関数は  $y$  および  $y'$  の関数として

$$F(y, y') = \frac{1}{\cos \theta(y, y') + p(y)} \quad (13)$$

と書くことができる。

**変分法基本問題** 所要時間が最短になるようなボートの航路を求める問題は, したがって汎関数

$$T[y] = \int_0^{2e} F(y, y') dx \quad (14)$$

を境界条件

$$y(0)=0 \quad (15)$$

および

$$y(2e)=2w \quad (\text{目的地: 向う岸}) \quad (16)$$

あるいは

$$y(2e)=0 \quad (\text{目的地: 同じ岸}) \quad (17)$$

の下で最小にする1回連続微分可能な関数  $y(x)$  を求める, いわゆる変分法基本問題[1]の一例としてとりあつかうことができる。——最適な航路を, 1回連続微分可能な関数の中から求めることは, (12)式からわかるように  $\theta$  が連続的に変化することに対応している。

**オイラーの方程式** 変分法基本問題の解曲線は, いわゆるオイラーの方程式を満たすが, (14)式のように, 被積分関数が  $y$  および  $y'$  だけに依存する場合には, オイラーの方程式の第1積分が

$$F - y'F_{y'} = c \quad (18)$$

という形で与えられている。ここに,  $c$  は任意定数である。この式を(13)式の場合について計算すれば

$$\frac{\cos \theta}{1 + p(y) \cos \theta} = c \quad (19)$$

となる。

**パラメータ  $c$  の範囲** 最適な航路を実現する舵のとり方  $\cos \theta$  は(19)式を満たさなければならない。したがって, 適当な定数  $c$  を定めて, その位置  $y$  に応じた  $\cos \theta$  の値を(19)式から求めつつ, 運動方程式(7), (8)をとけば, 境界条件はともかく, ひとつの極値曲線を求めるこ

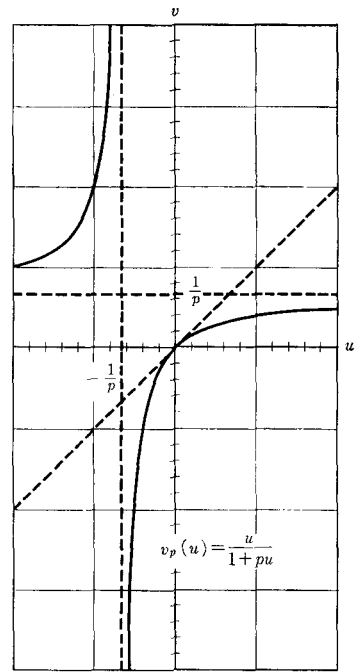


図4  $v_p(u)$  の形状

とができる。

ところが,  $c$  を勝手に与えると, (19)式から  $\cos \theta$  の値が求まらなかったり, また求まっても  $[-1, +1]$  の範囲に入らず, 解が物理的な意味を失ってしまったりする。そこで, このような意味で  $c$  の許される範囲を調べておくが必要になる。

そのため(19)式を

$$v_p(u) = \frac{u}{1 + pu} \quad (20)$$

という形に書きかえて, 図をかいてみたのが図4である。

$\cos \theta$  を求める方程式

$$\frac{u}{1 + pu} = c \quad (21)$$

の解は, 曲線  $v_p(u)$  と水平線  $v=c$  の交点の横座標だから図4に示されているような曲線の性質からして, 解  $u$  が存在して一意的に定まり, 区間  $[-1, +1]$  の中に入り,  $\cos \theta$  が物理的な意味をもつためには

$$p \in [0, 1] \text{ のとき, } c \in \left[ \frac{-1}{1-p}, \frac{1}{1+p} \right] \quad (22)$$

$$p \in (1, \infty) \text{ のとき, } c \in \left( -\infty, \frac{1}{1+p} \right] \cup \left[ \frac{-1}{1-p}, \infty \right) \quad (23)$$

という条件が成立しなければならない。

**流速分布とパラメータの範囲** 次に,  $v_p(u)$  を  $p$  の関数としてみれば, この関数は  $p = -\frac{1}{u}$  を除くそれぞれの

\* $p=1$  のとき  $-\infty$

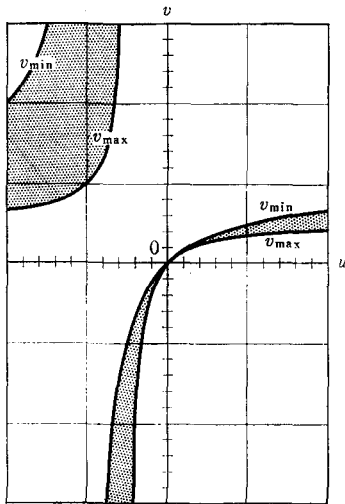


図5  $v_p(u)$ の動く範囲

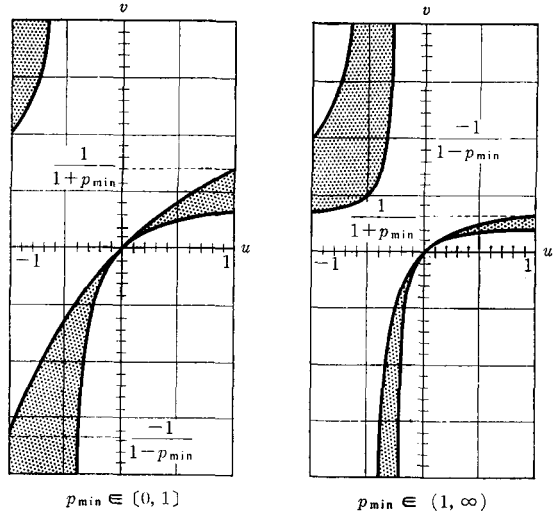


図6 パラメターcの範囲

領域で連続単調減少である。いいかえれば、 $v_p(u)$ の曲線は、直線  $v=u$  の上側にあるものもまた下側にあるものも、 $p$ の増加につれて下方に移動する。流速  $p$ の値は区間  $[p_{min}, p_{max}]$  上に分布するから、各  $p$ に対応する  $v_p(u)$ の曲線は

$$v_{max}(u) = \frac{u}{1+p_{max}u} \quad (24)$$

および

$$v_{min}(u) = \frac{u}{1+p_{min}u} \quad (25)$$

のあいだにはさまれる帯の中に存在する(図5)。

したがって、パラメター  $c$  についていえば、水平線  $v=c$  がこの帯と交わる範囲になければならない。のみならず、ボートが初期状態にあるときを考えれば、ここでは流速が最もゆるやかであるから、水平線  $v=c$  は曲線  $v_{min}(u)$  と交わらなければならない。これらを考慮すれば、パラメター  $c$  の許される範囲は

$$p_{min} \in [0, 1] \text{ のとき, } c \in \left[ \frac{-1}{1-p_{min}}, \frac{1}{1+p_{min}} \right] \quad (26)$$

$p_{min} \in (1, \infty)$  のとき,

$$c \in \left( -\infty, \frac{1}{1+p_{min}} \right] \cup \left[ \frac{-1}{1-p_{min}}, \infty \right) \quad (27)$$

である(図6)。

**最適な舵のとおり方とその変化** さて、(26)あるいは(27)式を満たす  $c$  の値について、水平線  $v=c$  と、ボートの存在位置における流速  $p(y)$  によって定まる曲線

$$v(u) = \frac{u}{1+p(y)u} \quad (28)$$

の交点の  $u$  座標が、ボートのとるべき方向  $\cos \theta$  である

\*)  $p_{min}=1$  のとき  $-\infty$

わけだが、この値がボートの運動にしたがってどのように変化するのかを観察しておこう。

図7からもわかるように、2曲線  $v_{min}(u)$  および  $v_{max}(u)$  にはさまれる帯と、水平線  $v=c$  との共通部分は1つの線分を作る。  $u$  座標でみれば、閉区間  $[u_L, u_R]$  である。ここに

$$u_L = u_{min} \quad (29)$$

$$u_R = \min[u_{max}, +1] \quad (30)$$

であり、 $u_{min}(u_{max})$  は水平線  $v=c$  と曲線  $v_{min}(u)$  ( $v_{max}(u)$ ) の交点の  $u$  座標である。

まず第1にこの区間  $[u_R, u_L]$  が正負両域にまたがら

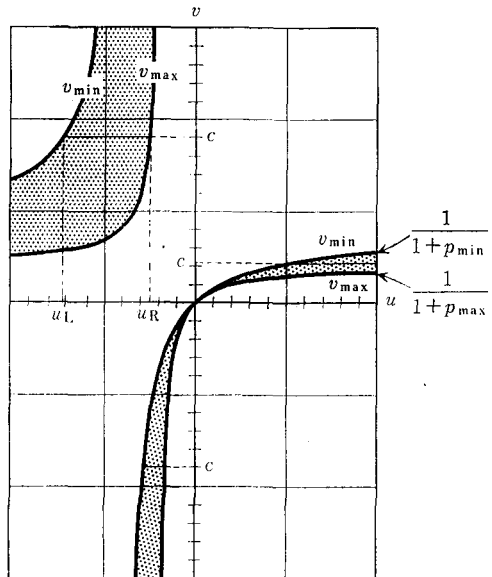


図7  $u = \cos \theta$  の範囲;  $\theta$  はボートの向き

ないことに注意しよう。このことは、ボートが最適航路に沿って運動するとき、程度の差こそあれ、上流(下流)向きのものは上流(下流)向きのまま全行程をおえることを意味している。

ボートがある時刻にある位置にいて、そのときの  $y$  座標から(21)式によって定まる舵のとり方を  $u = \cos \theta$  としよう。いま、この値が区間  $[u_L, u_R]$  の内点にあるものとしよう。ボートはこの  $\cos \theta$  によって方向づけられ、運動方程式(7)および(8)にしたがって運動する。だから、位置の変化なかんずく  $y$  の変化は時間に関して連続的である。ところが流速分布を与える関数  $p(y)$  もまた連続な関数であるから、 $u = \cos \theta$  もまた連続的に変化する。つまり、ボートの向きは連続的に変化する。

いいかえれば、(21)式の解  $u = \cos \theta$  は区間  $[u_L, u_R]$  の中を連続的に移動する。ここで次のような疑念がおこる。解  $u = \cos \theta$  が区間の端点に到達するとき、これらが  $p_{\min}$  や  $p_{\max}$  に対応するものであれば問題はないが、 $u_R = 1$  の場合にこの端点をこえてしまいはしないか？ そうなれば  $\cos \theta$  の値が定まらなくなるので困る。

しかし、そのようなことはおこらない。 $u_R = 1$  という点にさしかかれば、 $\cos \theta = 1$  したがって  $\sin \theta = 0$  であるから(8)式によって、

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad (31)$$

である。すなわち、ここでは  $y$  の値は変化しない。したがって(21)式の解は  $u = 1$  という値を保持しつづけて、この値をこえることはない。このことは極値曲線の一部に流れにそって“流される”ものがあることを意味している。次節でその詳細を吟味する。

### 3. 解曲線

**最適解の運動方程式** “最適な舵のとり方”に対応するボートの運動方程式は、(19)式を(7)および(8)式に代入することにより、次のようになる。

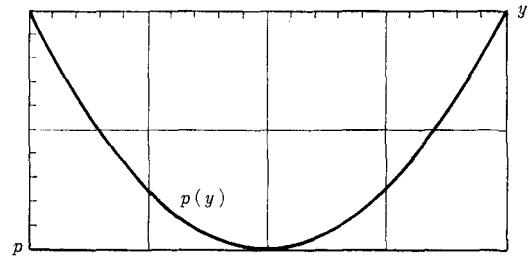
$$\frac{dx}{dt} = \frac{c + p(y) - cp^2(y)}{1 - cp(y)} \quad (32)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\pm \sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}}{1 - cp(y)} \quad (33)$$

また、ボートの航路だけに注目するなら、解曲線の微分方程式は次式のようなになる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm \sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}}{c + p(y) - cp^2(y)} \quad (34)$$

ここで、(33)および(34)式における複号は、(19)式で求めた  $\cos \theta$  から  $\sin \theta$  を求める際に生じたものであり、両式において同順である。正負いずれの場合であっても、この方程式の解がオイラーの方程式を満たすことには変りはない。



流速分布  $p(y) = 1 - (1-y)^2$   
 $w = 1$

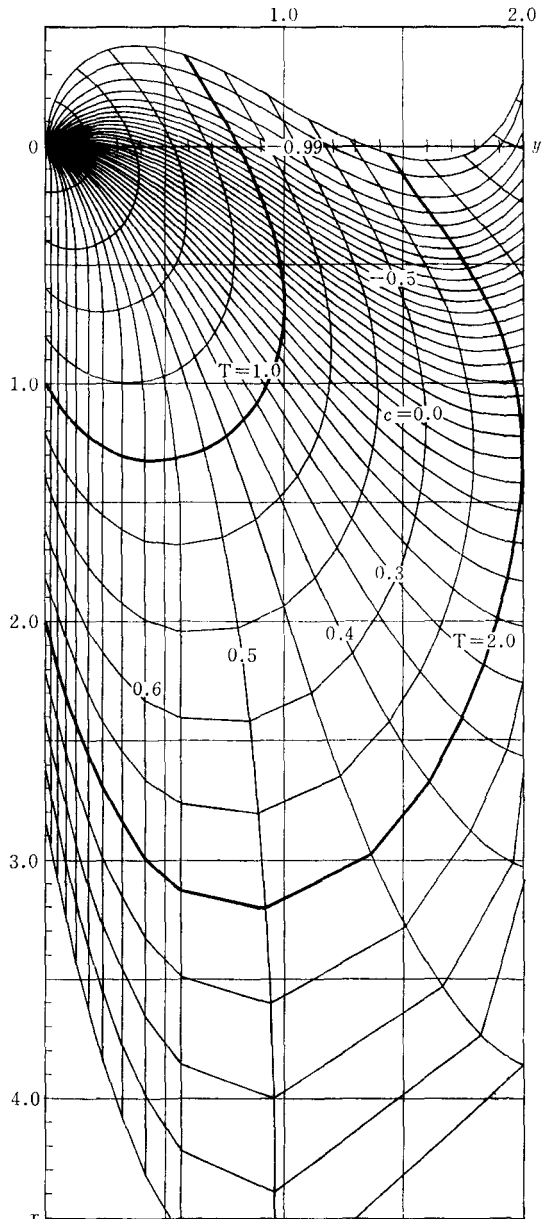


図 8 解曲線

解曲線の形 初期条件

$$x(0)=0 \quad (9 \text{ bis})$$

$$y(0)=0 \quad (10 \text{ bis})$$

のもとで、複号は正のものをとることにして、(32)および(33)式の解曲線の形を考えてみよう。

解曲線はパラメーター  $c$  の値によってかわるが、(34)式の右辺を  $c$  で偏微分すれば

$$\frac{\partial}{\partial c} \frac{\sqrt{(1-cp)^2 - c^2}}{c + p - cp^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-cp)^2 - c^2}(c + p - cp^2)^2} < 0 \quad (35)$$

を得ることからもわかるように、 $c$  の増加とともに川下に向かって移動する。 $c$  の値が不連続にしか変化し得ず、((27)式参照)またその間(34)式にも不連続点がある場合にも、図6から明らかなように、解曲線は川下に移動する(図8)。

解曲線の形状も  $c$  の値によってかわるが、大別すれば、(i)川岸に沿って川を移動するもの、(ii)沖合いに出たのち、流れに乗ってくるもの、(iii)川を横切るものの3つのタイプがある。それぞれの場合についてくわしく調べてみよう。

(i) 川岸に沿って川を移動する解曲線

$$c = \frac{-1}{1 - p_{\min}} \quad \text{あるいは} \quad c = \frac{+1}{1 + p_{\min}} \quad (36)$$

が成立すれば、(19)式により初期状態において

$$\cos \theta = \pm 1 \quad (37)$$

$$\sin \theta = 0 \quad (38)$$

が成立する。したがって、運動方程式(8)により  $y$  の値はゼロのまま不変——つまりボートは岸にはりついたらそのまま移動する。その速度は

$$\frac{dx}{dt} = p_{\min} \pm 1 \quad (39)$$

であるから、

$$p_{\min} < 1 \quad (40)$$

という場合にかぎって川をさかのぼれる。

最短時間という点から見れば、さかのぼる場合には

$$c = \frac{-1}{1 - p_{\min}}, \quad (41)$$

くだる場合には

$$c = \frac{1}{1 + p_{\min}} \quad (42)$$

に対応する解曲線だけが候補となる。

(ii) 沖合いに出たのち、流れに乗ってくる解曲線

$$c \in \left[ \frac{1}{1 + p_{\max}}, \frac{1}{1 + p_{\min}} \right] \quad (43)$$

が成立する場合には、図6からも明らかなように、 $\cos \theta$  は正の値をとる。また、複号は正のものをとる約束だから、

$$\frac{dy}{dt} = \sin \theta \geq 0 \quad (44)$$

である。(33)式によってもう少しくわしくいえば、

$$p(y) = \frac{1}{c} - 1 \quad (45)$$

が成立する場所以外では、

$$\frac{dy}{dt} > 0 \quad (46)$$

である。すなわち、この解曲線によれば、ボートは軸先を半ば下流にむけて初期位置を出発し、次第に舵を下流にむけ、(45)式が成立する位置にいたれば、まったく下流に向かってすすむ。いわば、ボートは川の流れに完全に乗ってしまう。

さてこの場合、時刻0に原点を出発して  $x$  軸と平行な航路にのるまでの時間——これを漕ぎ出し時間と呼び  $\tilde{T}(c)$  と書く——やその位置、 $x$  座標  $\tilde{X}(c)$  および  $y$  座標  $\tilde{Y}(c)$  を調べてみよう。これらは(32)、(33)および(45)式によって

$$\tilde{T}(c) = \int_0^{\tilde{Y}(c)} \frac{1 - cp(y)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}} dy \quad (47)$$

$$\tilde{X}(c) = \int_0^{\tilde{Y}(c)} \frac{c + p(y) - cp^2(y)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}} dy \quad (48)$$

$$\tilde{Y}(c) : p(y) = \frac{1}{c} - 1 \quad \text{となる最小の } y \quad (49)$$

となる。

パラメーター  $c$  が(43)式の範囲にあるかぎり、 $\tilde{Y}(c)$  は有限の値として確定される。しかし、(47)および(48)式の被積分関数の分母は積分の上限においてゼロとなるので、これらは第1種の異常積分である。したがって、 $p(y)$  の形状や  $c$  の値によって、これらの積分が有限の値に確定されることも、また有限の値にならないこともありうる。このことに関して、さらに具体的な性質を2~3示しておくことにしよう。

(a) 流速分布に関して、

$$p'(y) \geq p_0' > 0, \quad y \in [0, \tilde{Y}(c)] \quad (50)$$

が成立する場合には、(47)式の積分は有限である。また、このことから  $\tilde{X}(c)$  が有限であることもあきらかである。

実際、

$$q(y) = 1 - cp(y) \quad (51)$$

とおけば、 $y \in [0, \tilde{Y}(c)]$  においては

$$p(y) < \frac{1}{c} - 1$$

であるから、 $q(y)$  は

$$q(y) > c > 0 \quad (52)$$

となる。これを(47)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \tilde{T}(c) &= \int_0^{\tilde{Y}(c)} \frac{q}{\sqrt{q^2 - c^2}} dy \\ &= \int_c^{1 - cp_0} \frac{q}{\sqrt{q^2 - c^2}} \cdot \frac{1}{cp'(y)} dq \end{aligned} \quad (53)$$

となる。

(53)式の被積分関数については、(50)および(52)式により

$$\frac{q}{\sqrt{q^2-c^2}} > 0$$

および

$$\frac{1}{c p'(y)} \leq \frac{1}{c p_0'}$$

という関係が成立するから、

$$\tilde{T}(c) \leq \frac{1}{c p_0'} \int_c^{1-c p(0)} \frac{q}{\sqrt{q^2-c^2}} dq = \frac{\sqrt{(1-c p(0))^2-c^2}}{c p_0'} \quad (54)$$

となり、 $\tilde{T}(c)$  が有限の値になることがわかる。

流速分布  $p(y)$  に関する本稿の仮定からすれば、

$$\tilde{Y}(c) < w \quad (55)$$

つまり、川の中央まで行かない範囲では(50)式が成立し、流れにのるまでの時間は有限の値になる。

(b) 流速分布が

$$p(y) = k(w^{2n} - (y-w)^{2n}) + h, y \in [0, 2w] \quad (56)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

で

$$\tilde{Y}(c) = w \quad (57)$$

すなわち、川の中央まで漕ぎ出すとき、(47)式の積分は発散し有限の値をとらない。

実際、この場合には(56)式を(49)式に代入して  $c$  の値を求めれば、

$$c = \frac{1}{1+h+k w^{2n}} \quad (58)$$

となるから、ふたたびここでも

$$q(y) = 1 - c p(y) \quad (59)$$

とおくこととして(58)式をこれに代入すれば

$$q(y) = c(1+k(y-w)^{2n}) \quad (60)$$

を得る。したがって、これを微分すれば

$$q'(y) = 2ckn(y-w)^{2n-1} \quad (61)$$

を得るが、(60)および(61)式から  $y$  を消去すれば

$$q'(y) = s(q-c)^{\frac{2n-1}{2n}} \quad (62)$$

となる。ここに

$$s = 2nk \frac{2n+1}{2n} \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{2n+1}{2n}} \quad (63)$$

である。

これらの関係を(47)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \tilde{T}(c) &= \int_\alpha^\beta \frac{q}{\sqrt{q^2-c^2}} \frac{1}{q'(y)} dq \\ &= \frac{1}{s} \int_\alpha^\beta \frac{q}{\sqrt{q^2-c^2}} \frac{1}{(q-c)^{\frac{2n-1}{2n}}} dq \end{aligned} \quad (64)$$

を得る。ここに

$$\alpha = c = \frac{1}{1+h+k w^{2n}} \quad (65)$$

$$\beta = 1 - ch = \frac{1+k w^{2n}}{1+h+k w^{2n}} \quad (66)$$

である。

さて、この積分範囲  $q \in [c, 1-ch]$  の範囲では

$$\frac{q}{\sqrt{q^2+c}} \geq \frac{c}{\sqrt{1+c-ch}} \quad (67)$$

であるから、

$$\tilde{T}(c) \geq \frac{1}{s \sqrt{1+c-ch}} \int_c^{1-ch} \frac{1}{(q-c)^{\frac{2n-1}{2n}}} dq \quad (68)$$

となる。ここで

$$r = q - c \quad (69)$$

とおけば

$$\int_c^{1-ch} \frac{1}{(q-c)^{\frac{2n-1}{2n}}} dq = \int_0^{1-c-ch} \frac{1}{r^{\frac{2n-1}{2n}}} dr \quad (70)$$

となるが、これはあきらかに無限大に発散する。したがって(68)式により、 $\tilde{T}(c)$  もまた無限大に発散する。

(47)、(48)両式からわかるように、流速分布が(56)式の関数よりもっと速い“速度”で極大値に接近すれば、その場合の漕ぎ出し時間ももっと大きくなるから、漕ぎ出し時間は無限大に発散する。

したがって、 $y=w$  において  $p(y)$  が解析的ならば、(56)式のような関数で、この近傍における  $p(y)$  の下界となり、極大値を共有するものがとれるから、漕ぎ出し時間は無限大になることがわかる。

(c) 解の多義性 もう1つ注意すべきことは、解曲線が川の流れにのる位置では、微分方程式(34)(複号は正)の解が一義的でなくなることである。実際、この点では川の流れに平行な直線

$$y = \tilde{Y}(c) \quad (71)$$

も簡単な計算からわかるように、この微分方程式の解になる(図9)。

ちなみに、微分方程式の教科書[2]を調べてみると、次のように書かれている。

「微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (72)$$

において、関数  $f(x, y)$  が  $xy$  平面上のある領域で定義

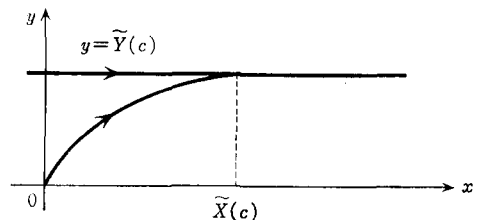


図9 2つの解曲線の合流

されており、さらに  $f$  および偏導関数  $\partial f/\partial y$  がこの領域で連続であれば、領域内の任意の点  $(x_0, y_0)$  を通る解がただ1つ存在する。しかし、 $\partial f/\partial y$  の連続性が成立しない場合には、解は存在するが一義性は保証されない」

われわれの場合には

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}}{c + p(y) - cp^2(y)} \quad (73)$$

したがって、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-c^2 p'(y)(c^2 p + (1 - cp)^3)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}(c^2 + cp(1 - cp))^2} \quad (74)$$

であるから、 $y = \bar{Y}(c)$  すなわち  $p = (1 - c)/c$  が成立する所では(73)式は連続でも、(74)式のほうは、分母において

$$\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2} = 0 \quad (75)$$

となり、 $\partial f/\partial y$  が連続でなくなる。つまり、ここでは解の一義性が保証されない。

なお、(73)式が連続でありながら(74)式が不連続になるのが、 $y = \bar{Y}(c)$  という直線にかぎることも、上式からわかる。

### (iii) 川を横切る解曲線

$c$  の値が上記(i)および(ii)の範囲以外、すなわち(36)あるいは(43)式の条件を満たさない場合には、解曲線は川を横切る。これは、(19)式から求めた  $|\cos \theta|$  に1よりも小さい上界が存在する——つまり(8)式において  $\sin \theta$  したがって  $dy/dt$  に正の下限が存在するためである(図7)。

川を横切る解曲線は、 $c$  の符号によってその性質を異にする。まず、その境界に位置する  $c=0$  の場合の解曲線を調べてみる。この場合、運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = p(y) \quad (76)$$

$$\frac{dy}{dt} = +1 \quad (77)$$

となる。すなわち、ボートは流れにかかわらず、ただひたすらに川を横切ろうとする。したがって、対岸に到達するのに要する時間は最も短く、

$$T = 2w \quad (78)$$

となるが、その位置は上の2式から明らかのように、

$$\bar{X} = \int_0^{2w} p(y) dy \quad (79)$$

となる。

また、前にも述べたように((35)式参照)、 $c$  の増加とともに解曲線は川下に向かって移動する。これらのことから次のようにいうことができる。 $c < 0$  のとき、ボートは流れにさからいながら川を横切り、 $c > 0$  のときには流れにのって川を横切る。いいかえれば、川を横切るのに、

$$2e < \bar{X} \quad (80)$$

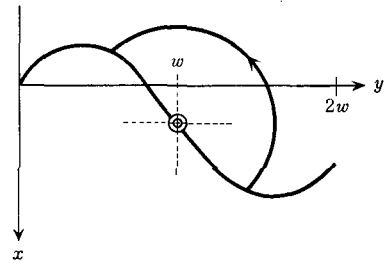


図10 回転対称な解曲線

であれば、ボートは流れにさからわねばならず

$$2e > \bar{X} \quad (81)$$

ならば流れに乗ることができる。

次に、川を横切る解曲線について、もう1つ注意しておくべきことは、これらの曲線が川の中央  $y=w$  において変曲点をもち、また、この点を中心として回転対称な図形を作っていることである(図10)。

実際、(34)式から、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c + p(y) - cp^2(y)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}} \quad (82)$$

を得るから、これをもういちど  $y$  で微分すれば、

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{p'(y)((1 - cp)^3 + c^3 p)}{(\sqrt{(1 - cp)^2 - c^2})^3} \quad (83)$$

となる。(6)式により  $p'(w) = 0$  であるから、

$$\left. \frac{d^2x}{dy^2} \right|_{y=w} = 0 \quad (84)$$

となり、解曲線が川の中央で変曲点をもつことが示された。

次に回転対称性を示そう。

$$x = x_0(y) \quad (85)$$

が1つの解曲線であるとき、

$$x_1(y) = -x_0(2w - y) \quad (86)$$

もまた解曲線であることを示せばよい。(86)式からただちに

$$\frac{dx_1(y)}{dy} = \frac{dx_0(2w - y)}{dy} \quad (87)$$

が成立するが、いっぽう(82)式から、

$$\frac{dx_0(2w - y)}{dy} = \frac{c + p(2w - y) - cp^2(2w - y)}{\sqrt{(1 - cp(2w - y))^2 - c^2}} \quad (88)$$

となる。(2)式により、 $p(2w - y) = p(y)$  であるから、これと(87)式により、

$$\frac{dx_1(y)}{dy} = \frac{c + p(y) - cp^2(y)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}} \quad (89)$$

が得られる。よって  $x_1(y)$  もまた解曲線であり、したがって解曲線は  $y=w$  の点を中心として回転対称な曲線を作っている。

その他の解曲線 以上では、微分方程式(32)、(33)あるいは(34)式において、複号は正のものをとり、原点を

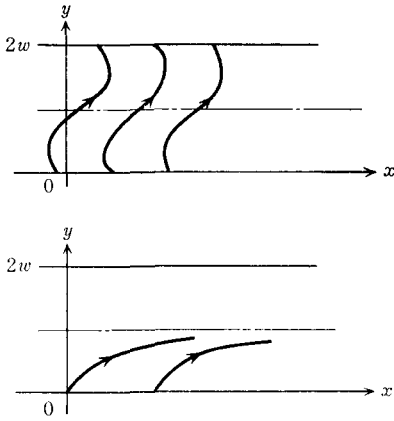


図11 平行移動した解曲線

初期点とする解曲線を考えてきた。ここではその他の解を考えることにしよう。

(i) 平行移動 微分方程式(34)の右辺は  $y$  だけに依存する。それゆえ、

$$x = \varphi(y) \quad (90)$$

が1つの解曲線ならば、これを流れに沿って上下に移動してできる曲線

$$x = \varphi(y) + k \quad (91)$$

もまた解曲線である。ここに、 $k$  は任意の定数である(図11)。

(ii) 流れの中央を軸として対称な解曲線 流速分布  $p(y)$  は  $y=w$  を軸として対称である。それゆえ、

$$x = \varphi(y) \quad (92)$$

が1つの解曲線ならば、これを裏がえした

$$x = \varphi(2w - y) \quad (93)$$

もまた1つの解曲線である(図12)。

実際、

$$\frac{d\varphi(2w - y)}{dy} = -\frac{d\varphi}{dy} \quad (94)$$

であるが、いっぽう、

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= \frac{\pm \sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}}{c + p(y) - cp^2(y)} \\ &= \frac{\pm \sqrt{(1 - cp(2w - y))^2 - c^2}}{c + p(2w - y) - cp^2(2w - y)} \end{aligned} \quad (95)$$

よって  $\varphi(2w - y)$  は、

$$\frac{d\varphi(2w - y)}{dy} = \mp \frac{\sqrt{(1 - cp(2w - y))^2 - c^2}}{c + p(2w - y) - cp^2(2w - y)} \quad (96)$$

を満たす。つまり  $x = \varphi(2w - y)$  は微分方程式(33), (34)において  $x = \varphi(y)$  とは異なる符号の式に対応する解曲線である。またこの場合、ボートの進む方向が反対になることにも注意しなければならない。

(iii)  $y$  軸に関して対称な解 (33), (34) 両式の複号によってさらに別の解が作れる。いま、

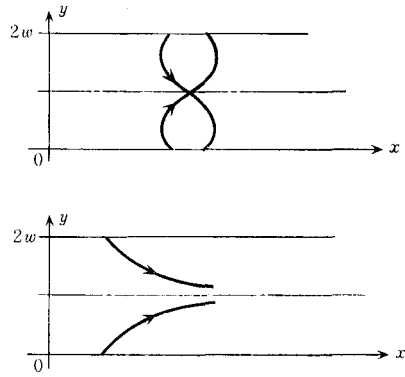


図12  $y=w$  を軸として対称な解曲線

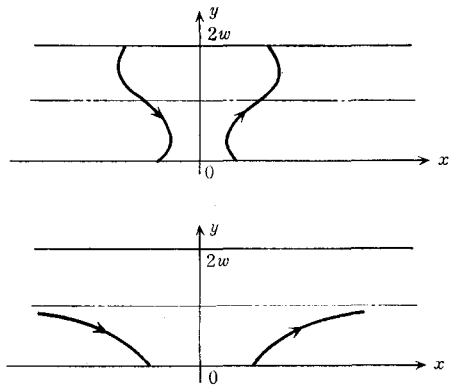


図13  $y$  軸に関して対称な解

$$x = \varphi(y) \quad (97)$$

が1つの解曲線ならば、これをさかさまにした

$$x = -\varphi(y) \quad (98)$$

もまた1つの解曲線である(図13)。

実際、 $-\varphi(y)$  は (33), (34) 式の複号を逆順にした方程式を満たすからである。また、この場合にも、ボートの進む方向は逆向きになる。

$\varphi(y)$  が川を横切る解曲線の場合には、 $\varphi(y)$  は点  $(\varphi(w), w)$  を中心として回転対称であるから、(98) 式の解曲線を (93) および (91) 式の手続きによって作ることも可能である。

#### 4. 最適解の構成

以上に求めた解曲線から最適解をくみだす。これまでに見たように、解曲線には次のような8つのタイプのものがある(図14)。

- (a) 川をこちら側から向う岸へ横切る
- (b) 川を向う岸からこちら側へ横切る
- (c) こちら側から沖へ出て流れにのる
- (d) 向う岸から沖へ出て流れにのる



- (e) 流れに沿った経路からこちら側の岸へ到達
- (f) 流れに沿った経路から向う岸へ到達
- (g) 流れに沿って一直線にくだる
- (h) 岸に沿ってさかのぼる((39)式)

ところで、われわれが求める最適解は連続微分可能で微分方程式(34)を満たすものである。したがってこの条件のもとでは、別のタイプの解曲線をつなぐことができる。最適解はこのようにして構成される。初期点を原点として、目的地別に調べてみよう。

- (i) 川をさかのぼる場合 目的地が  $(2e, 0)$ ,  $e < 0$

の場合には(h)のタイプの解曲線が、最適解として可能な唯一の解曲線である。

- (ii) 川をくだる場合 目的地が  $(2e, 0)$ ,  $e > 0$

の場合には、(c)–(g)–(e)という3つのタイプの解曲線を連結したものが、最適解として可能である。接合部では、タイプ(c)や(e)の解曲線は流れと平行でなければならない。解の多義性や微係数の一致によって、連続微分可能な経路が得られるからである。したがって、一般性を失うことなく、このような航路は、出発してから漕ぎ出し時間後に流れに平行な直線部分(g)にうつり、また対称の位置で川岸へもどる解曲線にうつるものと考えることができる(図15)。また、このようにして連結された航路は、パラメータ  $c$  によって一意的に定まる(場合によっては直線部分(g)がないこともある)。

そこで、最適解を得るためには、目的地までの所要時間が最も短くなるような  $c$  の値を求めなければならない。所要時間を  $2D(c)$  とすれば、

$$D(c) = \tilde{T}(c) + \frac{e - \tilde{X}(c)}{p(\tilde{Y}(c)) + 1} \quad e > \tilde{X}(c) \quad (99)$$

となる。ここに、 $\tilde{T}(c)$ ,  $\tilde{X}(c)$  および  $\tilde{Y}(c)$  は(47)~(49)式で与えられたように、漕ぎ出し時間、そのときの  $x$ —および  $y$ —座標である。

(47)~(49)式を用いて(99)式を整理すれば、

$$D(c) = \tilde{T}(c) - c\tilde{X}(c) + ce = \int_0^{\tilde{Y}(c)} \sqrt{q^2 - c^2} dy + ce \quad (100)$$

となる。ここに

$$q(y) = 1 - cp(y) \quad (101)$$

である。(100)式を  $c$  で微分すれば、

$$\frac{dD}{dc} = -\frac{\sqrt{q^2(Y(c)) - c^2}}{c^2 p'(Y(c))} + \frac{1}{c} \int_0^{\tilde{Y}(c)} \left( \sqrt{q^2 - c^2} - \frac{q}{\sqrt{q^2 - c^2}} \right) dy + e \quad (102)$$

となる。(47)および(48)式によれば

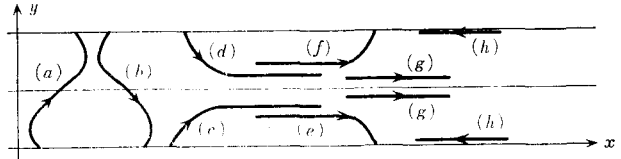


図14 いろいろな解曲線のタイプ

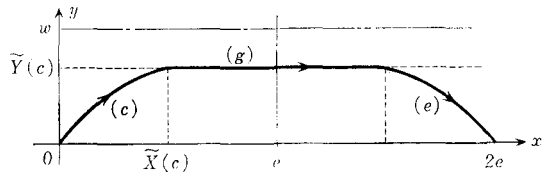


図15 直線コースを含む航路——本稿における流速分布の設定では最短時間航路にはならない。

$$\frac{dD}{dc} = -\frac{\sqrt{q^2(Y(c)) - c^2}}{c^2 p'(Y(c))} - \tilde{X}(c) + e \quad (103)$$

となる。また、 $q(Y(c)) = c$  であるから、 $p'(Y(c)) \neq 0$  ならば

$$\frac{dD}{dc} = e - \tilde{X}(c) \quad (104)$$

となるが、 $p'(Y(c)) = 0$  ならば微係数の値は定まらない。

$p'(Y(c)) \neq 0$  つまりボートが川の中央より手前で流れに平行になる場合には、所要時間を最短にするようなパラメータ  $c$  は

$$\frac{dD}{dc} = 0 \quad (105)$$

すなわち、

$$\tilde{X}(c) = e \quad (106)$$

を満たす。いいかえれば、最適航路は漕ぎ出して川の流れに平行になるとすぐもどってくるもので、図14や図15の記号でいえば、流れに平行な直線コース(g)の部分はゼロになる。図8の流速分布に対応する漕ぎ出し時間、平行になる位置の  $X$  および  $Y$  座標を図16に示しておいた。目的地の座標  $(2e, 0)$  からパラメータ  $c$  の値を大きくして求めるには、このようなグラフを用いればよい。

次に、 $p'(Y(c)) = 0$  の場合、つまりちょうど川の中央まで漕ぎ出したときにボートが川の流れと平行になる場合について考えてみる。この場合には、漕ぎ出し時間が有限でなければ、解の最適性を云々するわけにはゆかない。しかし、前にも述べたようにわれわれの場合には川の中央までの漕ぎ出し時間は無限大であるから議論の対象にならない。

- (iii) 川を横切る場合 目的地が対岸の点  $(2e, 2w)$

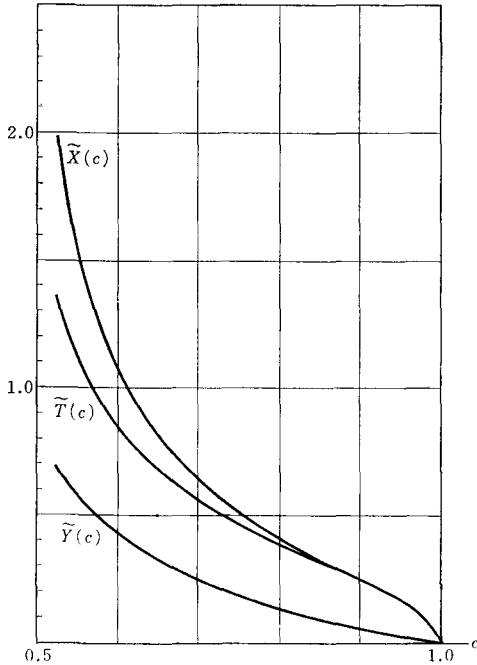


図16 ボートが流れと平行になる時刻——漕ぎ出し時間, そのXおよびY座標

である場合には, (a)というタイプの解曲線をそのまま用いるものと, (c)–(g)–(f)という3つのタイプの解曲線を連結したものが最適解の候補として考えられる。

後者の場合には, しかしながら, 流れに平行な直線部分は川の中央に位置しなければならない。接合部における微係数の連続性を保証するためである。したがって, 川の中央までの漕ぎ出し時間が有限の場合でなければ, 最適解として考察の対象にはならないから, 本稿における流速分布  $p(y)$  の設定では最適解にはなり得ない。

したがって, 川を横切る場合には, (a)というタイプの解曲線だけを考えることになる。解曲線は, (34)式により,

$$x(y) = \int_0^y \frac{c + p(u) - cp^2(u)}{\sqrt{(1 - cp(u))^2 - c^2}} du \quad (107)$$

によって与えられる。

また, 目的地に到達するためには

$$x(2w) = 2e \quad (108)$$

が成立しなければならないが, 解曲線の回転対称性 (3. 参照) からこの式は

$$e = \tilde{X}(c) \quad (109)$$

と書きかえられる。ここに

$$\tilde{X}(c) = \int_0^w \frac{c + p(y) - cp^2(y)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}} dy \quad (110)$$

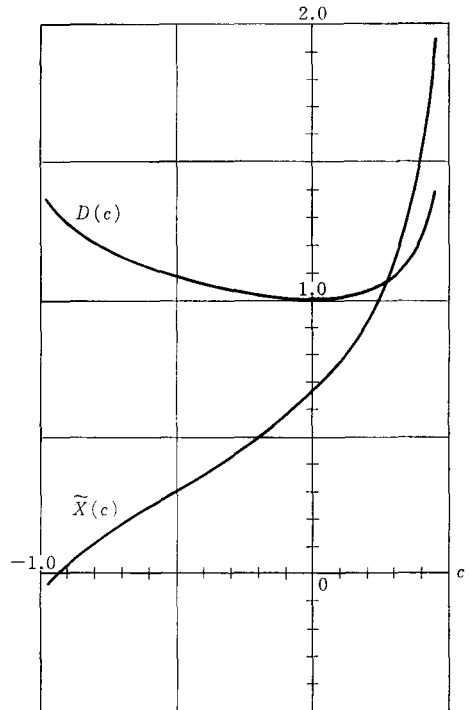


図17 パラメータcと目的地および横断時間

である。また, このとき横断に要する時間を  $2D(c)$  と書くことにすれば

$$D(c) = \int_0^w \frac{1 - cp(y)}{\sqrt{(1 - cp(y))^2 - c^2}} dy \quad (111)$$

となる。

$\tilde{X}(c)$  および  $D(c)$  の数値例を図17に示した。流速分布は図8のものである。(109)式を満たすパラメータcの値を大ざっぱに求めるには, このようなグラフを用いればよい。

以上に求めた最適解の数値例を図18に示した。これは, 図8の流速分布および解曲線に対応するものである。

## 5. おわりに

15年ほど以前, 筆者はボートで川を横切る場合の最短経路を求める計算をした。[3]すなわち, 本稿の問題の一部分である。いったん川をさかのぼり, 流れの早い中央部では多少流されても横切ることに専念し, 対岸近くで再び流れをさかのぼるといふS字型の最適経路に, 筆者は当時大きな興味をおぼえた。

その後まもなく, 川をくだってまた同じ岸にもどってくるという問題も頭に浮んだが, 他にもしなければならぬことが多く, 手をつけずにいた。しかし最近になって, カシオ PB-700 および FA-10 というポケット・コンピュータとプロッタ・プリンターからなる超小型のコ

