

勢力圏図と地理的最適化問題

鈴木 敦夫・浅野 孝夫

1. はじめに

近年、地理的情報処理の分野では、より大規模な図形データをより高速に処理することが要請されている。そのような要請に応える形で幾何学の問題に対する手法を計算複雑度 (computational complexity) の観点から再評価し、より効率的な手法を開発する研究分野である計算幾何学 (computational geometry) が1978年のM.I. Shamosの論文を転機として急速に発展してきた。計算幾何学の代表的な問題には、凸包問題、多角形問題、重なり問題、平面最小重みマッチング問題、Voronoi図構成問題、幾何学的探索問題等があるが [1, 6]、ここではその中の1つである Voronoi 図について解説し、Voronoi 図を用いて定式化できる最適化問題 (地理的最適化問題) の例をいくつか紹介しよう。

まず次のような問題を考える。

【1】 [3] ある地域に施設 (図書館, 病院など) をいくつか設置したい。その地域での利用者の分布はあらかじめわかっているものとし、利用者は最も近い施設を利用するとして、利用者の費用 (利用者と施設のあいだの距離の関数) の総和を最小にするにはどのように施設を配置したらよいか。

利用者が最も近い施設を利用するという仮定から、施設を配置したとき、この地域は各施設を利用する人が居住している重なりのない領域に分割

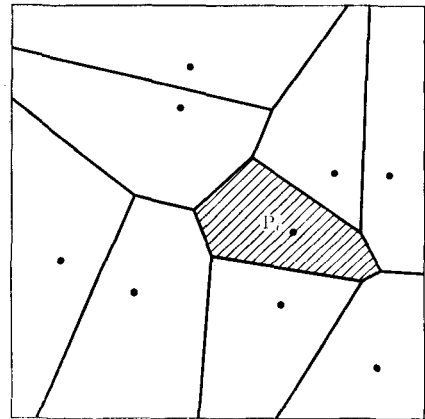


図 1 単位正方形内に9施設を配置したときの勢力圏図 (斜線をほどこした領域に居住する利用者は施設 P_i を利用する)

される (図 1)。これらの領域は Voronoi 領域と呼ばれ、各施設の“勢力圏”“圏域”とみなせる。この分割を Voronoi 図あるいは勢力圏図という。厳密な定義は第 4 章で行なうことにする。このような一見単純な問題でも施設の数が、数十、数百となると、解を求めるのはもちろん、勢力圏図を求めるのさえなかなか困難である。しかし計算幾何学の成果の1つである高速 Voronoi 図構成算法を用いると、この問題を実用的な規模、時間で解くことができるのである。計算幾何学の成果を用いて解かれる (施設配置問題などの) 数理計画問題をわれわれは地理的最適化問題と呼んでいる。

2. 地理的最適化問題

【1】は地理的最適化問題の典型的な例であるが、

すずき あつお, あさの たかお 東京大学 計数工学科

その他にもいくつかの問題が解かれている[8, 9, 10, 11]. その中から代表的なものを2つあげる.

【2】 [12]ある地域内で移動施設を周期的に一定間隔で配置したい. 利用者の時間的, 空間的な分布は既知とし, 利用者は, 施設が時間的, 空間的な意味で最も“近い”位置にあるときに利用するものとしたとき, 施設をどのように配置すれば, 利用者の費用の総和を最小にできるか.

【3】 [11]移動施設がある地域内に巡回させたい. 地域内での利用者の分布は既知とし, 利用者は移動施設が最も近い位置に止まったときに利用するとする. 移動施設がある地点でのサービスを終了して次にサービスを開始する地点まで移動できる距離は一定値以下であるという条件のもとで, 利用者の費用の総和を最小にするには, 移動施設をどのように巡回させればよいか.

これらの問題はいずれも Voronoi 図を用いて定式化できるのであるが, そのことは第4章で示すことにして, 次章では Voronoi 図について解説する.

3. 勢力圏図

Voronoi 図は, 地理的な問題に限らず, 物理学や生物学, 生態学などの分野でも有用な概念であるが, ここでは前章まで直観的に説明してきた Voronoi (図勢力圏図) を厳密に定義し, 最近開発された高速 Voronoi 図構成算法 [7] を概説するとともに, Voronoi 図の概念の一般化についても触れることにする.

3.1 Voronoi 図の定義

N 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^N の点を $P(\mathbf{x})$ で表わす. ただし \mathbf{x} は N 個の座標 x^1, x^2, \dots, x^N を並べたベクトルである. \mathbf{R}^N の中に n 個の点 $P_1(\mathbf{x}_1), P_2(\mathbf{x}_2), \dots, P_n(\mathbf{x}_n)$ が与えられているとき, \mathbf{R}^N の任意の点 $P(\mathbf{x})$ に対してそれら n 個の点のうち, 最も近い点が定まる. すなわち

$$V_i = \bigcap_{j: j \neq i} \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \mid \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_i \| < \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_j \| \}$$

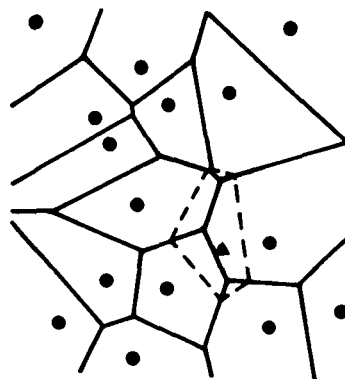


図2 逐次添加法で新たに1点を添加するときの作業
 実線: 既成の Voronoi 図
 ●●, …: すでにある点
 ▲: 新たに添加する点
 破線: 新しい点に対する Voronoi 領域

は, “ P_1, P_2, \dots, P_n のうちで P_i が最近点であるような \mathbf{R}^N の点の集合” ということになる. V_1, V_2, \dots, V_n は

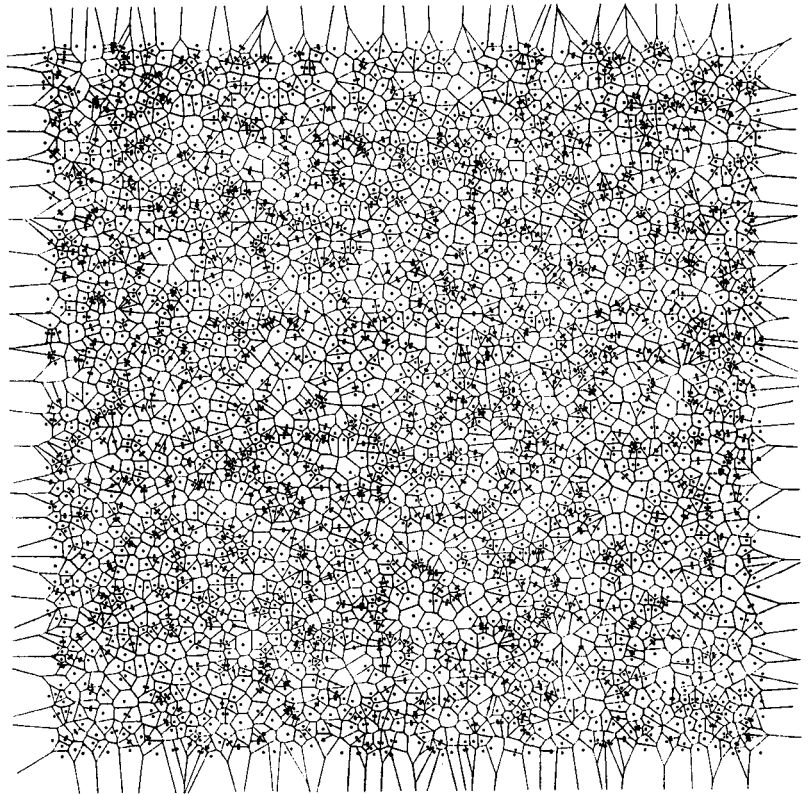
$$\bigcup_{i=1}^n V_i = \mathbf{R}^N, \quad V_i \cap V_j = \emptyset (i \neq j)$$

という意味で全空間 \mathbf{R}^N を n 個の領域に分割するが, このような分割は自然に N 次元の凸胞複体^{文注1)}を定義する. この凸胞複体のことを Voronoi 図と呼ぶ.

3.2 Voronoi 図の構成算法

$N=2$, すなわち2次元の Voronoi 図の構成算法は計算幾何学の中心的な問題の1つである. ごく素朴に与えられた点 P_1, P_2, \dots に対して, 各点ごとに垂直二等分線をひいて Voronoi 図を求めるとは, n が数十, 数百にもなると大変に手間がかかる. 計算複雑度でいうと, $O(n^3)$ の手間がかかる. 1975年に Shamos は与えられた点を2つに分けてそれぞれの部分について再帰的にアルゴリズムを適用して Voronoi 図を構成し, それを併合して全体の Voronoi 図にするという“分割統治法”にもとづいたアルゴリズムで, 最悪の場合でも $O(n \log n)$ の手間で Voronoi 図を構成できることを示すとともに, 最悪の場合の手間がこれより小さくできないことを示した [8]. これに対

図 3 単位正方形内に一様に分布した 4000点に対する Voronoi 図 (大屋隆生氏による)



し、3点に対する Voronoi 図からはじめて1点ずつ点を追加してゆき、追加点に対する Voronoi 領域を点を追加するたびに構成していく (図 2) “逐次添加法” にさらに点の追加順序と追加点の Voronoi 領域の構成の2点に関して、工夫をこらした四分木を用いて改良を加えて高速化を図った “逐次四分添加法” が最近開発された。この方法によると最悪の場合の手間は $O(n^2)$ であるが、実用上ほと

んどの場合平均的に $O(n)$ の手間で Voronoi 図を構成できる (“分割統治法” では平均的にも $O(n \log n)$ の手間がかかる)。実際に大型計算機で「1点当たり約 0.26ms の手間で Voronoi 図を構成できることが示されている [7]。図 3 は単位正方形内に一様に分布した 4000個の点に対する Voronoi 図である。

3.3 Voronoi 図の一般化

次元数 N が 3 以上になると、前節のような高速算法はのぞめないが、 $N=3$ のときには、“幅優先探索法” により平均的に $O(n^2)$ の手間で Voronoi 図を構成することができる [5]。基本要素として、“点” ではなく “直線分”, “多角形”, “円” を用いた Voronoi 図や、距離としてユークリッド距離以外のものを採用した Voronoi 図についても研究されている [5]。図 4 は “線分” を要素とする Voronoi 図である。

4. 地理的最適化問題の解法

第 1, 2 章であげた【1】、【2】、【3】の問題を数理計画問題として定式化して、解法の基本方針を【1】を例にとって解説する。さらに実際に得られた【1】、【2】、【3】の解に考察を加えてみよう。

4.1 数理計画としての定式化

【1】ある地域に設置する施設を $P_i(x)$ ($i=1, \dots, n$; $x=(x^1, x^2)$), 利用者は連続に分布しているとしてその密度を $d^2\mu(x)$ であらわす。 $f(\cdot)$ を施設までの距離と利用者の費用との関係をあらわす関数 (普通は増加関数と考えられる) とすると、この問題は利用者の総費用

$$(1) \quad F(x_1, \dots, x_n) = \int f(\min_i \|x - x_i\|^2) d^2\mu(x) \\ = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f(\|x - x_i\|^2) d^2\mu(x)$$

を最小化する問題として定式化できる。ただし、 V_i は \mathbf{R}^2 における施設 P_i の Voronoi 領域である。

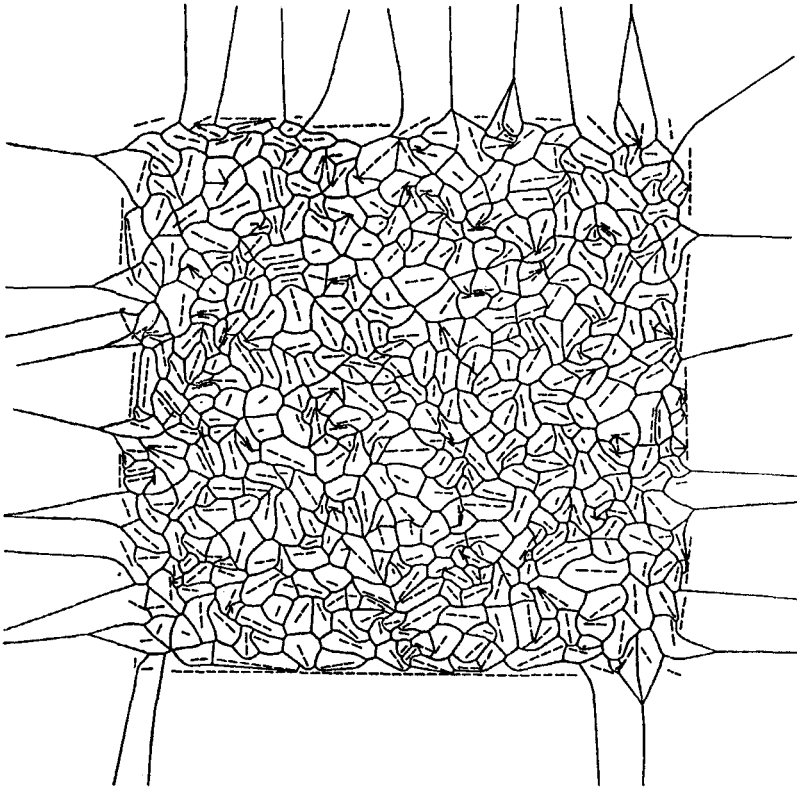


図 4 512本の線分(破線で示してある)を要素とする Voronoi 図 ([4]による)

$$(3) \quad \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}\| \leq C_i$$

$$(i=1, 2, \dots, n; \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_1)$$

のもとで(1)式の目的関数を最小化する問題としてこの問題は定式化できる。

4.2 解法の基本方針

前節で定式化した問題の目的関数は、凸でなく、微分不可能点を含む場合もある。したがって、解法としては原始的な降下法、すなわち降下方向を偏導関数と Hessian (の近似値) から求め、その方向に直線探索を行なうことをくりかえす

という方法を採用する。ここでは【1】を例として、解法の概略を述べよう。まず偏導関数は

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i^\lambda} = 2 \int_{V_i} \delta_{i\lambda} (x_i^\lambda - x^\lambda) f'(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2) d^2\mu(\mathbf{x})$$

ただし、 $\delta_{i\lambda} = 1 (\lambda = i); = 0$ (その他) とする。

Hessian の近似値としては、正確な Hessian の1つの項をとって、

$$(5) \quad \overset{i}{H}_{i\lambda} = 2 \int_{V_i} \{ \delta_{i\lambda} f''(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2) + 2\delta_{i\lambda} \delta_{i\mu} (x_i^\mu - x^\mu) (x^\nu - x^\nu) \cdot f''(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2) \} d^2\mu(\mathbf{x})$$

とする。特に $f(t) = t$ の場合には、(4), (5)式は

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i^\lambda} = 2 |V_i| \delta_{i\lambda} [x_i^\lambda - (V_i \text{の重心})^\lambda]$$

$$(7) \quad \overset{i}{H}_{i\lambda} = 2 |V_i| \delta_{i\lambda}$$

となる。ただし

$$(8) \quad |V_i| = \int_{V_i} d^2\mu(\mathbf{x}) = (V_i \text{の面積})$$

である。(4), (5)式を用いて、次のような降下法を構成する。

Step0: 適当な初期値から出発して収束条件を

【2】施設はある地域内で一定時間間隔 Δt ごとに周期 $n\Delta t$ で移動するものとする。その施設を $P_i(\mathbf{x}_i | t_i)$ ($i=1, \dots, n; \mathbf{x}_i = (x_i^1, x_i^2); t_i = t_0 + k\Delta t (k=1, \dots, m)$) であらわす。利用者は【1】と同じく連続的に分布しているとし、この密度を $d^3\mu(\mathbf{x}, t)$ であらわす。 α を時間距離と空間距離の換算率 (次元 [L]/[T] をもつ) とすると、利用者の総費用は

$$(2) \quad F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n | t_1, \dots, t_n)$$

$$= \int f\{\min_i (\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 + \alpha(t - t_i)^2)\} d^3\mu(\mathbf{x}, t)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2 + \alpha(t - t_i)^2) d^3\mu(\mathbf{x}, t)$$

となる。ただし、 V_i は $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^1$ における $P_i(\mathbf{x}_i | t_i)$ の Voronoi 領域である。この問題は(2)式を最小化する問題として定式化できる。

【3】移動施設が n 箇所まで止まってサービスをする場合、利用者の総費用は【1】で n 個の施設を配置するのと同じ形になるが、施設が1回に移動できる距離は一定値以下という制約条件が加わる。すなわち

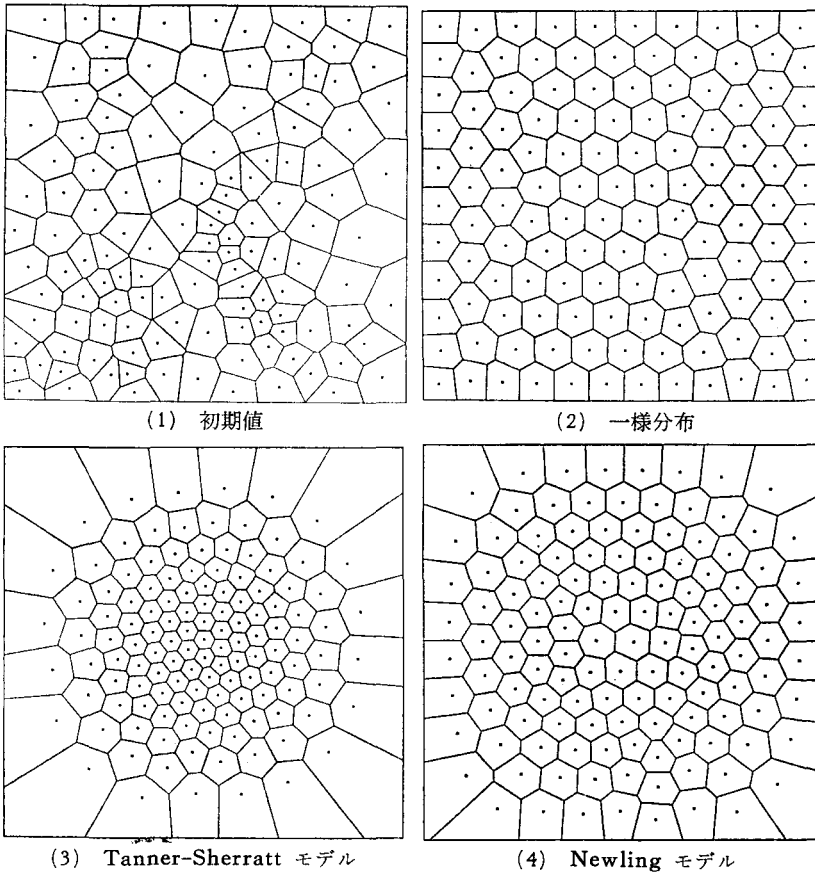


図 5 $f(t)=t$ $n=128$ に対する【1】の解 ([3]による)

満たすまで Step 1, Step 2 をくりかえす。

Step 1: (4), (5) 式を計算し, 降下方向 $-H^{-1} \Delta F$ ($H = (H_{ik})$, $\Delta F = (\partial F / \partial x_i)$) を決定する。

Step 2: Step 1 で決めた方向に Goldstein の規則で直線探索してステップ幅を決める。

この解法によると, F , ∇F , H を計算するためには各反復ごとに Voronoi 図を新たに構成することが必要となる。実際次節であげる実例【1】の 1° では 240 回 Voronoi 図を構成している。したがって Voronoi 図構成算法がこの解法の実用性に重要な意味をもつのである。また, 【2】は 3 次元の Voronoi 図構成算法を用いて【1】とほとんど同じ解法を用い, 【3】の制約条件付きの問題は乗数法を用いて解くことができる。

4.3 解の実例

【1】 $f(t)=t$ の場合に, 利用者の分布が次の 3 通りの場合について解を求めた(図 5)。S を単位正方形 $[-1/2, 1/2] \times [-1/2, 1/2]$ として

1° $d^2\mu(x)$ は S の中で一様, 外側で 0。

2° $d^2\mu(x)$ は S の中で $\exp(-25\|x\|^2)$ に比例し, 外側で 0 (これは集中型の人口分布に対応したモデルで, 都市工学では Tanner-Sherratt モデルと呼ばれている)。

3° $d^2\mu(x)$ は S の中で $\exp(-\|x\| \cdot (25\|x\| - 10))$ に比例し, 外側で 0 (ドーナツ型の人口分布に対応したモデルで, Newling モデルと呼ばれる)。

図 5 を見ると, 需要密度の高い場所では施設の密度も高くなっており, 得られた解は直観的にも納得できる性質を有している。

【2】S の中で, 周期 6 で施設を移動させる場合を考える。需要密度は空間, 時間の双方で一様であるとする。時間距離と空間距離の換算率 α を変えたとき, 解がどのように変わっていくかを調べた(図 6)。 α は [L]/[T] の次元をもつが, たとえば $\alpha = 1.0 \text{ km/日}$ とすると, 利用者は 1.0 km 離れた施設を利用するのと, 1 日待つのが同じ費用かかると考えていることになる。図 6 を見ると, α が小さいとき (利用者にとって時間より距離のほうが重要な場合) には, 1 周期を通して空間に関して一様に施設を配置して, 利用者にとってすぐ近くの施設を利用する機会を与えるのがよく, α が大きいとき (利用者にとって距離より時間のほうが重

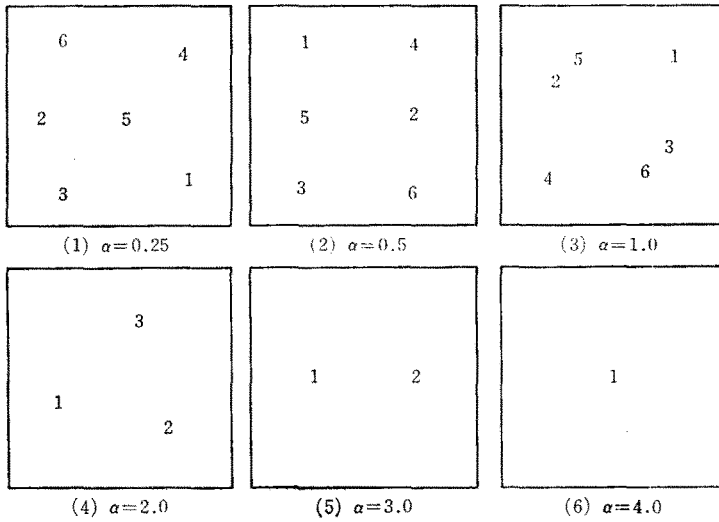


図 6 問題【2】で時間距離と空間的距離の換算率 α を変えたときの配置状態の変化 ($n=6, m=6$)

図中の数字 i は $t_i = t_0 + i\Delta t$ での施設の位置をあらわす. ([11]による)

要な場合) には, 短時間内で一様に施設を配置し

が動くコースは S 内を埋めつくすような曲線に近

て, 利用者が, 多少距離は遠くても, いつでも施設を利用できるようにするのがよいことがわかる.

【3】 S 内で40カ所止まってサービスして帰ってくる移動施設を考える. 需要密度は S 内で一様だとして, 施設がある地点でサービス終了後, 次に止まってサービスを開始する地点までの移動距離の上限, すなわち (3) 式の C_i (i に関しては一定とする) をいろいろに変えたときの解の様子を調べた (図7). これを見ると, C_i が大きくなる, すなわち制約条件がゆるくなると, 解の Voronoi 図は【1】の1°に近くなり, しかも移動施設

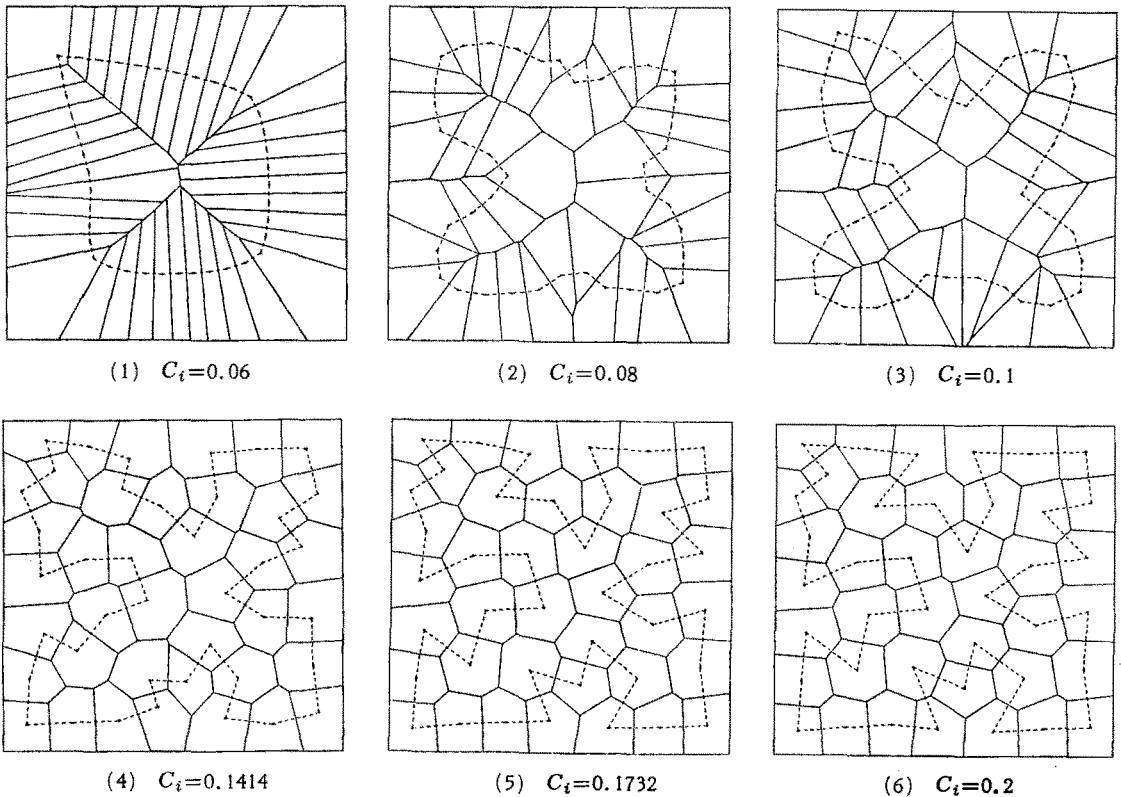


図 7 問題【3】で施設が1回に動く距離に関する制約 C_i (i に関しては一定) を変えたときの移動施設の移動コース (破線) と Voronoi 図 (実線) ($n=40$). ([11]による)

くなっていることがわかる。

5. おわりに

地理的最適化問題は、ORの本来の方向である(現実の問題→モデル化→〈ORの手法〉→問題の解決)という図式にはあてはまらない。むしろ計算幾何学という道具を使った数理計画問題が興味を中心に、現実の問題との関係は後でつけた解釈になっていると受けとられるかもしれない。しかし、われわれは地理的最適化問題を解くことで、「計算幾何学の成果を用いると、この程度の現実に近い問題なら実用的な規模で解くことができ、しかも今後さらに複雑な、より現実的な問題でも解ける可能性は大いにある」ということを示して、都市計画等の分野で現実の問題を扱っている実務家からのフィードバックを受けて、さらに新しい地理的最適化問題を解くこともOR的意義があると考えている。

参考文献

- [1] 浅野孝夫, 今井 浩, 伊理正夫: 計算幾何学—計算幾何学へのいざない, *bit*, Vol. 16, No. 12, (1984), pp. 52-61
- [2] 伊理正夫他: 地理的情報の処理に関する基本アルゴリズム, 日本OR学会報文集T-83-1, 1983

〈お知らせ〉

「1984年国際経済経営会議レポート」発行

1984年11月20日から22日まで、学習院百年記念会館で開催されました「国際経済経営会議」には、本学会も主催者の一員として参加し、会長をはじめ多くの会員が講演、パネリストとして出席しました。

この会議の報告が毎日曜日の日本経済新聞に掲載されておりますが、この会議の詳しい内容をまとめた小冊子「1984年国際経済経営会議レポート」が4月下旬に発行されることになりました。このレポートをご希望の方は、住所、氏名、年齢、職業、OR学会会員であることを明記し、郵送費として、1冊につき切手 250円分を同封のうえ、**4月10日までに**下記宛お申し込みください。

申込先(切手送付先): 〒106 東京都港区六本木3-2-12 日本アイ・ビー・エム株式会社, 宣伝, 「国際経済経営会議」係

- [3] 伊理正夫, 室田一雄, 大屋隆生: 地理的最適化問題とその解法の実用性. 日本OR学会1983年度春季研究発表会アブストラクト集, C-2, pp.92-93
- [4] 小久保岩生: 一般化 Voronoi 線図の構成算法の研究—特に線分に対する Voronoi 線図について. 東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専門課程 修士論文, 1985年3月
- [5] 小久保岩生, 大屋隆生, 玄英澤: 一般化Voronoi線図について. 日本OR学会1984年度秋季研究発表会アブストラクト集, 2-D-1, pp.151-152
- [6] D.T.Lee and F.P.Preparata: Computational Geometry: A Survey. *IEEE Transactions on Computer*, Vol.C-33, No.12 (1984), pp.1072-1101
- [7] T.Ohya, M. Iri and K. Murota: Improvements of the Incremental Method for the Voronoi Diagram with Computational Comparison of Various Algorithms. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.27, No.4 (1984), pp.306-337
- [8] M.I. Shamos: Computational Geometry. Ph. D. Thesis, Yale University, 1978
- [9] 鈴木敦夫, 伊理正夫: Steiner 問題に対する発見的方法II. 日本OR学会1984年度秋季研究発表会アブストラクト集, 2-D-2, pp.153-154
- [10] 鈴木敦夫, 伊理正夫, 室田一雄: 地理的最適化問題とその解法の実用性II. 日本OR学会1983年度秋季研究発表会アブストラクト集, B-8, pp.73-74
- [11] 武田 晋: 地理的最適化と動的施設配置問題. 東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専門課程 修士論文, 1985年3月
- [12] 武田 晋, 伊理正夫: 地理的最適化手法を用いた動的施設配置問題. 日本OR学会1984年度秋季研究発表会アブストラクト集, 2-D-9, pp.167-168

注) 1) $N=2$ の場合を考える. 平面内に多数の交わらない凸多角形がある時, 各多角形の内部(周上の辺や頂点を除いたもの)を2次元要素, 各辺(両端点を除く)を1次元要素, 各頂点を0次元要素と呼ぶと, これらは共通部分をもたず, 各要素の周上の要素は上記の要素のいずれかになっている. このようなとき, これらの要素は凸胞複体をなすという.