

R.ベルマンと動的計画法あらがき

——私の左利きと創造性とのあいだに強い相関が存在
することを信じている—— —R.ベルマン自伝より—

小田中 敏男

1. ベルマン一人と業績

(1) 略 歴

R.ベルマンは1920年ニューヨークで生まれ、1984年3月19日にこの世に別れを告げた。彼は今世紀後半の数理科学の“台風の目”として長く記憶されることは確かである。彼の44以上の著述と600以上の論文は多くの研究者と学生に大きな影響を与えるであろう。さらに彼は世界各国の研究者と人種・宗教・政治を越えて共同研究をし、また個人的にも親交を結んで多くの友人に恵まれていた。

彼の最初の仕事は1953年マグロウヒル社から出版された“微分方程式の安定性理論”であろう。これは3カ月という記録的短時間でプリンストン大学のS・レフシュツ教授に提出した学位論文にもとづいたものである。彼はプリンストン大学やスタンフォード大学で教職についた後、世界的に有名なRAND研究所の研究員を10年間つとめた。この時期に動的計画法(DP)が創られた。1965年、ロスアンゼルス南カリフォルニア大学(USC)の数学、電気工学、生物工学、医学部の教授に就任し、後にジョージア大学の応用数学センターの応用数学教授も兼務した。

ベルマンの偉大な貢献は種々の国や学会から名誉博士や多くの賞を与えられている。特記するものとしては1970年にアメリカ数学会と応用数学会

から、最初のN・ウィナー賞を、1976年にはアメリカOR学会と経営学会とから、J・フォン・ノイマン賞をさずけられた。また1978年にはDPの発展に対して、アメリカ制御学会や電気電子工学会から金賞を受けた。

彼は20の国際誌の編集委員で、特にJMAA (Journal of Mathematical Analysis and Applications)とJMB (Journal of Mathematical Biosciences)をアカデミックプレス社の“科学技術シリーズの数学”の創立者で編集者であったことは周知のとおりである。

晩年には10年近くも車椅子に親しむような生活を余儀なくされたが、多くの仕事を健康な時代と変わらずに成し遂げた。この困難な時代に何と10以上の著述と50以上の論文をこなしている。死亡する月ですらファジィDPに関する論文を書いていたし、また日本の日電の迫江氏には音声認識の論文、資料を請求していた。

R.ベルマンは関心の広さとその先取り精神とからルネッサンスの人間と評されるほどであったが、ORとMSに限定して彼の貢献をふりかえてみよう。もちろん最も有名なものは動的計画法であるが、これは1953年に発表された。1957年に著述として出版されたが、専門書のベストセラーといわれている。これはOR、MS、制御理論、医療、保健、エネルギー、水資源等種々の分野に多くの影響を与えた。また彼はビジネスゲームに対するシミュレーションの応用のパイオニアであ

おだなか としお 東京都立工科大学

った。これは後に人工知能の“専門家システム”の分野への発展につながった。

L. ザディと共同でファジィ意思決定の論文をMSに発表した。これはロボティクス等に関連する重要な仕事である。さらに彼は数学とコンピュータとは人生に奉仕するよう利用されねばならぬとして、特に医療、薬理学、病院管理等にそれらを応用した。

(2) 来日記

1963年、東京に最初に夫妻で訪れた。このとき渡辺茂先生(当時東大教授)と小田中とが羽田に出むかえた。当方で予約していた帝国ホテルをヒルトンホテルに変更されたことは記憶に新しい。旧帝国ホテルの古典さが理解できなかったようである。国際会議では波動伝播の発表をした。このときL・ザディも出席していた。1966年再来日した日本OR学会主催で“システムの制御と同定”と題した講演が日科技連で開催された。このとき彼ら夫妻を皇居の盆栽庭園や相撲見物等に案内したが、この異国情緒はまったく彼らを満足させたようである。このあと京都、福岡を訪問した。3回目の来日、1970年、JUSE(日科技連)の招待で“数理医学”と題する講演が日科技連で行なわれた。

(3) 人と思想

その異常な能力の広さと多方面さによって現代のルネッサンス人と評されたベルマンは子供の頃はユダヤ人とか左利きとかの不幸な要素を背負っていた。しかしこのマイナス要素をプラスに変ずる生命力と気力をもっていた。

右利き世界での左利きの人は注意深くすべての状況を調べることを常に余儀なくされ、何物も当り前ではなく、世界を新鮮な目で眺めるようになり創造性につながるとしている。ユダヤ人という民族的ハンデは後生に人種、宗教、政治にかかわりなく世界中に多くの友人をもつこととなった。また最近判明したことであるが、めぐまれないUSCの学生に援助の手をさしのべていたとのこと

である。

サイバネティクスのN. ウィナーとデジタルコンピュータのJ. フォン・ノイマンは現代情報科学の2本柱である。歴史が判定することであろうが、この両者を綜合したものはR. ベルマンではないかと思われる。

2. 動的計画法の過去現在未来

(1) はしがき

人間は意思決定の動物であり、さらにこの事実を意識している動物でもある。この自己認識は複雑性と不確実性に直面したときいかに効果的にふるまうかの方法を発見するようになった。たとえば論理学、確率論、情報科学、心理学、精神病理学等で、これらは意思決定を理解しようとする努力の副産物である。特に工学的、社会的システムの多くの問題点を克服するための努力が多くての理論を創り上げた。動的計画法(DP)はその1つであり、今世紀の生んだ嫡子である。これこそ時間と空間上の決定の系列を必要とする多段決定過程の理論である。

決定の系列を必要とする問題の最も重要な型はシステム制御である。たとえば発電力の配分、在庫問題、スケジューリング問題、林業の間伐と植付、家畜の飼育、害虫防御等である。また会社資金計画の管理、タクシー会社の保守と取替え、人工衛星の大気圏突入法等もこの一例である。

これらの戦略、意思決定過程、制御に共通なものは何か。それは1回限りの現象ではなく、多くの関連する調査と行動を要求することである。目標と条件とを考慮したシステムを考えよう。このとき行動の多くのコースが可能である。しかし目標を満足し、その条件にかなうためにはそれらのコースのうちの1つが選ばねばならぬ。次の決定に対して必要な情報を獲得するために、さらにいっそうの調査が要求される。調査と推測と決定の綜合がくりかえされる。DPはどんな情報が必要であり、それがどのように効果的に使用されね

ばならないかを決定する組織的な手法を提供している。この理論の応用はコンピュータの容量とともに大となり、記憶、演算等の情報処理はますます強大となった。

(2) フィードバック制御

前節の考えを具体的に説明するために経済構造の多段生産過程を考えよう。それは自動車産業と鉄鋼産業の二産業部門からなる構造の経営である。ある特定の時点における各産業の状態は次の2量で表わされるとする。

- (a)生産に必要な原材料の蓄積
- (b)その特定の生産品の生産に関する産業の生産能力

問題を簡単にするために、自動車の生産は配分された鉄鋼の量だけにと仮定する。ある特定の時点において、蓄積された鉄鋼は次の3つの目的のいずれか1つに使用される。

- (a)現存の鉄鋼産業の能力を用いて鉄鋼の追加生産を行なうこと。
- (b)現存する鉄鋼産業の能力を増加すること。
- (c)現存する自動車産業の能力を用いて自動車を生産すること。

目標は与えられた時間内で生産される自動車の総量を最大にすることである。決定は多くの異なる方法によって得られる。この理論的成功にかかわらず、実際の経営とは多少の差異が存在する。すなわち簡単な理想化されたシステムにもとづいた予測とは異なる様式でふるまう。それは種々の理由で、計算された路からかたよっているということである。

経営者はもちろんこの可能性に気づいている。そして出発時から蓄積と生産能力とは注意深く記憶され、実際の路と計算された路とは常に比較される。そして適当な時期に制御工学は希望する軌跡にひきもどすように活動する。これはフィードバック制御の例である。修正を実行するのに必要な努力の量は、計画した軌跡からの偏差に依存す

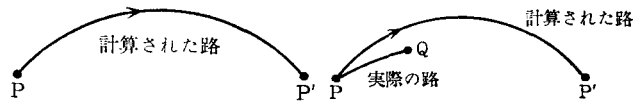


図 1

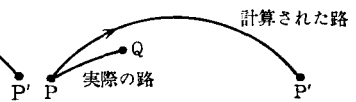


図 2



図 3



図 4

る。記録と制御は希望した状態になるまでつづけられる。

(3) 問題点

各産業の状態は調査と決定の系列によって形成される。フィードバック制御の理論はまったく美しく、また多くの実際例が存在する。しかし問題点は存在する。またフィードバック制御を用いた多段生産過程で議論しよう。

いま、実際の状態が計算された軌跡より小偏差を生ずるとし、その偏差の修正が行なわれると仮定する。そのとき図3に示したようなジグザグコースが発生する。そのとき修正路を過程が通過するに要する時間は、最初に予期された時間より多くなるか、所期の自動車の生産量を達成するのが不可能かもしれない。さらに状況は自転車の乗りはじめの初心者と同様となる。修正力は次第に大となり、次第に小区間で生ずるようになる。そして修正は不可能となり、軌跡は迷路の様相を呈してくる。これは不安定性である。

問題点はフィードバック制御の概念のあまりにも厳密な適用にある。自動車の生産量を最大にするという元の目標に注目する代りに、計算された軌跡に固執するという部分目標にとらわれたからである。このQにおいて、予期した軌跡からはるか離れており、Qから出発した新路は終点で計算された点に近寄らなければならぬ。もし産業の状態の新しい路が、何らかの原因によって乱されたならば、上の手続きによって修正がくりかえされるだけである。

これは条件のあるシステムに対する簡単な常識であり、一般に多段決定過程である。これがDPの本質である。

(4) 政策の概念

DPの本質は政策の概念であり、それはシステムの状態の項から作った決定を語る法則である。古典的制御理論をこえたこの新制御概念の主な利点はその柔軟性にある。それはすべてのおこりうる事態に対して準備することになる。状態が何であろうとも、政策はどんな制御が有効に働かせることができるかを知らせる。最も希望する路の予測された概念によって限定されない。後に明らかになるように政策の思想は実験による学習の概念に通じている。

多段階意思決定過程は政策のくりかえしの適用として認識されている。最小時間、最小費用、最大利益等の意味で最も効果的である政策は最適政策と呼ばれている。

これらの最適政策は“最適性の原理”によって簡単に特性化される。すなわち

“最初の状態がどうであり、またそれに対してどんな決定をしてもこの状態、決定とは無関係にその後に行なわれる決定が、最初の決定によって生じた状態に関して最適政策となるような性質を最適政策はもっている”

これは上に述べた常識的接近のより抽象的定式化である。この定式化の数学への変換は最適政策を導くことを可能ならしめる関数方程式を作る。

(5) 応用

DPの特性である柔軟性はその応用に対して1つの問題点を発生することになる。上述のとおり政策はシステムのすべての可能な決定から最適決定を導出する法則である。(決定は制御に等価である！)

複雑なシステムは考える多くの状態が存在するから、将来の使用に対して可能な決定の集合を記憶しておくことは必要である。その結果デジタルコンピュータの限りある記憶容量と情報処理容

量とはDPの応用範囲にある制限を加えることになる。

たとえば産業の状態が蓄積と生産能力の2次元相空間の点として示される時、もしこれらの座標の各々に対して10の可能な値を与えるとき、システムとしては 10^2 の可能な値を生ずることになる。政策を記憶するより効果的方法は存在しないことはないが、しかし複雑なシステムに対する政策を記述する困難点の本質的には存在する。幸いにもコンピュータは次第に改良されつつあり、DPは多くの分野に応用可能となった。

特に重要なことは多くの場合DPの手法は古典的手法のような数学的訓練を必要とせぬという事実である。さらに古典的理論の大部分は数値計算に適するようには作られていない。しかしコンピュータが発達したので、コンピュータの能力にもとづいた新しい数学が創られつつある。まさにDPは今世紀が生んだ嫡子である。

(6) 多段意思決定

以上述べた意思決定の仮定は次のとおりである。

1°. 任意の時点におけるシステムの状態を正確に同定可能とする。または等価的にどこにいるかを知れば、それがいつの時点であるかを決定可能とする。

2°. 意思決定が実行された時点も判明しているし、その効果は正確に予測可能である。

種々の理由で、これらの仮定は理想化されたものであることは明らかである。もし決定の効果がどうであるか十分正確に予測できぬとしたら、この意思決定の問題は明らかに困難となる。この場合、最適性とは何かを再検討する必要にせまられる。幸いにも不確実性の理論、確率論が用意されている。単なる最小時間、最小費用、最大利益等を目標とするのではなく、これらの期待値を効果的にとり扱う政策を問題とすることとなる。

直観的に意思決定者の政策はシステムの状態が何であり、目標が何であるかに依存することは明

らかである。このシステムに必要なものは政策であり、すべての可能な状況においてなさるべき決定を語る法則である。

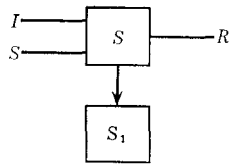


図 5 状態と決定

動的計画法はストカ

スティック (stochastic) な場合にもこの原則が用いられる。

柔軟な政策はかくして偶然事象を含む多段決定過程のゆらぎに対しても適用される。決定的な、あるいは確率的な意思決定過程に対して、DPが同一の定式化が可能であるという事実は美的ですらある。

ここで状態、決定政策、最適政策等について再び説明しよう。

前の産業構造の問題を考えよう。問題はいかに資源を配分したらよいかを語る法則である。まず決定過程の主な構成要素をとり出そう。

(a) システムの状態を記述する状態変数 S 、ここでは原材料の蓄積と各産業の生産能力の2つがこれにあたる。

(b) 可能な決定変数 D 、ここでは原材料の配分の仕方である。

(c) ある決定の結果を決める規則、システムの最初の状態 S と入力 I 、決定 D にもとづき、システムの新しい状態 S_1 と応答 R を決定する仕組み、すなわち5つの変数の組 $[I, S, D, S_1, R]$ 、ここでは原材料の蓄積と各産業の生産能力が原材料を配分することによりどのように変化するかを記述する法則が与えられていなければならない。(図5)

確率的決定過程では、システムの状態 (S) と刺激 (I) と決定 (D) の結果とを観測する。ある決定が行なわれると、システムはいくつかの可能な状態のうちの一つに移り、可能な応答のうちの一つが発生する。(図6)

(d) システムの効率を評価する規則、自動車の総生産量を最大にすること。自動車の生産量は自動

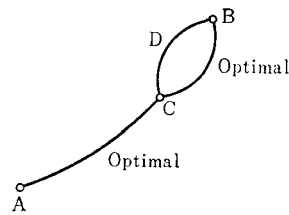


図 6 最適性の原理

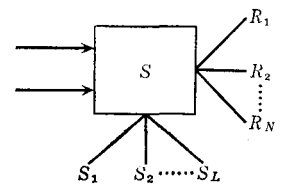


図 7 状態と決定
(確率的場合)

車産業に配分された鉄鋼の量にだけ依存するから、自動車産業に配分された鉄鋼の総量を最大にすればよい。

さて最適政策を選ぶのが問題であるが、1段の決定過程においては、ひとつひとつ調べてゆく方法も可能である。このような方法を枚挙的アプローチと呼ぶ。この方法ではすべての可能性が列挙され、そしてあらかじめ定められた目標で評価される。決定過程の研究でコンピュータが基本的役割を果たすのはこの点においてである。コンピュータは短時間で文字どおり幾百万の可能性を調べ、ムダな決定をすて、よりすぐれた決定をひろってゆく。

しかし、一般的に可能な行動の数は非常に大きく、直接ひとつひとつ調べるやり方では、強力なコンピュータでも最適政策を見いだすためには不可能となってくる。

さらにこの例のような多段階の場合には決定のくりかえしが問題となる。すなわち、まずある決定が行なわれ、その応答と新しい状態が観測され、これにもとづいて第2の決定が行なわれ、それにもとづく応答と状態が観測され、この過程がくりかえされる。この種の過程は多段決定過程と呼ばれる。この場合、最適政策を求めるためには一般に多量の状態と応答と決定とを評価せねばならぬ。このように高度に複雑な問題は新しい数学理論が要求された。かくして生まれた理論がDPで、計算機と理論の結合により最適政策を求める手がかりが得られる。

さて多段決定過程において状態が直接に連結しているときの最適政策についての原理が前述のべ

ルマンによって“最適性の原理”として明らかにされた。たとえば図7で点Aから点Bへの最適径路を考えるとき、その道が点Cを通るとすると、点Cから点Bへの道の選び方は点Cから点Bへの最適径路でなければならぬということである。

(7) 適応制御過程

これまでの意思決定過程の例は次の仮定にもとづいていると考えられる。

- 1) システムを記述する基本変数の性質は知られている。
- 2) すべての可能な決定は既知である。
- 3) 原因と結果の一般的構造は決定的または確率的意味で明白である。
- 4) 意思決定または制御過程の目的関数は明白であり、正確に定義されている。

しかし多くの実際的情況ではシステムの基本的知識を全部知ることなしに意思決定の問題に直面している。たとえば産業における生産過程、経済または軍事の領域の政策決定、実験計画等がこれである。たとえばサイコロが不正であるかどうかわからずに賭博をせよとしよう。最適政策の先験的性質にもとづいて賭博を開始してから、実験の結果にもとづいてこの政策を修正するようにする。これは適応制御過程と呼ばれる。心理学者が適応性と呼んでいるものとこの概念とのあいだには密接な関係が存在する。この大容量システムをとり扱うために、意思決定にはどの情報が用いられ、どのようにして情報がデータの小標本から抽出されるか、実験と観測から何が学習できるか、有効な情報は初期政策をどのように修正するか等重要な問題にぶつかることになる。時間と資源の配分だけでなく、システムの本質的性質を研究するためにささげる時間と努力を決定せねばならない。

政策の概念は意思決定と制御過程のより広い過程に拡張される。それはどこにいるか、どれだけ知っているかを前提として何をなさねばならぬかを語ることでできる過程である。前述の“最適性

の原理”はこの適応制御過程の正確な数学的定式化をはたすために用いられる。この理論は決定的、確率的過程より広い概念で、より高い解析の水準で用いられる。しかし現在のコンピュータ、理論にもかかわらず、この領域で人類ははまだ完全に成功をおさめているとはいえない。ある特別な場合が部分的に解決されているだけである。

適応制御過程において、決定は単にシステムの位置だけでなく、システムに関する情報に影響をおよぼすだけである。この過程の研究者は情報と学習の意味するものを詳細に解析し、さらに思考とは何かに思いをいたすようになる。

(8) 意思決定の階層

人間精神のこの標題の説明は簡単ではない。そこで数学的にこの目的に接近する方法を考えよう。問題を“コンピュータは思考ができるか”とさらに限定することとしよう。まず問題の意味を定義しよう。“コンピュータ”とは商業的に有用である型の計算機のこと、 “思考”とは抽象的用語での定義より意思決定のある型との関連でのみ考へるとする。それから思考の水準を定義に意思決定の水準と思考の水準とは等価であるとする。“できる”とは標準時間で実行可能な意思決定過程の計算機プログラムが書けることとする。たとえば組織的に美しい抽象絵画や音楽が創り出されればこれは知的領域ですばらしい突破口となる。本質的な点は意思決定過程の水準が存在するという点で、これらの過程の見通しのよい組織的方法を見いだすことが重要な問題となってくる。1つの手がかりは数理論理学のラッセルの型の理論であろう。

意思決定過程の階層の例を示そう。第1水準は決定論的、確率論的過程である。第2水準でシステムの構造に関する学習を含んだ意思決定過程を考える。局地的政策は各段階における意思決定に対して必要である。大局的政策は実験の基礎にもとづいて局地的政策を修正するために必要である。これは意思決定に対する意思決定である。大

局的政策を選ぶことは意思決定に関する意思決定に関する意思決定である。このようにして意思決定の水準を高めてゆく。

(9) おわりに

以上、意思決定過程が高水準化し、最適化・適応・学習という概念が導入され、さらに多変数多目的制御・安定性・自己組織系と拡大されてくる時、情報の概念がますます大きな比重となってくる。

動的計画法は1970年代前後のコンピュータとともに発達し、または時代を先取りした理論であった。高水準の意思決定過程の理論はこれまでの動的計画法を含み、しかもこれから出現する高性能のコンピュータに相応する理論でなければならな

い。

最後に、人間精神の創造性はコンピュータにより強化されこそするが、人間精神は中心的地位を占めることは明らかで、機械化されるものではないことを強調して筆をおくことにする。

参 考 文 献

- 1) R. Bellman; Dynamic Programming, *Science*, Vol.153, No.3731 (1966)
- 2) R. Bellman; An Introduction to Artificial Intelligence, Boyd & Fraser Pub. Company (1978), 小田中敏男他訳, 「人工知能入門」, 日刊工業新聞社 (1982)



竹内啓編

計量経済学の新展開

東京大学出版会 278頁 2800円

“Econometrics”が独自の分野として確立されてからすでに半世紀が過ぎ、さらに経済学もかなりのピッチで自然科学に接近しつつあることは周知の事実であろう。

本書は計量経済学の、主として統計的方法の展開について、10人の著名なエコノメトリシャンが各々の研究成果をまとめている。したがって各章は独立した構成をとりつつも、全体としては「同時方程式モデル」と「時系列モデル」の手法の進展について種々の角度からとりあげている。ここで両者の方法上のちがいはケインジアン対マネタリストの *philosophy* の相違を背景としているのだが、応用面では、同時方程式モデルの大型化・複雑化が進む一方、時系列モデルは計測上の予測力のみを重視しつつある。このように、ともすれば“理論なき計測”に陥りがちな傾向を警告して、本書は理論計量経済学の立場からの方法改善を論証するのである。なお各章末の参考文献は豊富であり、最終章の佐和教授のモデルの有効性をめぐる議論は示唆に富んでいる。

ところで、数理科学の精密化が進むと、それまで潜在化していた未開拓な問題を解決するための新たな理論が現われるであろう。数理統計学における AIC のベイジ

アンへの拡張や統計モデルの幾何学的解明など、めざましい進歩をとげていることを鑑ると、経済学もまた、より包括的な領域へと位相的に解消されていくかもしれないのである。

以上の意味で、本書は多くの課題への方向性をはらむ内容をもち、数理科学にかかわる方々にも参考となるであろう。

なお、本書の構成は以下のとおりである。

序章「計量経済学の最近の展開」竹内啓, ①「推定の漸近理論の発展とその計量経済モデル推定への応用」同 ②「同時方程式推定量の小標本特性」森棟公夫, ③「時系列モデルによる経済分析」浪花貞夫, ④「合理的期待形成仮説とマクロ計量分析」浅子和美, ⑤「経済分析とスペクトル解析」新居玄武, ⑥「ベイジの手法による統計分析——部分的なサーベイと今後の展望」美添泰人, ⑦「非正規性のもとでの統計解析」加納悟, ⑧「シユアモデルにおける推定と検定——トランスログ型モデルへの応用」和合肇, ⑨「産業連関表の利用と問題」柳沼寿 ⑩「マクロ計量モデルの有効性をめぐって」佐和隆光 (東京都労働経済局 木下望)