

# ファジィ目標計画問題に対する一考察

——目標空間における図解——

山口 俊和, 永沼 康人

## 1. はじめに

経営計画は、1目標の最大化（または最小化）問題として定式化されるよりも、複数目標の満足化問題として定式化される方が現実的である場合が多い。また、目標設定の際、たとえば「利益をだいたい1億円以上にした」というように、しばしばあいまいな表現で行なわれている。これは、1億円以上の利益をあげれば十分満足だが、9500万円までなら満足度は減少するが許容できるというような意味をもつことが多い。このような意思決定者の主観的判断の「あいまいさ」を定量化するため、Zadeh [8] はファジィ集合の概念を定義し、さらに、Bellman と Zadeh はファジィ環境における意思決定基準を定義している[1]。また、Zimmermann によって、ファジィ概念をとり入れた線形計画問題の定式化、および複数の目標設定にファジィ概念をとり入れた多目標計画問題の定式化が研究されている[9]、[10]。

本稿は、目標水準の設定にファジィ概念をとり入れたファジィ目標計画問題に焦点を当て、

- ① 多目標計画におけるファジィ目標計画法の位置づけの明確化
  - ② 目標空間上でファジィ決定とメンバシップ関数の図解
  - ③ 新しいタイプのメンバシップ関数の提案
- を目的とする。

## 2. ファジィ決定

全体集合  $X$  におけるファジィ集合  $A$  は

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1]$$

なるメンバシップ関数によって特性づけられた集合である。

やまぐち としかず 東京理科大学 工学部  
ながぬま やすひと ㈱ブリヂストン

受 理 昭和63年4月5日

再受理 昭和63年12月14日

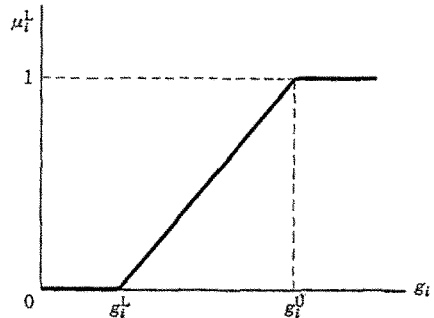


図 1 線形関数型メンバシップ関数

る。  $\mu_A(X)$  の値が 1 に近いほど  $X$  の  $A$  に属する度合いが大きく、0 に近ければその度合いが小さい。

目標  $G_i (i=1, 2, \dots, m)$  の達成水準  $g_i(x)$  を「だいたい  $g_i^U$  以上にした」という場合、達成水準が  $g_i^U$  以上ならばメンバシップ関数の値は 1 をとり、それ以下ならば 1 よりも小さい（ただし、0 より大きい）値をとり、  $g_i^L$  以下ならば 0 をとるようなメンバシップ関数によって特性づけるものとする。最も基本的なメンバシップ関数である線形関数型メンバシップ関数は次のように定義される。

$$\mu_i^L(x) = \begin{cases} 1 & ; g_i(x) \geq g_i^U \\ \frac{g_i(x) - g_i^L}{g_i^U - g_i^L} & ; g_i^L \leq g_i(x) \leq g_i^U \\ 0 & ; g_i(x) \leq g_i^L \end{cases} \quad (1)$$

このメンバシップ関数を図示すると、図 1 のようになる。

メンバシップ関数は、線形関数型のほか、後述のように種々のタイプが考えられている。また、目標のみならず、制約条件にもファジィ概念をもたせた定式化も考えられているが([7])、本稿では目標水準のみにファジィ概念をもたせた問題を扱う。

ファジィ目標を  $G_1, G_2, \dots, G_m$  とすると、ファジィ決定  $D$  は

$$\mu_D(\mathbf{x}) = \min_i \{ \mu^{L_1}(\mathbf{x}), \mu^{L_2}(\mathbf{x}), \dots, \mu^{L_m}(\mathbf{x}) \} \quad (2)$$

というメンバシップ関数によって特性づけられる。Bellman と Zadeh による最大化決定 (maximizing decision) は、制約条件を満たす代替案の集合  $X$  の中から  $\mu_D(\mathbf{x})$  の値を最大化するような  $\mathbf{x}$  を選ぶことであり、

$$\mu_D(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x} \in X} \mu_D(\mathbf{x}) \quad (3)$$

となる  $\mathbf{x}^*$  を求めることである。このファジィ決定は「最小オペレータ」とも呼ばれている。

このほか、別のタイプのファジィ決定が考えられている。凸オペレータによるファジィ決定は

$$\mu_D^{CO}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i \mu^{L_i}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

で定義されている。ここで、 $w_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^m w_i = 1$  である。また、積オペレータによるファジィ決定は、

$$\mu_D^{PR}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^m (\mu^{L_i}(\mathbf{x}))^{w_i} \quad (5)$$

で定義されている。これらについても、最大になる  $\mathbf{x}^*$  を選ぶ最大化決定が定義されている。

### 3. ファジィ目標計画法

$m$  個の目標  $G_i (i=1, 2, \dots, m)$  の達成水準をそれぞれ  $g_i^U (i=1, 2, \dots, m)$  以上にしたいという問題を考える。このような多目標計画問題において、目標水準にあいまいさをもたせたタイプのファジィ目標計画問題は次のように定式化される。

目的関数

$$\text{満足化: } g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq g_i^U \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

$$\text{制約条件 } \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \leq B_k \quad (k=1, 2, \dots, q) \quad (7.a)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (7.b)$$

この問題において、各目標に (1) 式の線形関数型メンバシップ関数を適用し、ファジィ決定に最小オペレータを採用すれば、次のような線形計画問題に変換されることが Zimmermann によって示されている。

$$\text{目的関数 最大化: } z = \lambda \quad (8)$$

$$\text{制約条件 } \lambda \leq \mu^{L_i}(\mathbf{x}) \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (9.a)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \leq B_k \quad (k=1, 2, \dots, q) \quad (9.b)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (9.c)$$

(1) 式の  $g_i^L$  と  $g_i^U$  の値は意思決定者が主観的に決定するものであるが、Zimmermann は次のような方法でこれらの値を決定することを提案している。

すなわち、次のような個別の最大化問題を考える。

$$\text{目的関数 最大化: } g_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (10)$$

$$\text{制約条件 } \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j \leq B_k \quad (k=1, 2, \dots, q) \quad (11.a)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (11.b)$$

これを  $i=1, 2, \dots, m$  について解き、最適解を  $x_i^U (i=1, 2, \dots, m)$ , そのときの目的関数値を  $g_i^U (=g_i(x_i^U))$  とする。また、 $g_i^L$  を

$$g_i^L = \min(g_i(x_1^U), g_i(x_2^U), \dots, g_i(x_m^U)) \quad (12)$$

とする。

### 4. 目標空間でのファジィ決定の図解

ファジィ決定で得られる解の性質を調べるために、「満足度ベクトル」と「等満足度線」という概念を導入する。ここでは、各目標に線形関数型メンバシップ関数を適用する場合について考察する。

各目標に (1) 式のメンバシップ関数を想定すると、目標の達成水準を軸にした目標空間上に次のような 2 点が定義される。

$$G^L = (g_1^L, g_2^L, \dots, g_m^L)$$

$$G^U = (g_1^U, g_2^U, \dots, g_m^U)$$

この 2 点を結んだベクトル

$$\overrightarrow{G} = G^U - G^L$$

を満足度ベクトルと呼ぶ。点  $G^L$  では複数目標の総合的な満足度はゼロ (0%) であり、点  $G^U$  では満足度が 1 (100%) であると考えられる。満足度ベクトルは複数目標の総合的な満足度の増大する方向を示すものと考えられる。

満足度ベクトルを用いて、2 目標の場合のファジィ決定の等満足度線を示すと、最小オペレータの場合が図 2、凸オペレータの場合が図 3、積オペレータの場合が図 4 のようになる。等満足度線の形状は、オペレータによって異なる。また、最小オペレータと凸オペレータは、目標ベクトル法 [2] の L 字型モデル、加重型モデルにそれぞれ対応していることがわかる。

### 5. 目標空間における各メンバシップ関数の図解

ファジィ決定には前述のように 3 つの方式があるが、最適解を求める計算手順が簡便であることから、通常のファジィ目標計画法では最小オペレータによる決定方式が採用されている。そこで、最小オペレータによるファジィ決定を前提として、従来の研究によって提案されて

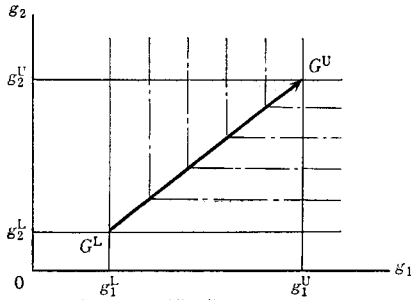


図 2 最小オペレータの場合

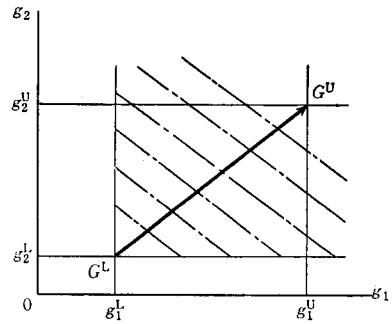


図 3 凸オペレータの場合

いるメンバシップ関数を2つのタイプに分類した上で、各メンバシップ関数を適用した場合の満足度ベクトルの性質を調べるために、2目標のケースを利用して目標平面上で考察する。

このような図解を行なうことのメリットは次の2点である。

① 線形計画法や目標計画法における図解が、それらの手法の基礎にある考え方の理解を助けているように、比較的高度な手法と考えられてきたファジィ目標計画法の基本的な考え方の理解を高めることができる。

② 満足度ベクトルは、複数目標の総合的な達成方向(各目標の重視の度合い)を示している。満足度ベクトルの形状を図示することによって、意思決定者の望んでいる達成方向が一定なのか(後述の直線タイプに対応)、あるいは一定ではなく、目標平面上の位置によって異なるのか(後述の折れ線および曲線タイプに対応)ということがわかる。

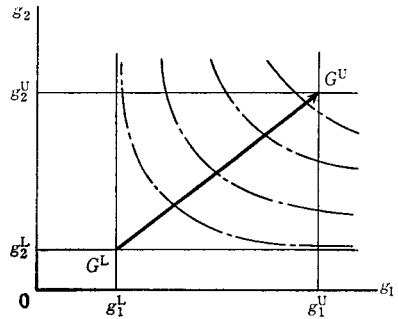


図 4 積オペレータの場合

### 5.1 $g_i^L$ と $g_i^U$ の目標達成水準の範囲で関数値が定義されているメンバシップ関数

$g_i^L$  と  $g_i^U$  の目標達成水準の範囲でメンバシップ関数の値(0から1の値)が定義されるメンバシップ関数には前述の線形関数型のほか、区分的線形関数型、逆正接双曲線関数型、指数関数型がある。

#### (1) 区分的線形関数型メンバシップ関数

Hannan は線形関数型メンバシップ関数の拡張として、区分的線形関数型メンバシップ関数を提案し、最小オペレータを採用した場合の最適解は、線形計画問題を解くことによって得られることが示している[3]。

2つの目標  $G_1, G_2$  にそれぞれ図5のような区分的線形関数型メンバシップ関数を適用するものとする、目標空間上では、一般に図6のような点  $G^L$  と点  $G^U$  を結ぶ折れ線タイプの満足度ベクトルが定義される。これは、複数目標の達成方向が目標平面上の位置によって異

なっていることを示している。区分点のとり方によっては、満足度ベクトルは点  $G^L$  と点  $G^U$  を結んだ1本の直線になることもある。

#### (2) 逆正接双曲線関数型メンバシップ関数

坂和は、次のような逆正接双曲線関数型メンバシップ関数を定義し、最小オペレータを採用した場合の最適解は、線形計画問題を解くことによって得られることを示している[6]。

$$\mu_i^L(x) = \begin{cases} 1 & ; g_i(x) \geq g_i^U \\ \gamma^L_i \tanh^{-1}\{(g_i(x) - \beta_i^L) \alpha_i^L\} + (1/2) & ; g_i^L \leq g_i(x) \leq g_i^U \\ 0 & ; g_i(x) \leq g_i^L \end{cases} \quad (13)$$

2つの目標にそれぞれ図7のような逆正接双曲線関数型メンバシップ関数を適用すると、満足度ベクトルに対応するものとして、一般に図8のように点  $G^L$  と点  $G^U$  を結んだ曲線が得られる。

特別な場合として、 $(g_1^{0.25} - g_1^L) : (\beta_1^L - g_1^L) = (g_2^{0.25} - g_2^L) : (\beta_2^L - g_2^L)$  のように  $g_1^{0.25}, g_2^{0.25}$  を決めて関数を設定すると、満足度ベクトルは点  $G^L$  と点  $G^U$  を結んだ直線になる。ここで、 $g_i^{0.25} (i=1, 2)$  は  $\mu_i = 0.25$  に対応する  $g_i$  の値である。

#### (3) 指数関数型メンバシップ関数

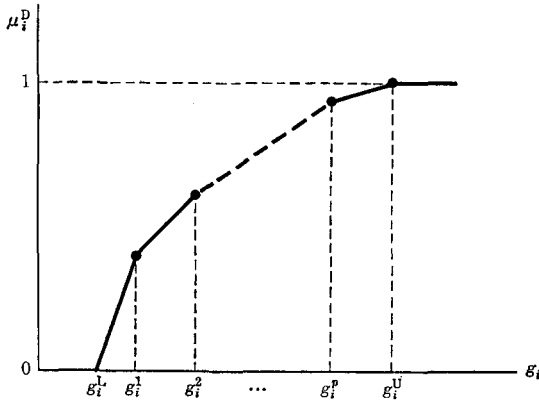


図 5 区分的線形関数型メンバシップ関数

坂和は、次のような指数関数型メンバシップ関数を定義し、最小オペレータを採用した場合の最適解は、線形計画問題を解くことによって得られることを示している[6].

$$\mu_i^{E_i}(x) = \begin{cases} 1 & ; g_i(x) \geq g_i^U \\ \alpha^{E_i} \left[ 1 - \exp \left\{ -\beta^{E_i} \cdot \left( \frac{g_i(x) - g_i^L}{g_i^U - g_i^L} \right) \right\} \right] & ; g_i^L \leq g_i(x) \leq g_i^U \\ 0 & ; g_i(x) \leq g_i^L \end{cases} \quad (14)$$

この関数を図示すると、図9のようになる。 $\beta^{E_i} > 0$ ,  $\alpha^{E_i} > 1$  の場合は実線の形状となり、 $\beta^{E_i} < 0$ ,  $\alpha^{E_i} < 0$  の場合は点線の形状になる。

2つの目標にそれぞれ指数関数型メンバシップ関数を適用すると、後述の数値例のケース2のように、満足度ベクトルに対応するものとして、点  $G^L$  と点  $G^U$  を結んだ曲線が得られる。特別な場合として、 $(g_1^{0.5} - g_1^L) : (g_1^U - g_1^L) = (g_2^{0.5} - g_2^L) : (g_2^U - g_2^L)$  となるように

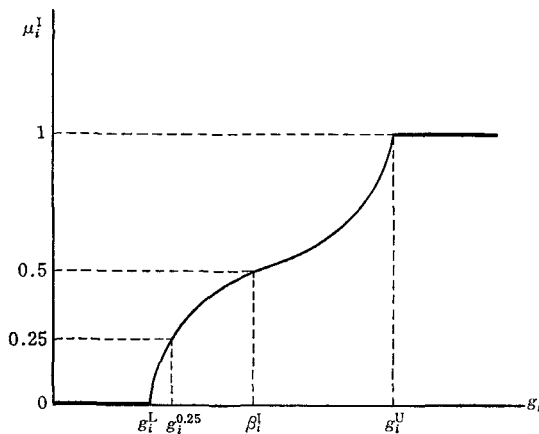


図 7 逆正接双曲線関数型メンバシップ関数

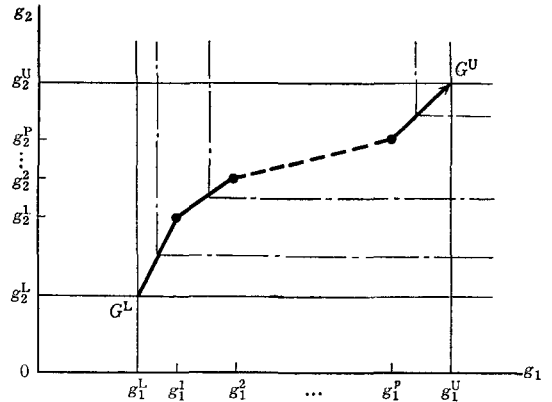


図 8 目標平面での図解

$g_1^{0.5}$ ,  $g_2^{0.5}$  を決めてメンバシップ関数を設定すると、満足度ベクトルは点  $G^L$  と点  $G^U$  を結んだ直線になる。ここで、 $g_i^{0.5} (i=1, 2)$  は  $\mu_i^{E_i} = 0.5$  に対応する  $g_i$  の値である。

## 5.2 すべての目標達成水準の範囲で関数値が定義されているメンバシップ関数

Leberlingは次のような正接双曲線関数型メンバシップ関数を定義し、最小オペレータを採用した場合の最適解は、線形計画問題を解くことによって得られることを示している[4].

$$\mu_i^{H_i}(x) = (1/2) \tanh \{ (\beta_i(x) - \beta_i^L) / \alpha_i \} + (1/2) \quad (15)$$

この関数を図示すると、図10のようになる。

2つの目標にそれぞれ正接双曲線関数型メンバシップ関数を適用すると、図11のように満足度ベクトルは点  $(\beta_{H_1}, \beta_{H_2})$  を通る傾き  $\alpha_{H_1}/\alpha_{H_2}$  の直線になる。

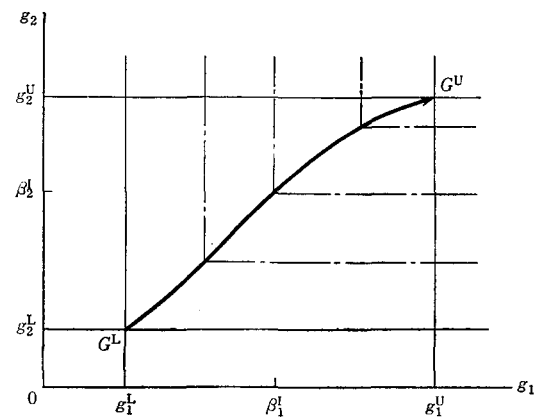


図 8 目標平面での図解

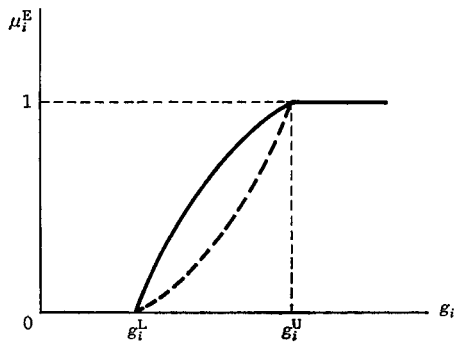


図 9 指数関数型メンバシップ関数

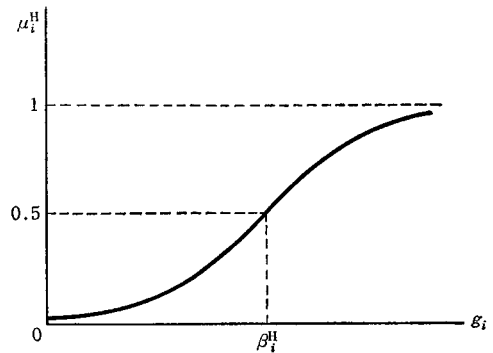


図 10 正接双曲線関数型メンバシップ関数

## 6. 新しいタイプのメンバシップ関数の提案

従来の研究によって提案されている5つのメンバシップ関数を2つのタイプに分類したが、ここで新しいタイプのメンバシップ関数を提案する。

- (1)  $g_i^L$  以上のすべての目標水準で0から1の関数値が定義されているタイプ

指数関数型メンバシップ関数を変形して、図12に示すような次のメンバシップ関数(タイプAと呼ぶ)を定義する。

$$\mu_i^R(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\alpha_i^R \cdot \left(\frac{g_i(x) - g_i^L}{g_i^U - g_i^L}\right)\right\} & ; g_i(x) \geq g_i^L \\ 0 & ; g_i(x) \leq g_i^L \end{cases} \quad (16)$$

$\alpha_i^R$  は、 $\mu_i^R = 0.5$  となる  $g_i$  の値である。各目標にこのメンバシップ関数を適用した場合の最小オペレータによる最適解は線形計画問題を解くことによって得られる[5]。

2つの目標にそれぞれこのメンバシップ関数を適用す

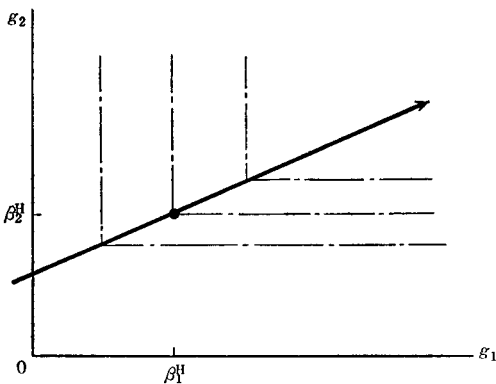


図 11 目標平面での図解

ると、後述の数値例のケース3のように満足度ベクトルは点 $G^L$ を始点とする傾き $\alpha_i^R(g_i^U - g_i^L)/\alpha_i^R(g_i^U - g_i^L)$ の直線になる。

このメンバシップ関数は、たとえば利益目標などのように、達成水準が $g_i^L$ を下回るのは許容できないが、 $g_i^L$ を超えるならば、あとはできるだけ大きくしたいというタイプの目標に適用することができる。

- (2)  $g_i^U$  以下のすべての目標水準で0から1の関数値が定義されているタイプ

これも指数関数型メンバシップ関数を変形して、図13に示す次のメンバシップ関数(タイプBと呼ぶ)を定義する。

$$\mu_i^F(x) = \begin{cases} 1 & ; g_i(x) \geq g_i^U \\ \exp\left\{-\alpha_i^F \cdot \left(\frac{g_i(x) - g_i^L}{g_i^U - g_i^L} - 1\right)\right\} & ; g_i(x) \leq g_i^U \end{cases} \quad (17)$$

$\alpha_i^F$  は  $\mu_i^F(x) = 0.5$  となる  $g_i$  の値である。各目標にこのメンバシップ関数を適用した場合の最小オペレータによる最適解は線形計画問題を解くことによって得られる[5]。また、2つの目標にそれぞれこのメンバシップ

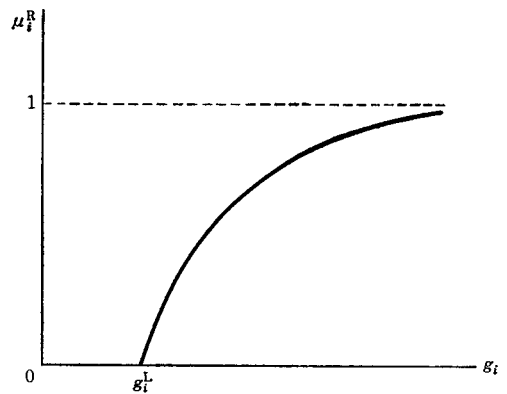


図 12 タイプAのメンバシップ関数

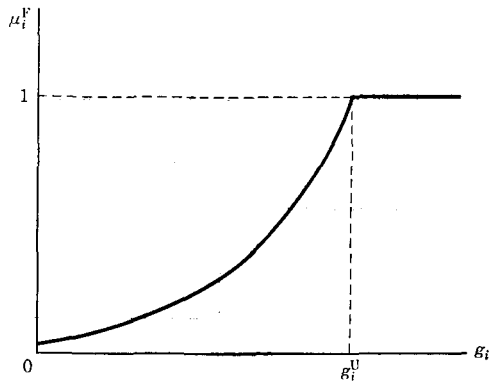


図 13 タイプBのメンバシップ関数

関数を適用すると、図 14 のように満足度ベクトルは点  $G^U$  を終点とする傾き  $\alpha^{F_1}(g_2^U - g_2^L) / \alpha^{F_2}(g_1^U - g_1^L)$  の直線になる。

このメンバシップ関数は、達成水準が  $g_i^U$  を超えれば十分満足であり、かつ  $g_i^L$  は設定しないというタイプの目標に適用することができる。これは、目標の上限は設定しておくが、達成水準が相当低い場合でも許容するというものである。

## 7. 数値例

次のような 2 目標 2 変数の数値例を考える。

目的関数

$$\text{満足化: } g_1(x) = 2x_1 + 5x_2 \geq g_1^U \quad (18. a)$$

$$\text{満足化: } g_2(x) = 3x_1 + x_2 \geq g_2^U \quad (18. b)$$

$$\text{制約条件 } -x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (19. a)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 13 \quad (19. b)$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 22 \quad (19. c)$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14 \quad (19. d)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (19. e)$$

Zimmermann の方式を採用すると、 $g_1^L = 14$ 、 $g_1^U = 31.75$ 、 $g_2^L = 10.25$ 、 $g_2^U = 21$  である。

(1) ケース 1

2 つの目標にそれぞれの線形関数型メンバシップ関数を適用すると、目標平面では図 15 のようになり、最適解は点  $F(x_1 = 4.985, x_2 = 3.523; g_1(x) = 27.584, g_2(x) = 18.477)$  になる。

(2) ケース 2

2 つの目標にそれぞれ  $\alpha^{E_1} = 1.018$ 、 $\beta^{E_1} = 4.055$ 、および、 $\alpha^{E_2} = -0.543$ 、 $\beta^{E_2} = -1.044$  とした (14) 式の指数関数型メンバシップ関数を適用すると目標平面では図 16 のようになる。最適解は点  $G(x_1 = 5.992, x_2 = 2.012;$

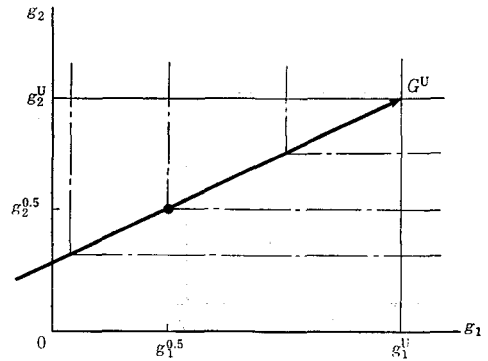


図 14 目標空間での図解

$g_1(x) = 22.043, g_2(x) = 19.988)$  になる。

(3) ケース 3

2 つの目標にそれぞれ  $\alpha^{R_1} = 8.3176$ 、 $\alpha^{R_2} = 5.5452$  とした (16) 式の指数関数型メンバシップ関数を適用すると、目標平面では図 17 のようになる。最適解は点  $H(x_1 = 4.905, x_2 = 3.643; g_1(x) = 28.024, g_2(x) = 18.357)$  になる。

## 8. おわりに

(1) 多目標計画において、目標計画法や目標ベクトル法 [2] が複数目標の総合的なリグレットの最小化問題であるのに対し、ファジィ目標計画法は複数目標の総合的な満足度の最大化問題であることが確認された。

(2) 既存の研究におけるメンバシップ関数を 2 つのタイプに分類し、目標空間上で満足度ベクトルの形状を考察した。目標平面で図解することによって、手法の基本的な考え方をより一層理解することができた。

(3) 新しいタイプの 2 つのメンバシップ関数を提案した。現実の経営目標には、ある範囲の達成水準に注意を

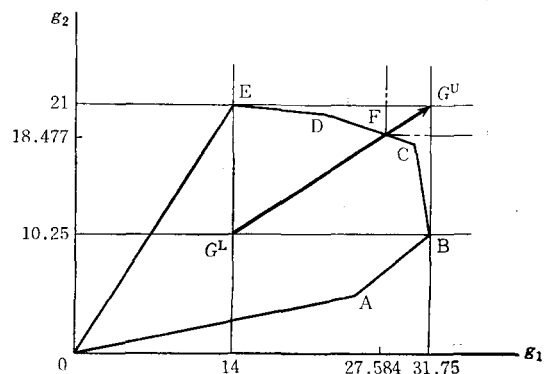


図 15 ケース 1 の図解

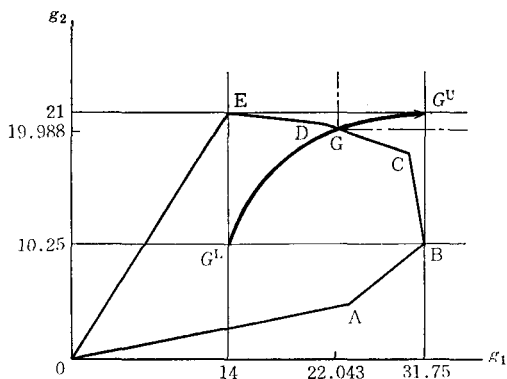


図 16 ケース 2 の図解

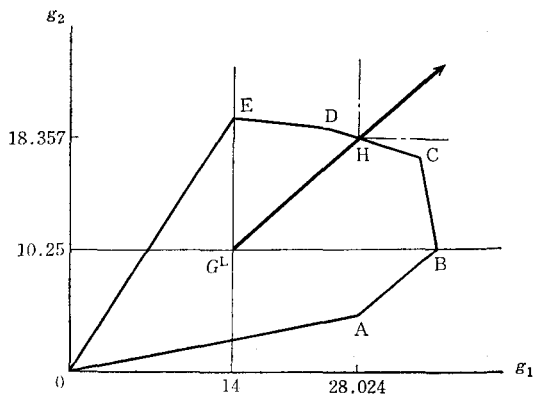


図 17 ケース 3 の図解

払うものや、ある値以上、あるいはある値以下の達成水準に注意を払うものなど種々のタイプがあるので、目標のタイプに応じてメンバシップ関数を使い分けることが必要であり、本稿で提案するようなメンバシップ関数を用意しておくことは有用であろう。

#### 参 考 文 献

- [1] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A., "Decision Making in a Fuzzy Environment", *Management Science*, Vol. 17, No. 4, pp. 141-164, 1970.
- [2] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和: 「経営の多目標計画」, 森北出版, 1987.
- [3] Hannan, E. L., "Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6, pp. 235-248, 1981.
- [4] Leberling, H., "On Finding Compromise Solutions in Multicriteria Problems Using the Fuzzy Min-Operator", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 6, pp. 105-118, 1981.
- [5] 永沼康人, "ファジィ 目標計画問題に考する一考察", 東京理科大学大学院工学研究科 (経営工学専攻) 修士論文, 1988.
- [6] 坂和正敏, "多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法とその応用", 電子通信学会論文誌, Vol. J65-A, No. 11, pp. 1182-1189, 1984.
- [7] 坂和正敏: 「線形システムの最適化 <一目的から多目的へ>」, 森北出版, 1984.
- [8] Zadeh, L. A., "Fuzzy Sets", *Information Control*, Vol. 8, No. 3, pp. 338-353, 1965.
- [9] Zimmermann, H. J., "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objec-

tive Functions", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, No. 1, pp. 45-55, 1978.

- [10] Zimmermann, H. J., "Fuzzy Mathematical Programming", *Computing and Operations Research*, Vol. 10, No. 4, pp. 291-298, 1983.

#### 論文・事例研究の原稿募集!

ORの特徴は実践にあるといわれています。実際的な応用をぬぎにした理論ということはORでは考えられません。本誌でも以前から会員の皆様からの事例研究の報告をお願いしてきましたが、まだ十分な成果をあげているとはいえません

「論文・事例研究」は企業、研究所、大学等で実際に行なった事例を論文としてまとめたものを広く会員の皆様に紹介することを目的として作られた欄です。この論文は2人のレフリーによって正式に審査されますが、マネジメント、行政、工学等の広い分野において適用対象の新しさ、適用方法の新しさ、適用範囲の広さ等が論理的、科学的に論じられたものでありますならば、積極的に採用する方針です。皆様のご投稿をお願い申し上げます。

投稿要領: 学会原稿用紙36枚 (25字×12行) 以内  
(図・表を含む) 投稿先はOR学会事務局OR誌編集委員会宛。

なお、原稿の他コピーを2部添付してください。  
(OR誌編集委員会)