

待ち行列のはなし

高橋 敬隆, 町原 文明

皆さん方は切符売場に行って並んだ経験がおありだと思います。満車の駐車場入口付近では車が長い列をなしているのを見かけた方もあるでしょう。Y市にある中華街では、時分時になると人気のある小規模の店の前に長い行列ができます。この種の“行列”をORでは線形代数の行列(Matrix)と区別して、待ち行列(Queue)と呼んでいます。そして、待ち行列に関する問題、たとえば「平均待ち人数は何人？」とか「待ち時間が3分以上になる確率は？」を解決する理論を待ち行列論(Queueing Theory)といいます

さて、ORでは待ち行列といっても待ちを許さない場合があります[1]。たとえば、筆者ら行きつけの西武新宿線H駅近くの居酒屋「M」は料理がうまくて安いのでいつも混雑していますが、この「M」に入れない客は居酒屋「H」に行き、そこが入れない時に客は居酒屋「K」に行きます。(これを固定迂回ルーティングといいます。) 駐車場で満車の時に到着した車がすべて直ちに立ち去る場合も待ちが生じない場合に属するでしょう。ORでは、“待ちの生じない待ち行列”にも待ち行列論がほとんどそのまま適用されるので、待ちを許さない場合も待ち行列モデルの1つとして取り扱うことにします。

ここで大雑把に待ち行列モデルを特徴づけて、ケンドール(Kendall)の記号を導入しておきましょう。

お客があるサービスを提供している場所(系といいます)に到着するとき、「 $A/B/c/d$ 」でその系を特徴づけます。ここで、 A は客の到着間隔分布(あるいは到着過程)、 B は客のサービス時間分布、 c はサーバ数、 d は系内許容客数であり、 d が無限大のとき「 $/d$ 」は省略します。たとえば、 $D/M/2$ とは、客の到着間

隔が一定(D はDeterministicの頭文字)、指数分布サービス時間(M はマルコフの頭文字)、2サーバからなり、系内許容数が無限大の待ち行列モデルを表わします。 $M/G/c/c$ とは、客の到着間隔が指数分布、サービス時間が一般分布(G はGeneralの頭文字)にそれぞれしたが、サーバ数が c で待ち室がない即時系を表わします。

待ち行列の話は電話のネットワークの回線設計で起こりました。今から約80年前(1909年)、デンマークのコペンハーゲン電話会社に勤めていたA.K.アーラン(Erlang)という人が電話局と電話局の間に何本の回線を設置すればよいかを算出する計算式を導出しました。現在では、この式は $M/G/c/c$ 即時系に対する呼損率(c 個のサーバすべてが稼働中である確率)を表わすものとしてアーランB式と呼ばれています。待ち行列の研究は待ちを許さない系の研究から始まったのです。一方、待ちを許す $M/M/c$ 系に対する待ち率(到着客が直ぐにサービスされずに待ち行列に並ぶ確率)はアーランc式と呼ばれています。

このアーランの式は、現在でも、通信システムやネットワークの設計の基本になっているものですが、ここでは単近な例を紹介しましょう。以下の例で、ランダムな到着という言葉が出てきますが、これは客の到着間隔分布が指数分布(累積到着客数分布がポアソン分布[2][3])にしたがうことを意味し、ポアソン到着とも呼ばれています。

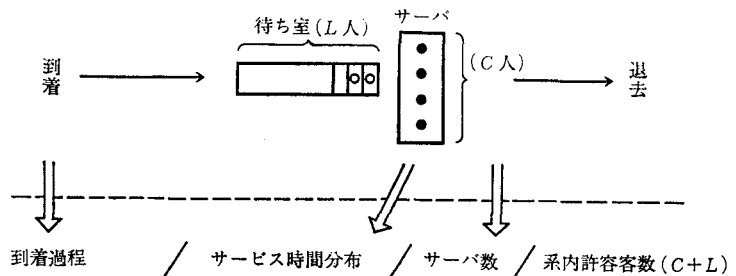


図1 ケンドールの記号

たかはし よしたか
NTT交換システム研究所
まちはら ふみあき
NTT通信網総合研究所

〒180 武蔵野市緑町3-9-11

例1 T屋駐車場

JR東日本線O駅付近のT屋というディスカウントショップは広い客層を集めています。特にT屋駐車場入口には長蛇の車の列ができます。車の到着がポアソン到着、駐車場に入るのを諦める(途中放棄する)車はないものとします。この駐車場における収容台数を c 、車1台分の収容スペースをサーバ、車の駐車時間をサービス時間と見なすと、駐車場における待ち行列は $M/G/c$ 系で表わせます。さらに駐車時間分布が指数分布にしたがい、加わる呼量 a (offered traffic=単位時間当りの平均到着車数 \times 平均駐車時間)が測定により $a=40.5$ (台)であったとします。収容台数 $c=45$ (台)の時、到着車が待たなければならない確率は、負荷表[4]により $p(0)=0.386$ 。平均待ち時間は、 $E_W=0.086$ (時間) $=5.16$ (分)であることがわかります。収容台数を増加、減少させた時の待ち率や平均待ち時間も同様にしてわかります。

例2 バー「V」[4]

JR東日本線K駅近くのバー「V」はO氏のお気に入りですが2回に1回は混雑していて入れません(待ち許容数が0の場合に当たります。)ある夜、O氏は美人のマダムにこう交渉しました。「2回に1回はひどいよ。せいぜい10回に1回にしてくれない？」マダムは店を拡張すべきかどうかM氏に尋ねました。「現在、10の座席をどれだけ増やしたらいいのかしら？」

まずM氏は、加わる呼量(offered traffic) a を求めます。ただし、 $a=(\text{単位時間当り到着客数})\times(\text{バーにいる平均滞在時間})$ M氏の観測によれば店内が一杯である確率はO氏の言葉どおり約50%でした。客がランダムにやってきて、1人ずつ勝手に帰ってゆくとしましょう。すると、バーにおける座席の占有状況は、 $M/G/c/c$ 系で記述されます。 c はこの場合、座席数で $c=10$ 、アランB式により $a=18.3$ です。M氏がマダムに説明します。「このことは、客が平均30分バーにしているとすると、店に来る客数は1時間当り36.6人ですね。O氏の言うように、10回に1回お客が入れないとき(呼損率が10分の1以下にする最小の c)は、再び負荷表(アランB式)により $c=21$ ですよ。」

マダムはほっとして言いました。「大体、2倍の大きさにすれば良いのね。右隣のタバコ屋を買収すれば十分だわ」

今までの例に見てきましたように、電話回線算出に始まったアランの式はいろいろと便利で広い応用をもっています。しかし、一方、アランの式だけでは大変な

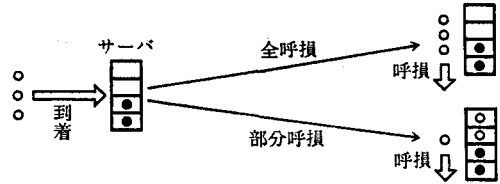


図2 集団到着即時式における呼損方式

誤算をしてしまうこともあります。

例3 ファクシミリ通信方式における主メモリ

ファクシミリ通信方式では、同報呼(複数宛先をもつ通信要求)の受付時に、主メモリのメモリユニット(サーバ)を同報呼の宛先数だけ一斉に捕捉します。捕捉に失敗すると、同報呼が全部呼損となる場合(全呼損)と一部呼損になる場合(部分呼損)があります。1人の客が1人のサーバによって扱われるとすれば、一斉に捕捉する現象は集団到着モデルで記述されます。同報呼(集団)のサーバ要求数分布(パッチサイズ分布)は運用データにより与えられていて[5]、1つの集団は平均1.68(人)の客からなっているものとします。さらに同報呼の主メモリ保留時間当りの平均到着数が8(集団)であったとします。このとき、まず集団の影響を考えずに、到着がランダムな $M/M/c/c$ を用いて設計してみましょう。ただし、呼損率 $B \leq 10^{-4}$ とします。加わる呼量は、平均サービス(主メモリ保留)時間当りの到着客数で与えられ、 $a=8 \times 1.68=13.44$ 。アランB式によると $B \leq 10^{-4}$ を満たす最小の $c=29$ 。すなわち、29個のメモリユニットを用意しておけば同報呼の呼損率は 10^{-4} 以下となります。

さて、実際は、同報呼の受付用メモリの呼損方式は全呼損で、集団的にサーバを捕捉しています。同報呼(集団)の到着間隔、メモリ保留時間が指数分布にしたがう $M^X/M/c/c$ 系を用いて計算すると $c=37$ のとき、 $B=1.33 \times 10^{-4}$ 、 $c=38$ のとき、 $B=8.49 \times 10^{-5}$ ですから、所要のメモリユニット数は $c=38$ (個)となります。

この例は実際にあった話で、当初アランの式を用いて主メモリ容量を設計したシステムが試験の結果うまく立ち上がらず、あわてて集団到着モデルを使って再設計した苦い経験がもとになっています。

以上の集団到着の例のようにランダム到着に比べ多くの設備を要求する呼はピーク呼、あるいはバースト呼と呼ばれ、通信の分野できわめて重要なものとなっています。たとえば本稿のはじめでお話しした固定迂回ルーチ

Computer Today

7月号特集/好評発売中

これがカオスだ! コンピュータがひらく新しい世界1

カオスとは何か	山口昌哉
非線形システムとコンピュータ	上田曉亮
アルゴリズムとカオス!?	小林孝次郎
脳の情報処理とカオス	津田一郎
カオスとフラクタル	徳永隆治
ストレンジアトラクター・コレクション	川上 博
カオスを聴く	松本 隆, 小室元政, L. O. Chua
数値計算とカオス	畑 政義
カオスニューラルネット	合原一幸
流れのカオス性と天気予報	住 明正

次号9月号予告

これがフラクタルだ! コンピュータがひらく新しい世界2

月刊誌

数理科学

7月号特集/好評発売中/定価960円

並列知識情報処理 並列と推論

並列推論と知識情報処理	内田俊一・瀧 和男他
並列論理型言語KL1	市吉伸行
並列推論マシンの組み立て	後藤厚宏
並列推論マシンのOSPIMOS	近山 隆
日本語の解析を並列処理する	松本裕治・杉村領一
探索問題の並列化詰め碁問題	沖 廣明・瀧 和男
これからの高レベル言語は?	相場 亮
プログラムを最適化するには	藤田 博・古川廉一
これからの知識プログラミング と並列記号処理	雨宮真人

■最新刊 好評発売中

REDUCE入門 パソコンによる数式処理活用法

広田良吾・伊藤雅明共著 A5・定価2300円

▶価格表示は税込み価格となっています。

サイエンス社

東京都千代田区神田須田町2-4 安部徳ビル
☎03(256)1091 振替 東京7-2387

ングは電話網の基本ルーチングになっています。即時系 M/M/c/c の溢れ呼はもはやランダム到着とならず、発生する時はまとまったかたまりで発生し、集団到着に近いものとなります[3]。したがって、迂回先の回線を設計する場合ランダム性を仮定すると大きな間違いを犯してしまいます。先の居酒屋の話に戻しますと、第2、第3 選択される居酒屋「H, K」では、客がくる時はどとききて、こない時には閑古鳥が鳴いているという始末の悪い結果になります。客からしてみれば、混んでいる時が多い割には、がらがらの時が多すぎるという悪印象をもつでしょう。ともかく居酒屋を経営するときは、料理でつるなり、安さでつるなりしてお客に第1 選択させることが経営の基本となるでしょう。

紙面の都合上、あまり通信・計算機システムへの応用やラッシュアワーの問題等についてご紹介できませんでした。待ち行列について関心をもたれた方は成書[6,7]とその中にある参考文献をご覧ください。

参考文献

- [1] 森村英典：“おはなしOR”日本規格協会(1983).
- [2] 鈴木武次：“待ち行列”裳華房(1972).
- [3] 藤木・雁部：“通信トラヒック理論”丸善(1980).
- [4] NTT電気通信研究所：“待ち行列数表”青山第一出版(1980).
- [5] 遠藤他：“ファクシミリ通信方式(FZCS-2)トラヒック設計”通研実報, 33, 7, pp.1473-1486 (1984).
- [6] E. Gelenbe, I. Mitrani 著, 秋丸・橋田監訳：“計算機システムの解析と設計”オーム社(1988).
- [7] G. F. Newell 著, 森村・森共訳：“待ち行列論の応用”サイエンス社(1973).