

# 多次元ARモデルによるシステム解析

石黒 真木夫

## 1. はじめに

システム解析家の工具箱に入れておいてもらいたい方法を提案しようと思う。多次元ARモデルを「分析する」ための道具である。

身もふたもない言い方をすれば、「赤池と中川 (1972) によって提案された“時系列の解析と制御のためのプログラムパッケージ TIMSAC”に含まれる MULNOS の機能を拡張して応用の範囲を広げるとともに、対話型にして使いがってを良くしたプログラム」の提案ということになる。将来の参照の際の便利のためにこれをAR-DOCKと名づけておく。「ARモデルドック」のつもりである。意味は「人間ドック」から類推されたい。

ARDOCKの特徴は、以下のとおりである。

- システムのコンポーネント間の信号経路を切断することの影響をモデル上で調べることができる。結果を見ながら対話的に切断、接続を試みることができる。
- ノイズ源相互が完全には相互に無関係でない場合にも対処できる。

2番目の主張は、MULNOSを使ったことのない読者には良くわからないかもしれないが、MULNOSを利用するに当たっての1つの障害がある程度回避できるということである。

## 2. 多次元ARモデルとノイズ寄与率

時系列モデルの使われる分野は非常に広く、工学的なデータや、自然科学の分野のデータはもちろんのこと、いわゆる文科系のデータ解析においても効果をあげている。その中でとりわけ愛用されているのがARモデルである。

### 2.1 モデルのあてはめ

多次元ARモデルは

$$x(i) = \sum_{m=1}^M A(m)x(i-m) + \varepsilon(i) \quad (1)$$

で表わされる。ここで、 $\{x(i)\}$ は $k$ 次元ベクトルの系列、 $\{A(m)\}$ は $k$ 次元係数行列である。時系列 $\{x(i)\}$ の振舞いは、次数 $M$ 、係数行列 $\{A(m) : i=1, 2, \dots, M\}$ およびノイズ系列 $\{\varepsilon(i)\}$ の分散共分散行列 $\Sigma$ などのパラメータによって決定される。

与えられたデータ $\{x(i) : i=1, 2, \dots, N\}$ が(1)式の機構で生成されると想定すると、最尤法でパラメータを推定することができる。データが十分に長い場合、 $\{A(m) : i=1, 2, \dots, M\}$ の推定値が満たすべき最尤方程式は近似的に

$$\sum_{i=1}^N x(i)x^T(i-m) = \sum_{k=1}^M A(k) \sum_{i=1}^N x(i-k)x^T(i-m) \quad m=1, 2, \dots, M \quad (2)$$

となる。ここで $(^T)$ は転置の意味である。

$\Sigma$ に関してなにも制約を置かない場合には、 $\{A(m)\}$ の推定値が定まったという条件のもとで

$$\varepsilon(i) = x(i) - \sum_{m=1}^M A(m)x(i-m) \quad (i=1, 2, \dots, N), \\ B = \sum_{i=1}^N \varepsilon(i)\varepsilon^T(i)$$

として、

$$\Sigma = \frac{1}{N} B \quad (3)$$

が最尤法による $\Sigma$ の推定値になる。

$\Sigma$ としてブロック対角型の構造、たとえば

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{pp} & \\ & \Sigma_{qq} \end{pmatrix} \quad (4)$$

を仮定すると、

$$B = \begin{pmatrix} B_{pp} & B_{pq} \\ B_{qp} & B_{qq} \end{pmatrix}$$

と $B$ を分割して得られる $\{B_{pq}\}$ を使って

$$\Sigma_{pp} = \frac{1}{N} B_{pp}, \quad \Sigma_{qq} = \frac{1}{N} B_{qq}$$

と推定されることになる。対角ブロックが一般に $L$ 個の場合にも同様である。

$\Sigma$ としてブロック対角型の構造を仮定するモデルのAICは、ブロックの個数を $L$ として

いしぐろ まきお 文部省統計数理研究所

〒106 港区南麻布4-6-7

$$AIC = \sum_{i=1}^L Nk_i \log 2\pi + N \log \det \Sigma_{ii} + Nk_i + (k_i + 1)k_i \quad (5)$$

で与えられる。

## 2.2 パワースペクトルとノイズ寄与率

多次元ARモデルのパラメータが推定できると、周波数応答関数

$$A(f) = [I - \sum_{m=1}^M A(m)e^{-i2\pi f m}]^{-1} \quad (0 \leq f \leq 0.5) \quad (6)$$

と、クロスパワースペクトル、

$$P(f) = A(f)\Sigma A^*(f) \quad (0 \leq f \leq 0.5) \quad (7)$$

がただちに計算できる。ここで  $I$  は単位行列、 $(*)$  は共役転置の意味である。

$\Sigma$  が(4)式のようなブロック構造をもっていると、(7)式から

$$P(f) = \begin{pmatrix} P_{pp}(f) & P_{pq}(f) \\ P_{qp}(f) & P_{qq}(f) \end{pmatrix}, \quad A(f) = \begin{pmatrix} A_{pp}(f) & A_{pq}(f) \\ A_{qp}(f) & A_{qq}(f) \end{pmatrix}$$

として、

$$\begin{aligned} P_{pp}(f) &= A_{pp}(f)\Sigma_{pp}A_{pp}^*(f) + A_{pq}(f)\Sigma_{qq}A_{pq}^*(f) \\ P_{qq}(f) &= A_{qp}(f)\Sigma_{pp}A_{qp}^*(f) + A_{qq}(f)\Sigma_{qq}A_{qq}^*(f) \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる。

ベクトル  $x(i)$  の第  $j$  成分のパワースペクトルは行列  $P(f)$  の  $(j, j)$  成分として推定されるが、(8)式の意味するところは、 $P_{jj}$  が、 $j$  の値によって

$$\begin{aligned} P_{jj}(f) &= [A_{pp}(f)\Sigma_{pp}A_{pp}^*(f)]_{jj} \\ &\quad + [A_{pq}(f)\Sigma_{qq}A_{pq}^*(f)]_{jj} \end{aligned}$$

あるいは

$$\begin{aligned} P_{jj}(f) &= [A_{qp}(f)\Sigma_{pp}A_{qp}^*(f)]_{jj} \\ &\quad + [A_{qq}(f)\Sigma_{qq}A_{qq}^*(f)]_{jj} \end{aligned}$$

の形に書けるということである。いずれにせよ

$$\begin{aligned} \text{パワースペクトル} &= \Sigma_{pp} \text{に由来する部分} \\ &\quad + \Sigma_{qq} \text{に由来する部分} \end{aligned}$$

の形になる。右辺の2つの項はいずれも周波数  $f$  の関数で常に正の値を取る。

$$\frac{\Sigma_{pp} \text{に由来する部分}}{\text{パワースペクトル}} \quad (9)$$

で定義される量をスペクトルに対する  $pp$  ブロックからのノイズ寄与率と名づける。 $\Sigma$  の対角ブロックの数が一般の  $L$  個であっても各ブロックからの寄与率を同じように定義することができる。

## 2.3 TIMSAC

TIMSAC パッケージに含まれているARモデルにもとづく多次元時系列解析用のプログラムとして、FPEC, MULNOS, DECONV 等がある。FPEC を使うことに

よってARモデル(1)のパラメータの推定値が得られる。MULNOSは、FPECの結果にもとづいてノイズ寄与率(9)を推定するプログラムである。ただし、MULNOSは  $\Sigma(4)$  が完全に対角型であること、つまり各雑音源が互いに独立であることを前提としている。

DECONVは、雑音源から各測定値へのインパルス応答を推定するプログラムであるが、本稿ではこれ以上触れる余裕がない。

## 2.4 ARDOCK

ARDOCKは、MULNOSに手を加えて、一般の対角型の分散共分散行列  $\Sigma(4)$  に対するノイズ寄与率(9)が推定できるように改良したプログラムである。

ARDOCKの機能を以下のように整理することができる。

### [ARDOCK の機能]

ノイズの分散共分散行列  $\Sigma$  のブロック対角化： $\Sigma$  の構造を変えたときのAIC(5)の値が計算される。 $\Sigma$  の構造が変わることによってパワースペクトルの推定値、ノイズ寄与率が変わる。AICの値が小さい場合のものが最も信頼できるはずだが、問題意識のあり方によっては、AIC最小のモデルを使えない場合もある。使用者の判断で処理しなければならない。

### マスキング操作：

1. 周波数応答関数を計算する(6)式におけるARモデルの係数行列  $\{A(m)\}$  の任意の成分を強制的に0に置くことが可能。たとえば、マスク

```
1110000
1110000
1110000
1111111
1111111
1111111
1111111
1111111
```

を  $(7 \times 7)$  係数行列  $\{A(m)\}$  にかけることによって、

$$A_{jk}(m) = 0 \quad (j=1, 2, 3, k=1, 2, 3, 4, m=1, 2, \dots, M)$$

とした場合を調べることができる。このような机上実験によって、ある信号経路を切り離れた時のシステム挙動の変化を容易に確認することができる。

2.  $\Sigma$  の任意の対角ブロックを強制的に0にできる。これによって、あるノイズ源が除去された時の効果を確認できることになる。

### パワースペクトル表示：

各変数のパワースペクトルのグラフを見ることができ。細かいことだが、対数スペクトルではなく、「生の」パワースペクトルである。ノイズ寄与はパワースペクトル

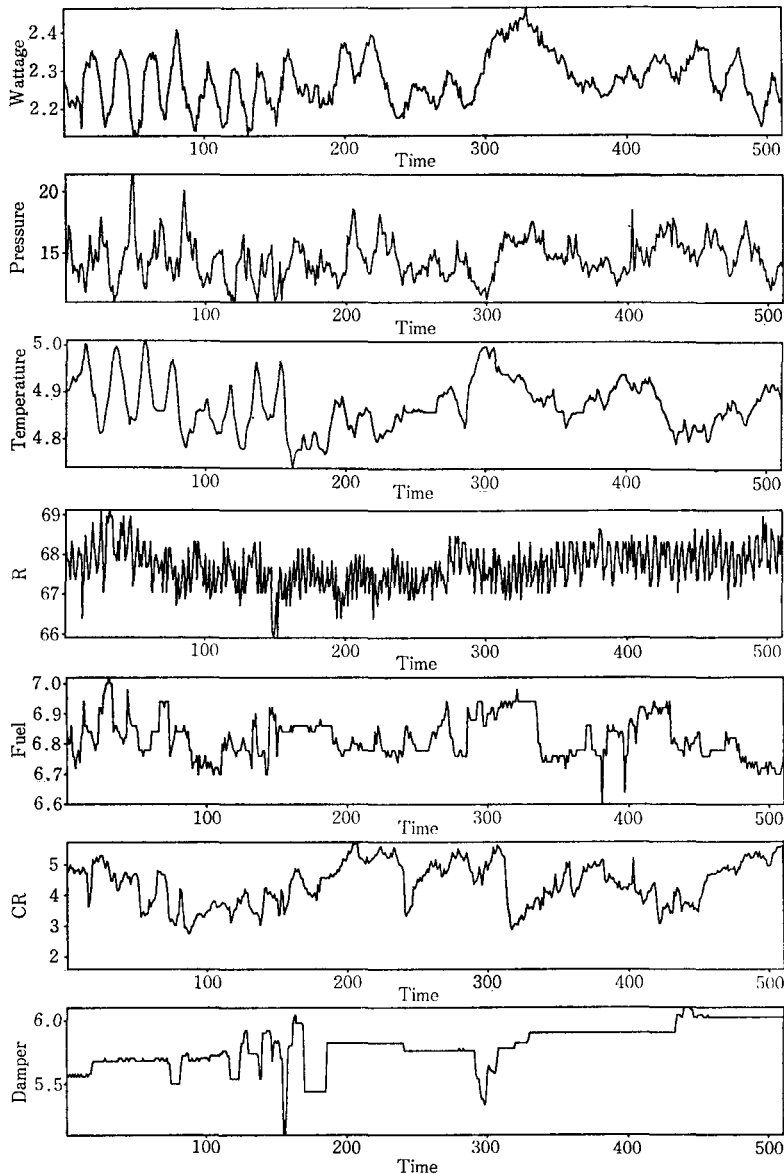


図 1 ロータリーキルンの運転記録

ルがいくつかの(正)項の和であるという見方に立つものだから、これとを並べるパワースペクトルは「生」のものであるべきなのである。グラフ表示に当っては、スケーリングを固定して、モデル操作にもなるスペクトルの形の変化だけでなく、高さの変化がすぐわかるようになっている。

### 3. 数 値 例

図1はセメントのロータリーキルンの運転記録である。長さ511, 7チャンネルである。第1変数から第3

変数までが被制御変数, つまり被制御システムであるセメントのロータリーキルンの状態を表わす変数, 残りの4変数が制御入力である。図中 Wattage などと記されている略称の意味に関しては表1にまとめておいた。なお, グラフに入れる目盛りの数値の桁数を小さくするために源データを100で割ってある。

**[MODEL 1]** ARモデルを当てはめたところ, 次数4のARモデルがAICの意味で最良のモデルとして選ばれた。ノイズ源の分散共分散行列を正規化した相関行列は表2のようなものであった。非対角項が比較的小さ

表 1 変数

変数番号	略称	内容
1	Wattage	キルン駆動所要動力
2	Pressure	クーラ下室圧力
3	Temperature	窯尻ガス温度
4	R	キルン回転速度
5	Fuel	燃料供給率
6	CR	クーラグレート速度
7	Damper	窯尻ダンパ開度

くノイズ源の間に顕著な相関は見られない。このモデルをMODEL 1と名づけよう。MODEL 1のA I Cの値は表3の第1行目に示されている25765.92であった。これより次数の高いモデルも、低いモデルもA I Cの値はこれより大きくなる。このモデルから推定される各変数のパワースペクトルのグラフを図2の1段目に示す。

パワースペクトルを見ると、第1変数から、第3変数までの被制御変数、および制御変数である第4から第7変数までのいずれをとっても、ほとんど周波数0.1以下の低周波部分にパワーが集中していることがわかる。スペクトルの構造は単純である。

[MODEL 2] このスペクトルの構成を調べるために、MODEL 1の分散共分散行列にマスク

```
1000000
0100000
0010000
0001000
0000100
0000010
0000001
```

をかけてMODEL 2を構成して調べてみる。このモデルから推定される各変数のパワースペクトルは図2の2段目に示されている。1段目の結果とほとんど変わらないなかで、第2変数のスペクトルの形の変化がマスクの影響によるものである。MODEL 2のA I Cの値は、表3の2行目の25799.14で、情報量規準の立場からは、全変数が互いに無相関と見ることに無理があることを示しているが、ここではあえてこのモデルにもとづくノイズ寄与率を図2の3段目に示す。

第1変数のスペクトルの構造を見ると、直流成分のほぼ50%が制御変数の揺らぎに起因するものの、パワーの大部分が自分自身の発生する雑音によっていることがわかる。制御変数の中では、第5変数と第7変数からの寄与が大きい。第4変数と第6変数からの寄与は小さい。

第2変数のスペクトルの構造は第1変数のものと似ている。やはりパワーの大きな部分が自分自身の発生する

表 2 相関行列

1.00	-0.15	-0.16	0.10	-0.06	0.15	-0.03
-0.15	1.00	-0.01	0.08	0.01	0.03	-0.09
-0.16	-0.01	1.00	0.04	0.09	0.02	-0.03
0.10	0.08	0.04	1.00	-0.11	0.09	-0.01
-0.06	0.01	0.09	-0.11	1.00	-0.05	-0.06
0.15	0.03	0.02	0.09	-0.05	1.00	0.04
-0.03	-0.09	-0.03	-0.01	-0.06	0.04	1.00

雑音によっている。低周波領域における第1変数と第3変数からの寄与が大きいのが目だつ。

第3変数のスペクトルの構造も第1変数のものと似ている。パワーの大きな部分が被制御変数の発生する雑音に由来するものである。直流成分における第6変数からの寄与が顕著である。

制御変数のパワースペクトルに関しては、第6変数と第7変数が比較的制御変数の雑音に応答している以外、ほとんど自分自身で閉鎖的な挙動を示しているのが印象的である。

[MODEL 3] ノイズ寄与率の定義を拡張してあるので、必ずしも7変数全部が互いに独立でない場合にもノイズ寄与率を推定することができる。制御変数のノイズと、被制御変数のノイズのあいだには相関がないが、被制御変数のノイズ相互の間に、あるいは制御変数のノイズ相互の間には相関があると想定するモデルを作ってみよう。MODEL 1の分散共分散行列にマスク

```
1110000
1110000
1110000
0001111
0001111
0001111
0001111
```

をかければよい。相関行列が3×3と4×4のブロック対角型になる。これをMODEL 3と名づける。このモデルのA I Cの値は表3の3行目に示す25776.73となる。また、全変数の間に相関有りとする最初のモデルより値が大きく、不満は残るが、全変数が完全に独立であるとする2番目のモデルに比べるとだいぶ低くなる。図3の1段目にこのモデルから推定される最初の3変数のパワ

表 3 対角ブロック型モデルのA I C

モデル	分散共分散行列のブロック構造	A I C
MODEL 1	(1-7)	25765.92
MODEL 2	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)	25799.14
MODEL 3	(1-3)(4-7)	25776.73

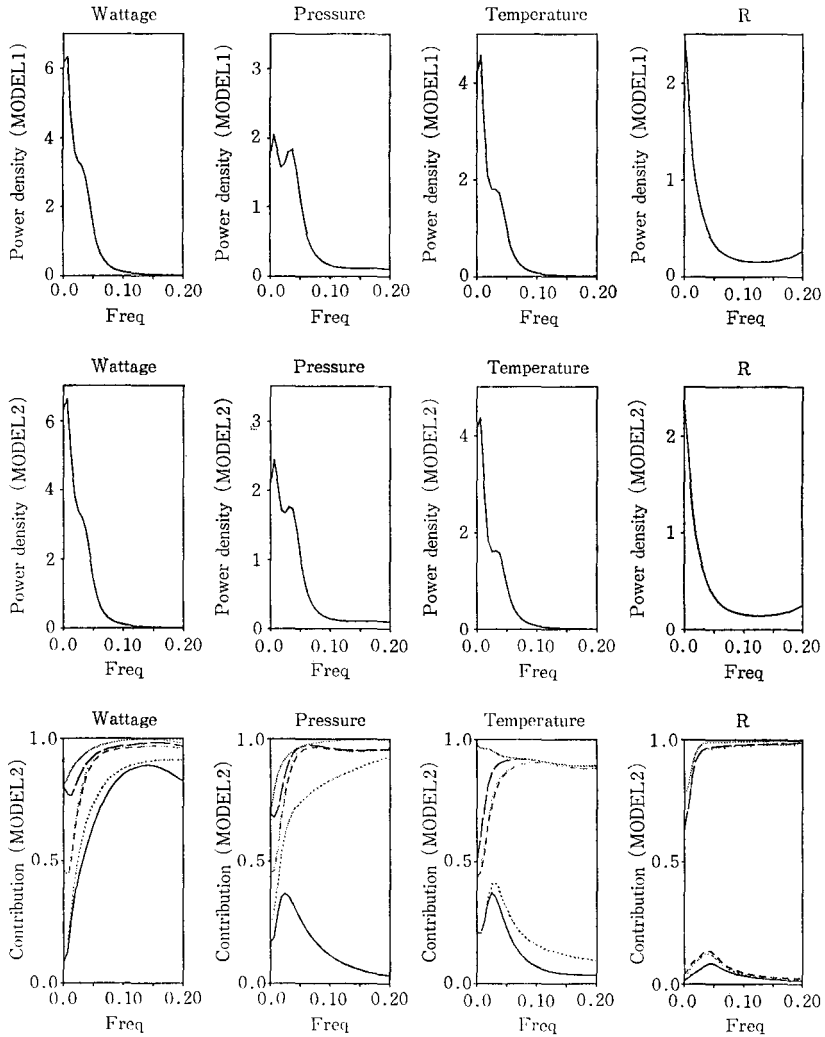


図2 各変数のパワースペクトルとノイズ寄与率

ースペクトルのグラフを示す。この場合、パワースペクトルに対する各変数のノイズからの寄与を分離して推定することはできないが、「被制御変数群」からの寄与と「制御入力群」からの寄与は分離できる。図3の2段目にこの場合のノイズ寄与率のグラフを示す。図2とは、各ノイズ源からの寄与が細かく分離されていないだけでなく、「被制御変数群」と「制御変数群」へのパワーの振り分けに関しても多少違っているはずだが、被制御変数と制御変数の間の絡み具合を見るにはこれで十分であろう。

**[MODEL 4]** 今度はこのモデルをいじってみることにしよう。まず、制御変数のノイズを0にしてみる。分散共分散行列にマスク

```

1110000
1110000
1110000
0000000
0000000
0000000
0000000

```

をかけて得られるモデルを MODEL 4 とする。このモデルから推定されるパワースペクトルを図3の上から3段目に示す。1段目のスペクトルに比べて背が低くなることがわかる。特に直流成分に近い低周波成分におけるパワーの低下がいちじるしい。実は、この結果はわかっていた。図3を見ると各パワースペクトルにおける制御ブロックからの影響の割合がわかるから、この分がなくなった時のパワースペクトルの姿は、予想できるのであ

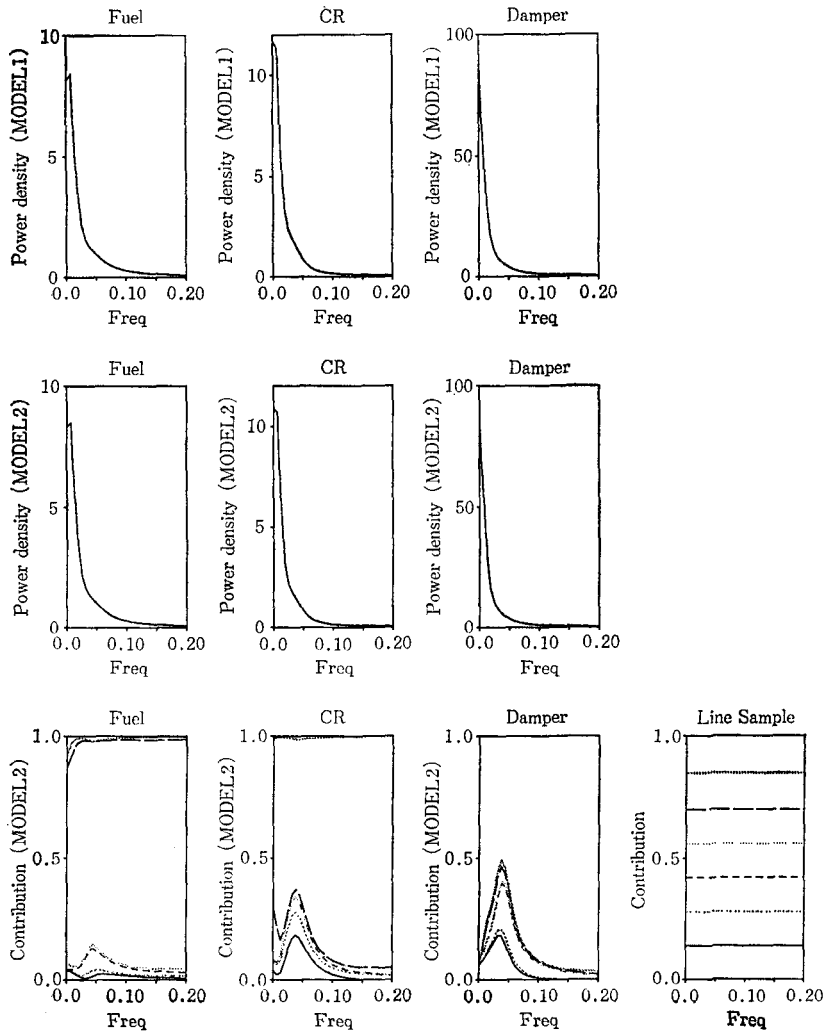


図 2 (つづき)

る。これは、制御系が出しているノイズを抑えることができれば、システム全体の揺らぎを小さくできるであろうということを示唆している。

[MODEL 5] では、図1の運転記録での制御は、有害無益と考えるべきなのだろうか？ この点をチェックするには、制御入力から被制御システムへの信号の経路を切断してみれば良い。

こんどは、分散共分散行列とAR係数行列に、それぞれ、マスク

```

1110000 1110000
1110000 1110000
1110000 1110000
0001111 1111111
0001111 1111111
0001111 1111111
0001111 1111111

```

をかければよい。このモデルを MODEL5 と名づける。このモデルにもとづくパワースペクトルの推定値を図3の4段目に示す。3段目に比べてスペクトルの背が高くなった。直流成分のごく近傍以外の周波数領域では、1段目のスペクトルより値が大きくなっている。

これらの結果から、制御が確かに有効に働いてはいるが、その代償として非常に低い周波数領域における揺らぎを持ち込んでいるらしいということがわかる。まさに、赤池らが図1のデータから読み取ったことである。これにつづく赤池らによるセメントのロータリーキルンの計算機制御の詳細に関しては参考文献を参照されたい

[MODEL 6] 最後に、被制御システムから制御入力への信号経路を切った場合のパワースペクトルとノイズ寄与率のグラフを図3の5段目と6段目に示しておく。

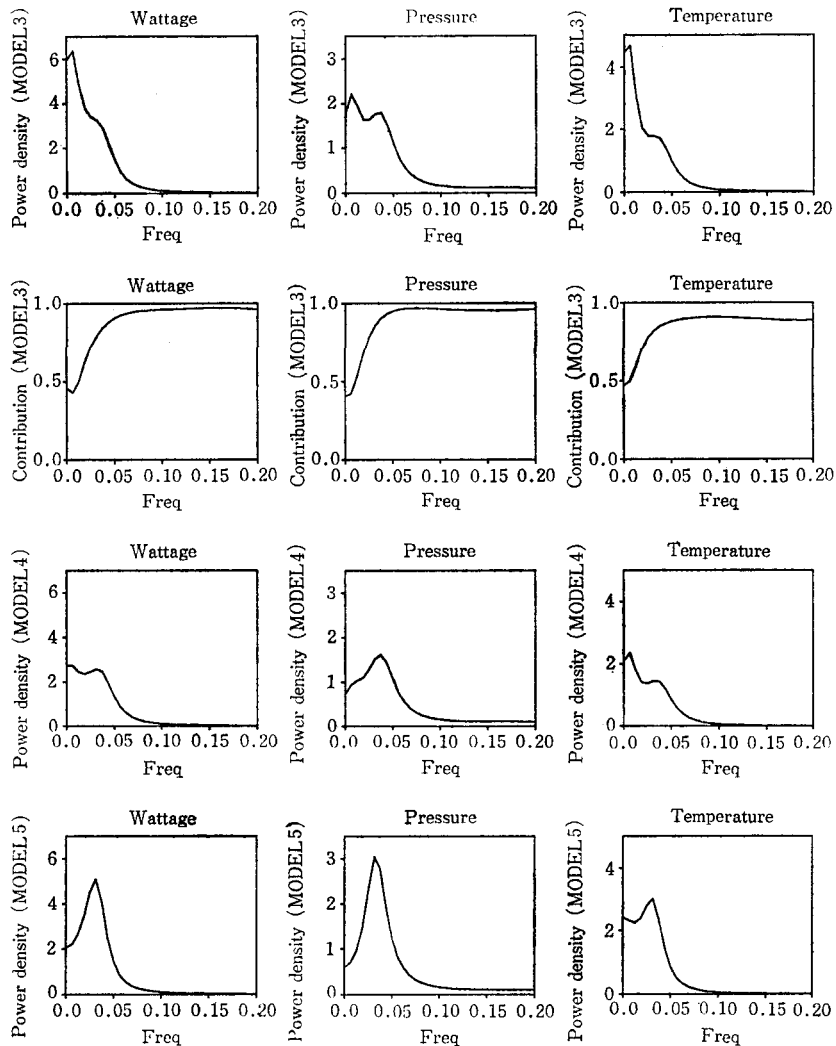


図 3 シミュレーション

分散共分散行列とAR係数行列に、それぞれ、マスク

```

1110000 1111111
1110000 1111111
1110000 1111111
0001111 0001111
0001111 0001111
0001111 0001111
0001111 0001111

```

をかけた場合である。オペレーターがシステムの状態を見ないで制御入力を操作したとすればこうなるであろうという非現実的な例である。

#### 4. 最後 に

線形システムにおけるコンポーネント間の関連を調べることが目的とするプログラム ARDOCK を紹介した。

このプログラムを使用することによって、ノイズ寄与率および、各コンポーネントの間の接続を切った場合のスペクトルの変化を見ることができる。

ある信号経路を切ったときの効果が小さければ、そこは本来切れていることが予想される。これを確認することは制約されたARモデルのあてはめを行なって、そのモデルのAICと無制約ARモデルのAICを比較することによって可能であろう。制御系を別のものに切りかえたときの効果を見るようにすることも容易だが、ここではこの点には深入りしないこととする。

このように、モデルのパラメータを変えてみた場合の結果をただちに信用するのは危険であるが、さらに深く追求していく場合の手がかりになり得ることは確かであ

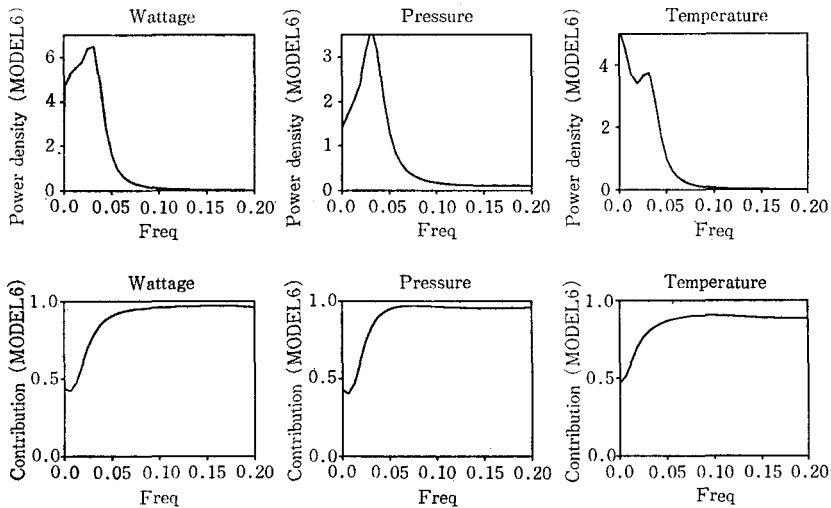


図 3 (つづき)

る。

【プログラムの公開について】汎用性のあるプログラムで使い道もあると思われるので、なるべく早い機会に何らかの形で公開することにしたいが、時間がとれるかどうかが問題である。

【謝 辞】

ここで紹介した方法については、1986年度の統計数理研究所共同利用研究集会(61・共会・18)で、ある程度発表済みである。その後の明治大学の矢多喜夫教授との「雑談」の中で刺激されて、プログラム化した部分も多い。記して感謝の意を表したい。

参 考 文 献

[1] 赤池弘次, 中川東一郎: ダイナミックシステムの統計的解析と制御, サイエンス社 (1972).

[2] 八木原彬殷(1976), セメントプロセスの制御, 数理科学, No. 153, pp.53-59.  
 [3] Otomo, T., Nakagawa, T. and Akaike, H. (1972), Statistical approach to computer control of cement rotary kilns, Automatica J. IFAC, 8, pp.35-48.  
 [4] Hagimura, S., Saitoh, T. and Yagihara, Y. (1988), Application of time series analysis and modern control theory to the cement plant., AISM, Vol. 40, No. 3, pp.419-438.  
 [5] Nakamura, H. and Toyota, Y. (1988), Statistical identification and optimal control of thermal power plants, AISM, Vol. 40, No. 1, pp.1-28.  
 [6] 尾崎 統編(1988), 時系列論, 放送大学教育振興会.

× × × × ×