実践講座

巡回セールスマン問題への招待 I

久保　幹雄

No salesman is going to worry about absolutely minimizing his mileage -but it is an interesting and an easy defined problem.

Richard Karp

(Turing Award Interview, 1985)

You don't belong here. Not at all. This is a serious book of mathematics. As far as we are concerned, you don't exist!

Preface

(The TSP, A Guided Tour of Combinatorial Optimization, 1984)

図 1: 巡回セールスマン問題ギャラリー 1: Padberg と Rinaldi によって作られたアメリカ合衆国 48 都市問題. (点をなぞって短い巡回路を探してみると、巡回セールスマン問題の難しさと面白さが実感できる!?)

1. はじめに

巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem) は、組合せ最適化問題の宝石であり、最も重要な礎でもある。また、その問題定義の簡単明瞭さによって、多くの研究者に愛されている玩具でもある。

私自身、OR を専門にしていない人に「あなたはどんな研究をしているのですか?」と聞かれたときには、「組合せ最適化」の名前を出さずに、巡回セールスマン問題を例にして説明することにしている。

まず、おもむろにポケットからペンを取り出し（私の背広のポケットには、このときのために、常に何本かのペンが常備されている）手元にある論文の裏側に、何個かの小さな丸を書き（私の鞄には、このときのために、常に読みかけの論文のコピーが何枚か入っている）点をなぞりながら、次のように説明をする (図 1 参照)。

「この丸を都市と思って下さい。ある都市を出発したセールスマンが、全ての都市を巡回して、再び出発した都市へ戻ってくるものとしましょう。このとき、セールスマンの歩く距離を最小にするような都市の巡回順序を決める問題が、巡回セールスマン問題です。私の研究は、このような問題を速く解くための方法について考えることです。」

もし、質問をした人が私の部屋にいた場合は、紙の上に書かれた私の下手な絵のかわりに、美しいコンピュータ・グラフィックスを見ることができる。私の部屋にある安物のコンピュータでさえ、数百都市の巡回セールスマン問題を数秒で (近似的に) 解くことができ、巡回路が次々と変化していく様子をアニメーションを見るように観賞できる。

本連載は、私の部屋を訪問してくれたお客様が (幸いにも!) この問題に対して興味を持ってくれて、「この分野についてもっと詳しい話をして欲しい」という顔ぶりをしていたときに、私がいつもしている解説を、紙上で再現したものである。

したがって、研究者を対象とした文献の羅列的なサーベイではなく、初学者および実務家を対象にした気軽な読み物となるように努力したつもりである。また、巡回セールスマン問題の面白さを身体で実感して

くぼ　みきお　東京商船大学　流通情報工学
〒135 東京都江東区越中島 2-1-6
e-mail: kubo@ship2.ipc.tosho-u.ac.jp

もらうために、できるだけプログラムを載せるように心がけた。

なお、より専門的な情報が必要な読者は、1984年までについては巡回セールスマン問題のみを扱った大著 [4]、それ以後については、私が2年前に書いたサーベイ [3] またはOR関連の専門誌に掲載されている論文を参照されたい。

2. なぜ巡回セールスマン問題を研究するのか

巡回セールスマン問題は、忙しいセールスマンのためだけに研究をされている訳ではない。巡回セールスマン問題は、実務における重要な応用をたくさん持っている。その応用は、数百点(都市)を扱う基盤配線、配送計画、スケジューリング、数万点を扱う基盤穿孔、X線による結晶実験、タンパク質の構造解析、数百万点を扱うVLSI設計などさまざまである。また、次世代のVLSI設計においては、数千万点の問題を解く必要があると言われている。これらの応用に対して、巡回セールスマン問題を効率的に解くアルゴリズムを適用することによって、各々の分野で大幅な費用削減または時間の短縮が可能になるのである。

また、組合せ最適化問題に対する解法または研究分野は、そのほとんどが、巡回セールスマン問題に対するアルゴリズム開発から生まれた。例えば、ヒューリスティックスの確率的解析、ローカルサーチ、ラグランジュ双対法、分枝限定法、分枝カット法などは、まず、巡回セールスマン問題に対して適用され、それから、他の問題に対して拡張されたという歴史を持つ。すなわち、巡回セールスマン問題を勉強するだけで、組合せ最適化に関するほとんどの解法が、マスターできるのである。

おそらく、今後も組合せ最適化問題に対する解法のほとんどが、まず巡回セールスマン問題で評価され、それから他の問題に対して拡張されていくだろう。

私の説明だけでは説得力がないので、1985年度のTuring賞の授賞者であるRichard Karpの言葉を引用しよう。

> *Everyone knows that the traveling salesman problem is a metophor or a mith. So you take cleaner formulations, study them as closely as possible, go deeply into their structures, and hope that results will transfer over to the real problems.*
> (Turing Award Interview, 1985)

3. 問題の定義と種類

まず、巡回セールスマン問題の正確な定義を2つあげておこう。

(巡回セールスマン問題: グラフを用いた定義)
グラフ $G=(V,E)$, 枝上の距離(重み, 費用)関数 $d: E\rightarrow\Re$ が与えられたとき、全ての点集合 V をちょうど1回ずつ経由する巡回路(Hamilton閉路)で、枝上の距離の合計(巡回路の長さ)を最小にするものを求めよ。

(巡回セールスマン問題: 順列を用いた定義)
$n\times n$ の行列 $[d_{ij}]$ が与えられたとき、$V=\{1,2,\cdots,n\}$ から V 上への1対1写像(順列) ρ で

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_{\rho(i),\rho(i+1)} + d_{\rho(n),\rho(1)}$$

を最小にするものを求めよ。

巡回セールスマン問題(Traveling Salesman Problem)は、TSP(ティー・エス・ピーと発音する)と略して呼ばれることが多い。しばしば、「TSP問題」と書いてある本も見かけるが(略すとTSP^2 !)、略すのなら「問題TSP」または単に"TSP"と書くべきであろう。ここでは、略さずに「巡回セールスマン問題」と記すことにする。

与えられたグラフが無向で、2点 i,j 間の距離が行きも帰りも同じ($d_{ij}=d_{ji}$を満たす)問題を、対称巡回セールスマン問題と呼ぶ。また、グラフが有向で対称性が常に成り立たない問題を非対称巡回セールスマン問題と呼ぶ。

「対称と非対称の巡回セールスマン問題では、どちらが難しいでしょうか?」という質問をされたら、誰もが、「非対称の方が一般的であるので難しい」と答えるだろう。しかし、ランダムに作られた巡回セールスマン問題においては、非対称巡回セールスマン問題は、対称巡回セールスマン問題に比べて、はるかに解きやすいことが知られている。

数値実験でしばしば用いられる、ランダムに作られた非対称問題とは、2点 i,j 間の距離 d_{ij} を [1, 10000] の一様乱数で生成したものである。このような問題に対しては、割当問題を緩和問題にした分枝限定法によって、50万都市の問題まで解かれている [5]。

余談だが、この解法は、Wall Street Journal (February 15, 1991) に "Mathematicians Find New Key to

Old Puzzle"という題目で紹介されたが、内容的には誇張と間違いが多く、OR/MS Today, p.8 (April, 1991)に、"The Wall Street Journal article does more harm than good. I suggest that ORSA and TIMS aggressively make it their business to keep the popular press apprised of, and knowlegeable about, current development in OR and MS" と批判されている。同様のことが日本のマスコミについても言える。巡回セールスマン問題に限らず、ORに関連することが新聞などの記事になることは喜ばしいことであるが、誇大表現や根拠のない出鱈目な内容については、正しい情報を流すように勧告する必要があると思われる。

上で述べた巡回セールスマン問題の一般型の他に、実務上重要な特殊型に対する研究も詳細に行われている。

まず始めに、三角不等式を満たす巡回セールスマン問題を考えよう。この問題においては、距離行列が、全てのi, j, kに対して$d_{ij} + d_{jk} \leq d_{ik}$を満たす。現実問題においては、同じ点を何回も経由しても構わない場合が多いが、あらかじめ全ての2点間の最短距離を計算することによって、三角不等式を満たす巡回セールスマン問題に帰着される。

三角不等式を満たす対称巡回セールスマン問題の重要な特殊型として、点が2次元平面上にある場合がある。この場合は、2点の間の距離を入力とするかわりに、点のx座標とy座標を入力とする。点の間の距離を計算する方法によって名称は変わるが、特に2点間のユークリッド距離をとる場合をユークリッド巡回セールスマン問題と呼ぶ。ユークリッド距離は無理数になることがあるので、通常は整数値に切り上げを行うことによって理論的な困難さを解決している。

Gerhard Reineltによって収集されたTSPLIB (巡回セールスマン問題の問題および解答集) においては、次のような関数Dis()を用いることで統一している。(以下、プログラムはC言語で記述するものとする。)

```
int Dis(int i, int j)
{ float xd, yd;
  xd = x[i] -x[j]; yd = y[i] -y[j];
  return  (int) (sqrt( xd*xd + yd*yd) + 0.5 );
}
```

TSPLIBの最新版は、NETLIBおよびRice大学で管理されているが、日本国内にも京都大学(ftp.kuis.kyoto-u.ac.jp) や千葉大学 (ftp.ipc.chiba-u.ac.jp) などにミラーされているので、興味のある方は、そちらから入手すると良いであろう。また、ftp(ファイル転送プログラム) が使えない場合は、softlib@rice.eduに"send README" を含んだ電子メールを出すことによって、TSPLIBを得る方法について知ることができる。

4. 歴史

巡回セールスマン問題の名前の起源は定かではないが、1940年代後半のRAND社において、Merrill Floodが知的挑戦のプロジェクトとして取りあげたのが、おそらく最初であるというのが定説になっている。実は、それよりはるか前に2人の偉大な数学者によって、この問題の原型が研究されていた。

18世紀を代表する多作の数学者Leonhard Euler (1707–1783)は、1759年に8×8のチェス盤の全ての升目を1回ずつ通るナイトの駒(8方向に移動可能な将棋の桂馬) の巡回順を捜す問題を考えていた。Eulerはグラフ理論の原点になったKönigsbergの橋の問題で有名である。この問題は、全ての橋をちょうど1回ずつ通って出発点に帰ってくる道順をみつける(言い替えれば、グラフの全ての枝をちょうど1回通過する閉路を求める) 問題であり、この性質を満たす閉路はEulerにちなんで現在ではEuler閉路と呼ばれている。Eulerが示したグラフ理論における最初の定理「Euler閉路が存在する ⇔ 点の次数(点に接続している枝の本数)が全て偶数」は、あまりにも有名である(§7で、この結果を用いた巡回セールスマン問題の近似解法を紹介する)。

一方、物理学におけるハミルトンの原理や4元数の発明で知られるWilliam Hamilton卿(1805–1865)は、晩年の研究の1つであるIcosian Calculus ("Icosian"は20を表すギリシア語) に付随して、巡回セールスマン問題の原型になる以下のようなゲームを発明した。

ゲームの目的は、正12面体(頂点の数は20) を上から押しつぶしたグラフ内の全ての点をちょうど1回ずつ通過して、出発した点に戻ることである(図2参照)。与えられた無向グラフに対して、上の性質を満たす閉路は、Hamilton卿の名前にちなんで、現在ではHamilton閉路と呼ばれている。

巡回セールスマン問題は、グラフの枝上に距離(費用、重み) が付随したとき、最小距離のHamilton閉路を求める問題であると考えられる。$n \times n$のチェス盤上でのナイトの巡回問題も、結局、n^2個の点を持つあるグラフ上で、Hamilton閉路を見つける問題に帰着される。

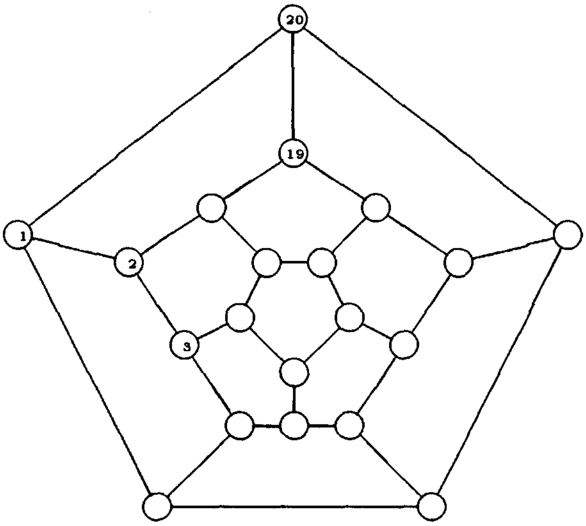

図 2: Icosian Game: 残りの数字 (4 から 18) を隣合う点に連続する数字がくるように入れる。2人で遊ぶときは、1人が幾つかの数字を丸の中に入れ、もう1人が残りの数字を入れ閉路を完成させる。

1950年代の巡回セールスマン問題の萌芽期において、線形計画法の生みの親である George Dantzig は、当時所属していた RAND 社において、Raymond Fulkerson と Selmer Johnson とともに、線形計画法のパワーを利用して、アメリカ合衆国の主要49都市を巡回する最短路を算出した。この方法は、巡回セールスマン問題のある緩和問題から出発して、(当時は手作業で) 破られている制約式を追加していき、緩和問題の定式化を強めていくことによって最適解を得ようというものである。驚くべきことに、現在、対称巡回セールスマン問題に対する最も有効な最適化手法である分枝カット法は、この巡回セールスマン問題の古典ともいうべき論文で用いられた方法を精密化したものであり、都市数4461の問題を解くことが可能なレベルにまで達してる。

Dantzig らの論文によって、巡回セールスマン問題が研究の一分野として市民権を得た頃、当時 IBM に所属していた Michael Held と Richard Karp は、動的計画法を用いた解法を考えたが、残念ながら16都市程度までしか実用的な時間では解くことができなかった。その後、彼らは巡回セールスマン問題の世界チャンピオンになることを目指し、試行錯誤の末に、分枝限定法を基礎とし下界算出に最小1木と呼ばれる巡回

図 3: 巡回セールスマン問題ギャラリー 2: 現在のユークリッド巡回セールスマン問題の世界記録 4461 都市問題. この問題の最適解は 1993 年に Cook, Applegate, Chvátal, Bixby によって求められた.

セールスマン問題の緩和問題を用いた解法を作成し、都市数65の問題を解くことに成功した。その結果を得たときの感動を Karp は、次のように述べている。

> *I don't think any of my theoretical results have provided as great a thrill as the sight of the numbers pouring out of the computer on the night Held and I (Karp) first tested our bounding method.*

Held と Karp が、世界チャンピオンの称号を得た後で、この解法がラグランジュ緩和法と呼ばれる古典的解法の適用であり、また、旧ソビエトで活発に研究されていた劣勾配法 (subgradient method) と呼ばれる微分不可能関数の最適化手法の再発見であることが分かった。現在でも Held と Karp の方法は、メモリをほとんど必要としないという利点から、大規模問題の下界算出法として有効に用いられている。

線形計画法の成功に伴って、1960年代後半までに幾つかの組合せ最適化問題に対する良い (多項式時間で終了する) アルゴリズムが開発された。一方では、巡回セールスマン問題のように良いアルゴリズムがどうしても見つからない問題のクラスがあることが経験的に分かってきた。どうやら難しい問題は似たような性質を持っていて、1つのクラスとして扱った方が良いのではないかという認識がでてきた1970年代前半に Stephan Cook の画期的な定理が出された。(Cook はこの業績によって 1982 年度の Turing 賞を授

賞している。) この定理の詳細については、§5で詳しく述べるが、簡単に言うとCookは、$\mathcal{NP}$という問題のクラスを定義し(クラス$\mathcal{NP}$の名付け親はKarpである)、充足可能性問題(Satisfiability Problem)がそのクラスの中で完全であることを示した。面白いことに、Cookとは独立に、当時旧ソビエトにいたLeonid Levinは平面内の有限領域をタイルで敷き詰める問題がCookが示したものと類似のクラスで完全であることを示していた。

ちょうど同じ頃、23個の未解決問題の提示で有名な今世紀最大の数学者David Hilbert (1862–1943)によって1900年に出されて以来、70年間未解決であったHilbertの第10問題(Diophantine等式の整数解を求める問題)が、Yu Matiyasevičによって解決された。Matiyasevičが示したことはHilbertの第10問題をサブルーチンとして使うことによって、計算機の停止問題(Halting Problem)が解けることである。停止問題は1936年にAlan Turing[†]によって決定不能であることが対角化論法を使って示されていた。したがって、Matiyasevičの結果から、Hilbertの第10問題も停止問題と同じように決定不能であることが分かり、Hilbertの第10問題は否定的に解決されたのである。

これらの結果の重要性に真っ先に気づいたのは、当時California大学のBerkley校に移っていたKarpである。Karpは、Cookが$\mathcal{NP}$-完全であることを示した充足可能性問題が、巡回セールスマン問題をサブルーチンとして使うことによって多項式時間で解くことができることを示した。これは、MatiyasevičがHilbertの第10問題を解いた思想と同じであり、巡回セールスマン問題に対して多項式時間の解法がありそうにないことを示すものである。Karpは巡回セールスマン(決定)問題を含む21個の$\mathcal{NP}$-完全問題を示し、$\mathcal{NP}$-完全の理論の土台を築いた業績によって1985年度のTuring賞を授賞した。

Karpの論文と同時期に、AT & TのShen LinとBrian Kernighanは、最適性の保証はないが、大規模な問題を効率良く解くためのアルゴリズムを作成した。Kernighanは、C言語に関する初めての解説書"The C Programing Language"の作者の1人として、また便利な小言語AWK (AWKの"K"の字はKernighanの頭文字)の製作者として有名である。彼らの方法は、古典的な逐次改善法(ローカルサーチ)を精密化したものであり、現在にいたる20年以上の間、最も優れた近似解法の1つとして、他の解法の追従を許していない。

AT & TのDavid Johnsonらのグループの都市数1万までの系統的な数値実験によると、HeldとKarpの方法で得られる下界と、LinとKernighan法を繰り返し用いる方法で得られる上界との差は、最適解の2%程度であることが示されている。

$\mathcal{NP}$-完全の理論が定着し、その猛威をふるっている1970年代の半ばに、Karpは$\mathcal{NP}$-完全(困難)問題にどのように対処していくかを考えていた。その頃主流になっていたのは、性能の保証を持った近似解法の開発であった。三角不等式を満たす対称巡回セールスマン問題に対する最も良い保証を持ったアルゴリズムは、Imperial College of Science & TechnologyのNicos Christofidesによって作られたもので、最短巡回路長の1.5倍以下の解を算出するという保証を持つ。しかし、Karpはこのアプローチに満足していなかった。最悪の場合でも50%増しの答が得られるという結果が、どれだけ現実問題に対して意味を持つというのだろうか! しかし、この近似解法の性能保証を50%よりも小さくするような近似解法は、そう簡単には見つかりそうもない(実は現在でもまだ見つかっていない)。

Karpは従来のパラダイムから離れ、問題の入力として単純な確率分布を考えて、その平均的な挙動を解析する確率的解析(probabilisitc analysis)と呼ばれるアプローチをとった。例えば、ユークリッド巡回セールスマン問題に対しては、平面(または空間)内に点が一様かつ独立に分布しているものと考えるのである。Karpはこの仮定の下で、点の数nが大きくなっていったときに、最短巡回路長との相対誤差が0に収束していくような近似解法を開発した。この結果は、1959年に証明されたBHH定理(BHHはBeardwood, Halton, Hammersleyの頭文字)を基礎としている。

この定理は簡単に言うと「面積Aの正方領域にランダムにばらまかれた点に対する最短巡回路長は$\beta\sqrt{An}$に収束する」ということである。βはDavid Johnsonの推定によると約0.72だそうである(昔は0.765と言われていたが、少し小さくなった)。この結果は、実際問題を解くときのFirst Cutとしても威力を発揮する。例えば、「面積が100 km^2の街に100個の需要点があったとする。このとき時速20 kmの配送車

[†]Turing機械やTuring Testなどに名前を残すイギリスの数学者. 趣味はマラソン. 計算機科学者にとって最も権威ある賞は彼の名前を冠している. この賞の第1回の授賞者であるAlan Perlisは、Turingを"His work captured the imagination and mobilized the thoughts of a generation of scientists"と評している.

が1台で回るには何時間かかるか?」という問題を考える。BHH定理を使えば答は簡単に算出でき、積み込み積み降し時間を除けば$0.72\sqrt{100 \times 100} \div 20 = 3.6$時間である。

このように、巡回セールスマン問題の研究の歴史は、古くからある方法や理論を見直し、さらに新しいアイディアを入れていくことが、新しい理論を構築するために重要であることを教えてくれる。Isaac Newtonが言うように、我々は「巨人の肩に乗っているから遠くが見える」のである。

5. $\mathcal{NP}$-完全性の壁

多くの優秀な研究者が、長年の間、巡回セールスマン問題に対する多項式時間の最適解法を探し続けてきたが、未だに見つかっていない。おそらく、そのようなアルゴリズムは存在しないだろうというのが、大方の研究者の統一した見解である。このことを理論的に裏付けするために生まれたのが、$\mathcal{NP}$-完全という概念である。ここでは、Turing機械などの基礎的な用語については触れないが([4]の§3または[1]参照)、用語の混用が見受けられる$\mathcal{NP}$-完全(complete)と$\mathcal{NP}$-困難(hard)を中心に解説する。

まず、$\mathcal{NP}$-完全の定義に入る前に、クラス$\mathcal{NP}$について説明する必要がある。クラス$\mathcal{NP}$とは、$\mathcal{N}$ondeterministic $\mathcal{P}$olynomialの略であり、簡単に言うと勘の良い計算機(正確に言うと非決定性Turing機械)ならば多項式時間で解くことができる決定問題(yes, noで答えられる問題)の集まりである。ここで言う「勘の良い計算機」を使うことによって、Hamilton閉路問題は以下のように解ける。まず、任意の始点から出発する。次にどの点を訪問すれば正しい答が得られるかは、勘に頼って決める。しかし、この勘は全く外れることがなく、もしグラフがHamilton閉路を含むならば、かならずn回の試行で始点に帰ってくることができる。次の点を決める操作は単位時間で可能であるので、この場合の計算量は多項式時間である。よって、Hamilton閉路問題はクラス$\mathcal{NP}$に含まれる。

また、クラス$\mathcal{NP}$は次のようにも定義できる。決定問題がyesであるための証拠(certificate)を与えたときに、その問題が本当にyesであるかを多項式時間で確かめることができるとき、その決定問題は$\mathcal{NP}$に含まれていると言う。例えば、Hamilton閉路問題における証拠は、Hamilton閉路そのものである。与えられたグラフがHamilton閉路を持つことの確認は、

図4: 巡回セールスマン問題ギャラリー3: PadbergとRinaldiによって作られたアメリカ合衆国532都市問題. 最適解は1987年にPadbergとRinaldiによって求められた.

そのHamilton閉路が与えられたグラフの部分グラフであることを調べれば良く、これは明らかに多項式時間でできる。よって、Hamilton閉路問題は$\mathcal{NP}$に含まれる。

計算量の理論では、いたずらをした子供が、「僕だけじゃなくて、みんなでやったんだよ」と言い訳をするように、巧妙に難しさの裏付けをする。この理論(Cookの定理: §4参照)が示すことは、ある問題に多項式時間のアルゴリズムが存在しないと言うことではなく、もし、その問題が多項式時間で解けるなら、クラス$\mathcal{NP}$に含まれる全ての問題が多項式時間で解けてしまうということである。

問題Bを単位時間で実行できるサブルーチンとして用いて問題Aが多項式時間で解けるとき、AはBに多項式時間帰着可能(polynomial-time reducible)であると言う。また、AとBが決定問題であり、かつBをサブルーチンとして1回しか使わないとき、多項式時間変換可能(polynomial-time transformable)であると言う。

上の概念を用いてクラス$\mathcal{NP}$のもう1つの定義が可能である。充足可能性問題に多項式時間変換可能な決定問題のクラスを$\mathcal{NP}$と呼ぶ。再びHamilton閉路問題を例にとって説明しよう。ここでは、充足可能性問題の替わりに、よりポピュラーな整数計画(決定)問題を使うことにしよう(本質的には、どんな$\mathcal{NP}$-完全問題を使ってもかわまない)。いま、変数x_{ik}を点iをk番目に通過したときに1、それ以外のときは0を表

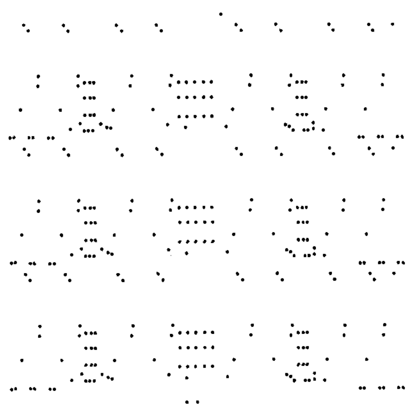

図 5: 巡回セールスマン問題ギャラリー 4: Lin と Kernighan によって作られた318都市問題. この問題は基盤穿孔の応用から生まれた. 最適解は1980年に Crowder と Padberg によって求められた.

す整数変数とする(なお、$x_{i,n+1}$ は $x_{i,1}$と同じものとする)。グラフ $G=(V,E)$ 上で定義されたHamilton閉路問題は、以下のような整数計画問題がyesの答を返すとき、またそのときに限ってyesの答を返す。

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1 \quad k = 1, \cdots, n$$

$$x_{ik} + x_{j,k+1} \leq \begin{cases} 2 & (i,j) \in E \\ 1 & (i,j) \notin E \end{cases} \qquad i,j,k = 1, \cdots, n$$

上の整数計画問題の大きさは多項式オーダーであるので、整数計画問題のサブルーチンを1回使ってHamilton閉路問題を多項式時間で解くことができる。よって、Hamilton閉路問題は$\mathcal{NP}$に含まれる。

さて、いよいよ$\mathcal{NP}$-完全および$\mathcal{NP}$-困難の定義に入ろう。$A \in \mathcal{NP}$で、かつ全ての$\mathcal{NP}$内の問題がAに多項式時間変換可能なとき、決定問題Aは$\mathcal{NP}$-完全であると言う。一方、全ての$\mathcal{NP}$内の問題がAに多項式時間帰着可能なとき、Aは$\mathcal{NP}$-困難であると言う。

したがって、巡回セールスマン問題(とその特殊型)は、決定問題ではないので$\mathcal{NP}$-困難である。また、クラス$\mathcal{NP}$に含まれる決定問題が、ある$\mathcal{NP}$-完全問題から多項式時間帰着可能でも、多項式時間変換可能でなければ$\mathcal{NP}$-完全とは言えないのである。

もちろん、$\mathcal{NP}$-完全問題は、$\mathcal{NP}$-困難でもあるので、安全のためには、理解できない読者は、$\mathcal{NP}$-困難(難しい問題)と呼んでいた方が無難である。

組合せ最適化問題が$\mathcal{NP}$-困難であることは、最悪の場合の計算量が、おそらく指数オーダーになるとことを意味し、ランダムに作成した問題や、実務で発生する標準的な問題に対して、平均的に速い解法が存在しないことを保証している訳ではない。最近、話題になっている種々の新(?)ヒューリスティック解法を評価するときに、巡回セールスマン問題が$\mathcal{NP}$-困難であるという理由だけで、おもちゃ問題(toy problem)に対する数値実験しか行わないことは、大規模問題を解いたときの喜びを知るものとしては、悲しいことである。

AT & Tの巡回セールスマン問題に対する実験的解析の大御所David Johnsonは、Nature誌に相次いで掲載された巡回セールスマン問題に対する新(?)解法に対して、同様の批判をしている[2]。Johnsonの言葉を今回の締めにしよう。

> *The TSP is an intriguing problem, and those of us who have been working on it for years welcome its new-found popularity and the consequent influx of new idea and approaches. I hope that in future, however, the evaluation of these new approaches will more fully take into account the strong competition provided by techniques already in use.*

参考文献

[1] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, 1979.

[2] D. S. Johnson. More approaches to the traveling salesman guide. *Nature*, 330:525, 1987.

[3] M. Kubo and H. Kasugai. On the traveling salesman problem. 第*3*回*RAMP*シンポジウム, pages 33–42, 1991.

[4] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and D. B. Shmoys, editors. *The Traveling Salesman Problem.* John Wiley and Sons, 1985.

[5] D. L. Miller and J. F. Pekny. Exact solution of large asymmetric traveling salesman problem. *Science*, 251:754–761, 1991.