Linear Time Algorithms for Convex Programming

吉羽 要直

（東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻 現所属：日本銀行）

指導教官 伏見 正則 教授

1．はじめに

本論文の主な目的は，n個の制約を持つさまざまな凸計画問題に対して，nに関し線形時間の計算量を持つアルゴリズムを構成することである．ここでは2種類の線形時間アルゴリズムを扱う．1つは最悪の計算量がnに関し線形となるアルゴリズムであり，もう1つは，アルゴリズムの中に乱数を発生させるステップを含むランダマイズドアルゴリズムであり，その中でも特にnに関し線形の期待計算量を持つものを考える．n制約，d変数の線形計画問題をLP (n, d) と略記することにする．

2．最小包囲球問題と最小ノルム点問題

d次元ユークリッド空間$\boldsymbol{R}^d$上にn個の母点$p_i(i=1, 2, \cdots, n)$が与えられた時，そのn個の母点を含む半径最小の球を求める問題を「母点数n，次元dの最小包囲球問題」(SEB (d, P_n)) といい，xとzを変数として次のように定式化できる．

$$\mathrm{SEB}\ (d, P_n)\ \begin{cases}\text{minimize}\ z,\\ \text{subject to}\ \|x-p_k\|^2 \leq z\ (k=1, \cdots, n).\end{cases} \tag{1}$$

一方，$\boldsymbol{R}^d$上にn個の母点が与えられた時，そのn個の母点のなす凸包の中で原点からのユークリッド距離が最小になる点を求める問題を「母点数n，次元dの最小ノルム点問題」(MNP (d, P_n)) と呼ぶ．

これら2つの問題に対し，母点数nに関して期待線形時間の計算量を持つアルゴリズムをLPに対するSeidel [3] の線形時間アルゴリズムをもとに構成する [7]．まず，母点$[p_1, \cdots, p_n]$をランダムに並べ換えておく．

まず最小包囲球問題を考える．p_1, p_2だけに注目した最小包囲球Bを作る．p_k $(k=3, \cdots, n)$ を加えていき，$p_k \notin B$ならば，固定点p_kを通り$p_i(i=1, \cdots, k-1)$を囲む最小半径の球を求めBとする過程を反復する．最終過程ではBは求めたかった最小包囲球になる．

次に最小ノルム点問題を考える．原点と母点群とを分ける分離平面がなければ原点が最小ノルム点である．そこで分離平面があったとすると，最小ノルム点は原点から最も遠い分離平面への垂線の足になっていることがわかる．したがって最遠分離平面を求めればよい．ところが，次のことが示せる．

定理 2.1 最遠分離超平面問題は，原点を中心とした反転で，原点を通る最小包囲球問題に帰着する．

以上より，固定点を通る最小包囲球問題を解く手続きさえ構成できれば，最小包囲球問題も最小ノルム点問題も解く手続きを構成できることがわかる．そこでこの手続きを構成する．その前に少し問題のクラスを拡張しておく．仮想的に $(d+1)$ 次元空間を考え，その中のd次元超平面に注目していると考える．各母点p_iは，この超平面上にあるのではなく，「下駄」h_iの分だけ浮いているところに位置していると考える．これにより仮想的には $(d+1)$ 次元であるが，d次元超平面上だけで考えることができる（ただ，下駄を考慮する必要がある）．このような問題をd次元下駄つき1点固定最小包囲球問題 (GOPF) と呼ぶ．GOPFも，普通の最小包囲球問題と同様に，注目する母点群を増やしていき，その母点群の最小包囲球を更新していくというアルゴリズムで解いてみる．現在得られている球の外に新たに注目する母点があれば，その母点は周上にあるので下駄つき2点固定最小包囲球問題になる．ところが定理2.2よりこの問題は次元が1つ下がったGOPFになることがわかる．次元を下げるときには，下駄を増やしていくだけで済む．ここがポイントである．アルゴリズムの詳細は本論文に疑似コードを使って示されている．

 © 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

定理 2.2 ($l+1$)制約，d次元の2点固定下駄付き最小包囲球問題は，l制約，($d-1$)次元の1点固定下駄付き最小包囲球問題に変換できる．

さて，これらのアルゴリズムの期待計算量を評価する．SEB(d, P_n)，MNP(d, P_n)，「$l+1$制約，d次元のGOPF」を解くのに要する期待計算量をそれぞれ$T(n, d)$，$\overline{T}(n, d)$，$S(l, d)$とする．あらかじめ母点を並べ換えておいたことから，次の漸化不等式が成立することがわかる．

$$T(n, d) \leq T(n-1, d) + O(d) + \frac{d+1}{n} S(n-1, d),$$
$$\overline{T}(n, d) \leq O(n, d) + S(n, d),$$
$$S(l, d) \leq S(l-1, d) + O(d) + \frac{d}{l}\{O(ld) + S(l-1, d-1)\}.$$

これから，適当な境界条件のもとで，数学的帰納法により次の定理が成立することが示せる．

定理 2.3 これらのアルゴリズムは，SEB(d, P_n)，MNP(d, P_n)をそれぞれ$O(n(d+1)(d+1)!)$，$O(ndd!)$の期待計算量で計算する．

3．凸2次計画問題に対する線形時間アルゴリズム

n制約，d変数の凸2次計画問題をCQP(n, d)と略記する．

式(1)のように定式化される最小包囲球問題は，新たに$y = \|x\|^2 - z$という変数を導入すると

$$\begin{cases} \text{minimize} & \|x\|^2 - y, \\ \text{subject to} & -2p_k x + y \leq -\|p_k\|^2 \ (k = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

のようにCQP$(n, d+1)$に変形できる．

第2節で最小ノルム点問題は最遠分離平面問題に帰着できることを述べた．分離平面を$ux = 1$とすると，原点からこの分離平面までユークリッドノルムが$\frac{1}{\|u\|}$となることから，最遠分離平面問題は，

$$\begin{cases} \text{minimize} & \|u\|^2, \\ \text{subject to} & up_i \geq 1 \ (i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

と定式化でき，CQP(n, d)になることがわかる．したがって，CQP(n, d)に対してnに関し最悪でも線形の計算量を持つアルゴリズムを構成すれば，最小包囲球問題に対しても最小ノルム点問題に対しても，母点数nに関し最悪でも線形の計算量を持つアルゴリズムを構成できる．そこで，Dyer [2] のLPに対する線形時間アルゴリズムをもとに，CQPに対してこのようなアルゴリズムを構成する．

解くべきCQP(n, d)の最適解をx^*とする．アフィン関数$h(x) = ax + b$に対する符合とは，$h(x^*)$の符合であるとする．また，k個のr変数アフィン関数$h_i(x) = a_i x + b_i$ ($i = 1, \cdots, k$)に対し，そのうちの少なくとも$k/2$個の符合を定める手続きMS(k, r)と，任意のアフィン関数hに対しその符合を返す手続きORACLEを導入する．

CQP(n, d)に手続きMS$(\frac{n}{2}, d)$を適用すると，実は不必要だった制約を少なくとも$\frac{n}{6}$個除ける．場合によっては，変数の数dも減らせる．そこで，再帰的にCQP$(\frac{5n}{6}, d')$ ($d' \leq d$)を解く．最終的には，制約は1個以下になって，$O(d^3)$で解ける．手続きMS(k, d)は手続きORACLEを$9^{(d-1)}$回使うと構成でき，手続きORACLEは($d-1$)変数のCQPを1回，($d-1$)変数のLPを2回解く手続きであり，再帰的に書くことができる．LP(n, d)に対してもCQP(n, d)と同様のアルゴリズムを構成できる．ただし，手続きORACLEは($d-1$)変数のLPを3回解く手続きとなる．

このアルゴリズムの計算量を評価する．CQP(n, d)，LP(n, d)を解くのに要する計算量をそれぞれ$T(n, d)$，$\tilde{T}(n, d)$とすると，

$$T(n, d) \leq O(nd^3 9^{d-1}) + 9^{d-1} T(n, d-1) + 2 \cdot 9^{d-1} \tilde{T}(n, d-1) + T(\frac{5}{6}n, d),$$
$$\tilde{T}(n, d) \leq O(nd^3 9^{d-1}) + 3 \cdot 9^{d-1} \tilde{T}(n, d-1) + \tilde{T}(\frac{5}{6}n, d),$$

という漸化不等式が成立し，数学的帰納法によりアルゴリズムはCQP(n, d)を最悪でも$O(n3^{(d+1)^2})$の計算量で解くことがわかる．Dyerのアルゴリズムはかなり複雑であるが，本論文では疑似コードを与えインプリメントしやすく記述している．

4．拡　張

最小包囲球問題は施設配置問題に応用されるが，この際の拡張として，各母点p_kに重みw_kが与えられた次の問題を考えることがある．

$$\begin{cases} \text{minimize} & z, \\ \text{subject to} & w_k \|x - p_k\|^2 \leq z \ (k = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

この問題は，

$$\begin{cases} \text{minimize} & cx, \\ \text{subject to} & a_i x \leq b_i (i \in N), \\ & a_j x \leq b_j (j \in E), \\ & \frac{1}{2} x^T C x + ax + b \leq 0 \end{cases}$$

のように定式化される凸計画問題のクラスに属する問

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

題である．このクラスは，CQP (n, d) を含んでいることに注意する．本論文ではこのクラスの問題に対し，Seidel [3] やWelzl [8] のアルゴリズムをもとに，O($nd!d^3$)の期待計算量を持つランダマイズドアルゴリズムを構成した．

n銘柄を扱う最適ポートフォリオ選択問題として，過去d期のデータで収益率を推定するMean-Varianceモデルを考える．この問題は$\boldsymbol{R}^d$上に与えられたn個の母点のなす凸包の中の点で，かつ，与えられた超平面の上にものっている点のうち，原点からのユークリッド距離が最小になる点を求める問題に帰着する [6]．この問題についても最遠分離平面問題に相当する同値な問題を考えることができ，CQP (n, d) に帰着できる．したがって，扱う銘柄数に関して最悪でも期待値でも線形時間の計算量を持つアルゴリズムを構成できることがわかる．

5．計算機実験とアニメーション

本論文では，いくつかの計算機実験とアニメーションも行なっている．

まず，LP (n, d) に対して，Seidelのアルゴリズム [3]と，Clarksonによる別のランダマイズドアルゴリズム [1] をとりあげ，この2つのアルゴリズムの計算機実験結果を単体法との比較実験を含めて示した．

また，第2節で示したアルゴリズムに対しても計算機実験を行ない，理論的な評価どおり母点数に関して平均的に線形な計算時間を持ち，特に低次元では十分高速であることを確認した．

最小包囲球問題および最小ノルム点問題に対する第2節で示したアルゴリズムや，Sekitani and Yamamoto [4,5] によるアルゴリズムの挙動を視覚化するアニメーションプログラムも作成し，アルゴリズムの理解を助けられるようにしている．

これらの計算機実験およびアニメーションの詳細は本論文に記述されている．

参考文献

[1] K. L. Clarkson : "A Las Vagas algorithm for linear programming when the dimension is small," *Proceedings of the 29th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science,* pp. 452-456, 1988.

[2] M. E. Dyer : "On a multidimensional search technique and its applications to the Euclidean one-centre problem," *SIAM Journal on Computing,* Vol. 15 (1986), pp. 725-738.

[3] R. Seidel : "Small-dimensional linear programming and convex hulls made easy," *Discrete & Computational Geometry,* Vol. 6 (1991), pp. 423-444.

[4] K. Sekitani and Y. Yamamoto : "A recursive algorithm for finding the minimum norm point in a polytops and a pair of closest points in two polytopes," *Mathematical Programming*, to appear.

[5] K. Sekitani and Y. Yamamoto : "A recursive algorithm for finding the minimum covering sphere of a polytops and the minimum covering spheres of several polytopes," *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, to appear.

[6] H. Takehara : "An interior point algorithm for large scale protfolio optimization," *MTEC Working Paper*, No. T923, MTB Investment Technology Institute, Co., Ltd., 1992.

[7] T. Yoshiba, S. Iwata,and T. Matsui : "Randomized algorithms for finding the smallest enclosing ball and the minimum norm point," *METR* 92-15, Department of Mathematical Engineering and Information Physics, University of Tokyo, December 1992.

[8] E. Welzl : "Smallest enclosing disks (balls and ellipsoids)," *New Trends in Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science 555, pp. 359-370, Springer-Verlag, 1991.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．