

紐と滑車と錘 (1)

——数理計画の散歩道——

柳井 浩

1. はじめに

壁や天井に固定した滑車、これに紐を通し、滑車のついた錘をぶらさげる。このような機構は、昨今でこそ少なくなったとはいえ、つい最近までは照明器具などの生活器具にも応用されることが多く、なじみの深いものである。

この機構は、数理計画という視点から見ても、なかなか興味深い。個々の錘はそれぞれできるだけ下がろうとする。複数の錘からなる系の場合には、系全体の重心が最も低い位置にくるよう、錘の位置が自動的に最適化される。い、かえれば、天井を軸とする1次のモーメントを目的関数とする最大化問題が、自動的に解かれる。

制約条件となるのは、いうまでもなく壁や天井そして、紐の長さである。——紐がピンと張っていることを前提とするなら等式条件；ピンと張ったのが最適化の結果と考えるならば不等式条件とすることができる。

非線形計画に属するこの問題を、数式と数値計算によって解くことは、結局の所、最適解が満たすべき条件を定式化し、それを満たす解を探すことになるのだが、後に示すように、単純な系の場合でも結構面倒な作業になる。一方において、実験装置を作って錘から手をはなせば、錘の位置は瞬時にして最適な位置に移動する。そしてこれは、最適のための数学的条件がどのような力学的現象と対応するのかを、目のあたりに示してくれる。いや、いちいち実験をしないまでも、どのような現象が起こるのかは、日常体験からよくわかっているから、想像をするだけでも充分である。

本稿では、紐と滑車と錘が作るいくつかの機構について、このような対応関係を見ていくことにしよう。

2. 錘が1つの場合——Lagrange乗数

[例題1] まず、図2-1のような仕掛けを考えよう。

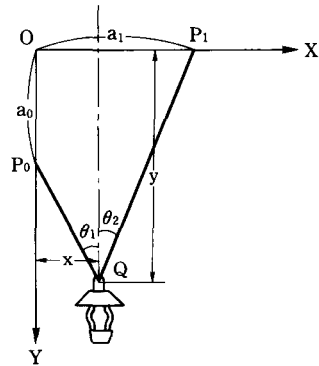


図 2-1

すなわち、壁面の1点 P_0 と天井の1点 P_1 に長さ L の紐の両端を結び、動滑車を介して重さ m のランプが吊されている(紐の目方は考えない)。ランプの位置(天井から滑車までの距離)を求めよう。

いま、図のように天井に沿って水平な X 軸を設け、これに直交して壁面を下向きに鉛直な Y 軸をとろう。このとき、点 P_0 および P_1 の座標はそれぞれ $(0, a_0)$ および $(a_1, 0)$ であるから、滑車 $Q(x, y)$ とこれらの点の距離の和が L であるという条件は

$$h(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - a_0)^2} + \sqrt{(a_1 - x)^2 + y^2} = L \quad (1)$$

と書ける。一方、ランプ、したがって滑車は重力によって下へさがろうとする。つまり、 y の値を大きくするような力が働く。もう少し力学的ないい方をすれば X 軸まわりの1次のモーメント my が大きくなるような力が働く(厳密にいうならば、 m を質点とするとき重力加速度 g を乗じなければならないが、いちいち g を書くのは繁雑であるから、本稿では m がグラム重の単位をもつことにして話を進める)。い、かえれば、ランプの位置は(1)式という制約条件の下で、

$$f(x, y) = my \quad (2)$$

という目的関数を最大化する数理計画問題の解として求められる。

この問題を図示したのが図2-2である。よく知られているように、両端を平面上の2点に結んだ、長さ一定の紐に鉛筆の先をひっかけ、ピンと張って平面上

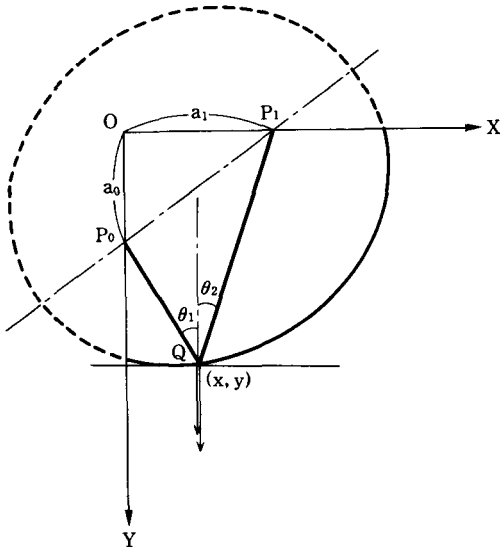


図 2-2

を滑らせれば、これらの2点を焦点とする楕円が軌跡として得られる。つまり、(1)式が満たす点の集合は P_0 および P_1 を焦点とする楕円である。楕円であれば、2次関数の等高線として表わされるはずである。実際、本稿のとりあつかいでは必要がないので、くわしい計算は省略するが、(1)式は次式と等価である。

$$[x, y]A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + b^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} L^2 - a_1^2 & a_0 a_1 \\ a_0 a_1 & L^2 - a_0^2 \end{bmatrix} \\ b &= \frac{-1}{L^2} \begin{bmatrix} a_1(L^2 + a_0^2 - a_1^2) \\ a_0(L^2 - a_0^2 + a_1^2) \end{bmatrix} \\ c &= \frac{-1}{4L^2} \{L^2 - (a_1 + a_0)^2\} \{L^2 - (a_1 - a_0)^2\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、目的関数(2)も

$$f(x, y) = [0, m] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

という形の1次関数である。すなわち、この問題は2次式で与えられる制約条件の下で、1次関数を最大にする数理計画の問題ということになる。

さて一般に、等式 $h(x, y) = L$ という制約条件の下で、目的関数 $f(x, y)$ が最大値をとる所では、関数 h が L という値をとる等高線と、目的関数の等高線が、互いに接しているはずである。いいかえれば、この点では関数 h と f のグラジエント・ベクトルが平行になるはずである。グラジエント・ベクトルというものが等高線の法線で、関数の値が大きくなる方向を向いたベクトルだからである。式で書けば

$$\text{grad } f = \lambda \text{ grad } h \quad (6)$$

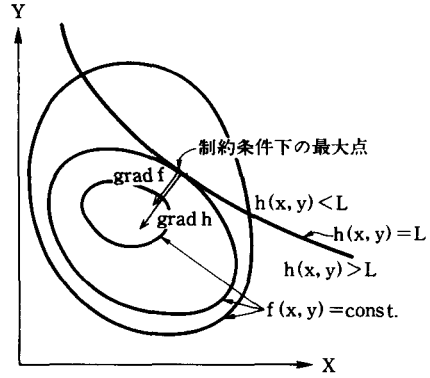


図 2-3

という関係を満たすような実数 λ が存在する (図 2-3 参照)。この実数 λ をLagrangeの乗数という。

(6)式の条件はまた、次のように定式化することもできる。すなわち

$$\mathcal{L}(x, y) = f(x, y) - \lambda h(x, y) \quad (7)$$

とおけば、(6)式と等価な関係として

$$\text{grad } \mathcal{L} = 0 \quad (8)$$

という形が得られる。ここに $\mathcal{L}(x, y)$ はLagrange関数と呼ばれる。

そこで、われわれの例題についてこの条件を書き下してみよう。Lagrange関数は

$$\mathcal{L}(x, y) = my - \lambda \left(\sqrt{x^2 + (y - a_0)^2} + \sqrt{(a_1 - x)^2 + y^2} \right) \quad (9)$$

と定義される。したがって、

$$\text{grad } \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - a_0)^2}} - \frac{(a_1 - x)}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + y^2}} \right) \\ m - \lambda \left(\frac{y - a_0}{\sqrt{x^2 + (y - a_0)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + y^2}} \right) \end{bmatrix} \quad (10)$$

となる。図 2-1 を参照すればただちにわかるように、

$$\cos \theta_1 = \frac{y - a_0}{\sqrt{x^2 + (y - a_0)^2}}, \quad \sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - a_0)^2}} \quad (11)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{y}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + y^2}}, \quad \sin \theta_2 = \frac{a_1 - x}{\sqrt{(a_1 - x)^2 + y^2}} \quad (12)$$

という関係が成立するから、これらを代入すれば、結局の所、条件(8)は

$$-\lambda(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0 \quad (13)$$

$$m - \lambda(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = 0 \quad (14)$$

という形に帰着される。

このことはしかし、力学的に見れば力の釣合いに他ならない。すなわち、紐に働く張力を T とするとき、

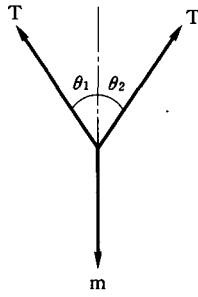


図 2-4

滑車Qにおける力の釣合いは

$$\text{水平方向} \quad T\sin\theta_1 = T\sin\theta_2 \quad (15)$$

$$\text{鉛直方向} \quad m = T\cos\theta_1 + T\cos\theta_2 \quad (16)$$

となり、(13)および(14)式にそれぞれ対応しているからである。これらの式から、Lagrange乗数 λ が紐の張力 T という力学的意味をもつことがわかる：

$$\lambda = T \quad (17)$$

さて、このような理解の下では λ がゼロでないというのは自然な仮定であろう。(λ がゼロになるか否かの議論は後の節ですることしよう)。この条件の下では(13)あるいは(15)式からただちに

$$\theta_1 = \theta_2 (= \theta) \quad (18)$$

が得られる。つまり、紐は滑車を通る鉛直線に関して左右対称の角度をなすことがわかる(そこで、以後 θ の添字は省略することしよう)。また、このことと、(14)あるいは(16)式から

$$\lambda = T = \frac{m}{2\cos\theta} \quad (19)$$

という関係式が得られる。

一方、(11)および(12)式を、紐の長さが L となる条件(1)式に代入すれば

$$\frac{y-a_0}{\cos\theta_1} + \frac{y}{\cos\theta_2} = L \quad (20)$$

$$\frac{x}{\sin\theta_1} + \frac{a_1-x}{\sin\theta_2} = L \quad (21)$$

の2式が得られる。これらに(18)式の関係を使えば、

$$2y - a_0 = L\cos\theta \quad (22)$$

$$a_1 = L\sin\theta \quad (23)$$

の2式が得られ、これからただちに

$$\sin\theta = \frac{a_1}{L} \quad (24)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{L}\sqrt{L^2 - a_1^2} \quad (25)$$

が得られる。これらの関係は図2-5のように紐の左側の部分を折り返して画いてみても容易に理解できよう。

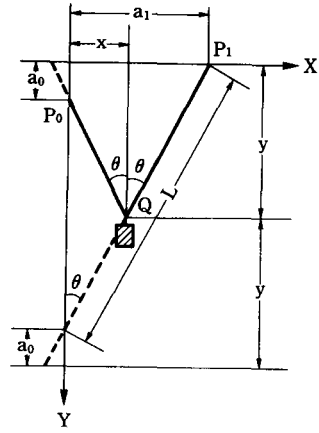


図 2-5

そこで、これらを(22)式に代入すれば、

$$y = \frac{a_0}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{L^2 - a_1^2}}{a_0} \right) \quad (26)$$

$$x = \frac{a_1}{2} \left(1 - \frac{a_0}{\sqrt{L^2 - a_1^2}} \right) \quad (27)$$

が得られる。なお、(27)式は図2-5からただちに導かれる関係式

$$a_1 - x = y \tan\theta \quad (28)$$

に(24)~(26)式を代入して求めたものである。

また、(26)および(27)の両式から紐の長さ L を消去すれば、

$$\left(y - \frac{a_0}{2}\right) \left(x - \frac{a_1}{2}\right) = -\frac{a_1 a_0}{4} \quad (29)$$

を得る。すなわち、 $x = \frac{a_1}{2}$ および $y = \frac{a_0}{2}$ を漸近線とする双曲線(図2-6)が得られる。

(26)および(27)式も参照しつつ、動滑車Qの動きを考え

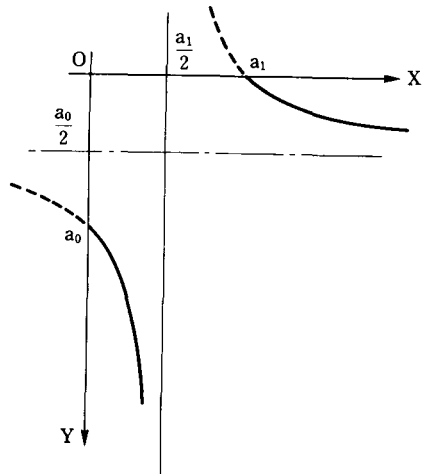


図 2-6

てみると、滑車Qは紐の長さLが長くなるにつれて下降し、OP₁の垂直二等分線に漸近する。また紐を短くしていけば、Qはこの双曲線に沿って上昇するが、y=a₀の位置で壁x=0とぶつかることになる。

さて、次にLagrange乗数のもう1つの解釈について述べておこう。いま、紐の長さLがほんのちょっと(ΔL)長くなったとしよう。滑車Qはそれに応じて下がる。新しい位置を(x+Δx, y+Δy)とすれば、ここでは紐の長さの条件が

$$h(x+\Delta x, y+\Delta y) = L + \Delta L \quad (30)$$

という形で成立している。あるいは元の位置(x, y)を中心として左辺をTaylor展開して1次の項までとれば

$$h(x+\Delta x, y+\Delta y) \cong h(x, y) + (\text{grad } h)^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。これに旧い位置で成立している関係式(1)を代入して(30)式と比較すれば

$$\Delta L \cong (\text{grad } h)^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (32)$$

という関係が1次の精度で成立することがわかる。

一方において、新しい位置(x+Δx, y+Δy)に移れば、目的関数の値もf(x+Δx, y+Δy)に増加する。これも、旧い位置(x, y)を中心としてTaylor展開して1次の項までとれば、その増分Δfが次の式で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) \\ &\cong (\text{grad } f)^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

ところが、旧い位置においては(6)式の関係が成立しているからこれを(33)式に代入して(32)式と比較すれば、

$$\Delta f \cong \lambda (\text{grad } h)^T \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \cong \lambda \Delta L \quad (34)$$

という関係が得られる。

すなわち、λについて

$$\lambda \cong \frac{\Delta f}{\Delta L} \quad (35)$$

という関係が成立する。この関係から、Lagrange乗数λが紐という‘資源’の、1次のモーメントという尺度で見た‘限界価値’であるという解釈もできる。いいかえれば、λは紐が1単位長くなったときに、1次のモーメントがどれだけ増大するかという微係数に対応している(‘限界’という言葉は経済学の術語で、微係数という意味である)。

このことを使った1つの応用について述べておこう。

(19)と(35)式を使えば

$$\Delta f \cong \frac{m}{2\cos\theta} \Delta L \quad (36)$$

という関係が得られる。また、(2)式から

$$\Delta f = m \Delta y \quad (37)$$

が得られるから、これを(36)式に代入すれば

$$\Delta L \cong 2\cos\theta \Delta y \quad (38)$$

という関係が得られる。すなわちいま、ランプを1cm下に下げたいときには、現在の位置における角度θを分度器で測定し、紐を2cosθcmだけ長くすればよいことになる。

なお念のため、(26)式を使ってこのことを確かめてみよう。(26)式をLで微分すれば

$$\frac{dy}{dL} = \frac{L}{2\sqrt{L^2 - a^2}} \quad (39)$$

となる。(25)式を使えば

$$\frac{dy}{dL} = \frac{1}{2\cos\theta} \quad (40)$$

すなわち、(38)式と同じく

$$\Delta L \cong 2\cos\theta \Delta y \quad (41)$$

が得られる。

3. 錘が2つの場合—Kuhn-Tuckerの条件

【例題2】この例題では図3-1のような仕掛けを考えることにしよう。すなわち、天井の1点P₁に長さLの、重さが無視できる紐の一端を結び、動滑車Qを介して重さm₁のランプをさげる。さらに紐のもう一端に重さm₀の錘を結び、これを、天井のP₁からはa₁だけ離れた位置にとりつけられた滑車P₀を通して、ランプと釣合わせようとしている。このとき、ランプと錘の位置を求めよう。

天井に沿ってP₀, P₁を通過する水平なX軸を設ける。これと直交して鉛直方向下向きにY軸を設け、錘とラ

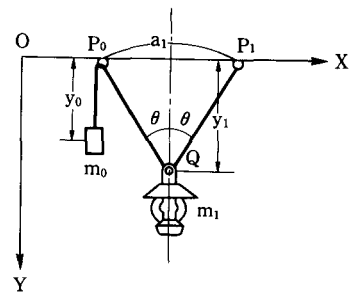


図 3-1

ランプ(滑車Q)の天井からの距離を、それぞれ y_0 および y_1 としよう。滑車Qにおいて紐が鉛直線となす角度は、例題1における考察からも明らかのように、左右相等的しい。したがって、ランプは線分 P_0P_1 の垂直二等分線上にあることが明らかだから、この例題ではランプの x 座標は問題にならない。

また、この例題では制約条件を不等式条件として取扱うことにしよう。第1の条件は紐の長さに関するもので

$$h_0(y_0, y_1) = y_0 + 2\sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2} \leq L \quad (1)$$

という不等式で与えられる。結果として紐がピンと張れば等式が成立する。

第2の条件は、錘の位置に関するもので、

$$h_1(y_0, y_1) = -y_0 \leq 0 \quad (2)$$

という形で与えられる。(2)式の条件は(1)式と形式を描いてあるが、これは、 y_0 が非負という条件に他ならない。物理的に見れば、錘が滑車 P_0 をすり抜けて反対側に落ちることはないというのが、この条件の意味である。

第3の条件は、ランプの位置に関するものである。

$$h_2(y_0, y_1) = -y_1 \leq 0 \quad (3)$$

天井の存在が、ランプがそれよりも上に位置することを妨げている。

一方、錘もランプも、共に重力によって下にさがろうとする。系全体として見れば、その X 軸まわりの1次のモーメント $m_0y_0 + m_1y_1$ が最大になるような力が働く。それゆえ、この問題は(1)、(2)および(3)式で与えられる不等式条件の下で、1次関数

$$f(y_0, y_1) = m_0y_0 + m_1y_1 \quad (4)$$

$$(m_0 \geq 0, m_1 \geq 0) \quad (5)$$

を目的関数とする最大化問題となる。

さて、この問題を図示したのが図3-2である。(1)

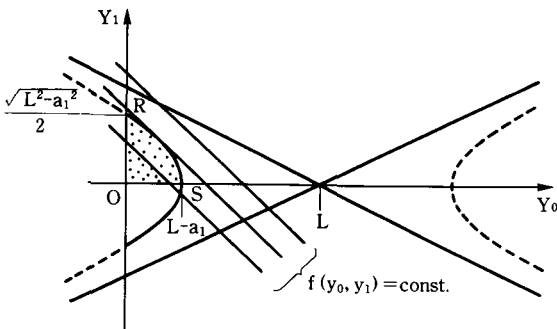


図 3-2

式の等式部分は、簡単な計算によってただちに導かれるように、

$$(y_0 - L)^2 - 4y_1^2 = a_1^2 \quad (6)$$

と書ける。これは点 $(L, 0)$ を中心とし、2直線

$$y_1 = \pm \frac{1}{2}(y_0 - L) \quad (7)$$

を漸近線としてつ双曲線である。したがって、問題の許容領域は図3-2にも示されているように、双曲線の左葉部分と Y_0 および Y_1 軸によって境界を与えられる凸集合である。

さて、このような凸集合を許容領域とし、線形関数(4)を目的関数とする最大化問題の最適解は、いわゆるKuhn-Tuckerの条件を満たしている：

$$\text{grad } f - \lambda_0 \text{grad}(h_0 - L) - \lambda_1 \text{grad } h_1 - \lambda_2 \text{grad } h_2 = 0 \quad (8)$$

$$h_0(y_0, y_1) - L \leq 0 \quad (1\text{-再})$$

$$h_1(y_0, y_1) \leq 0 \quad (2\text{-再})$$

$$h_2(y_0, y_1) \leq 0 \quad (3\text{-再})$$

$$\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0 \quad (9)$$

$$\lambda_0(h_0(y_0, y_1) - L) = 0 \quad (10)$$

$$\lambda_1 h_1(y_0, y_1) = 0 \quad (11)$$

$$\lambda_2 h_2(y_0, y_1) = 0 \quad (12)$$

ここに λ_0, λ_1 および λ_2 はLagrange乗数であり、これにかかわる最後の3条件(9)(10)および(11)は相補性条件と呼ばれており、等式-不等式条件が実質上(つまり等式で)効いてこない場合には、対応するLagrange乗数がゼロになるべきことと対応している。

Kuhn-Tucker条件は、関数 f, h_i 等がどれも微分可能な凸関数である場合には、最大のための必要十分条件となるが、その証明などは、他の多くの書物にも記されていることなので割愛するが、以下に見るように、この条件は、最大点があつ性質の巧妙な記述になっている。

一般に、複数の不等式条件が課せられている最大化問題の最適解の制約に対する相対的位置は、図3-3のようにさまざまである。

(a)の場合のように、制約条件がどれも効いていなければ、最適の条件は

$$\text{grad } f = 0 \quad (13)$$

でよい。

(b)の場合のように1つの不等式条件

$$h_1(y_0, y_1) \leq 0 \quad (14)$$

だけが効いているときには、実質上、

$$h_1(y_0, y_1) = 0 \quad (15)$$

という等式制約条件だけを考えればよい。したがって、

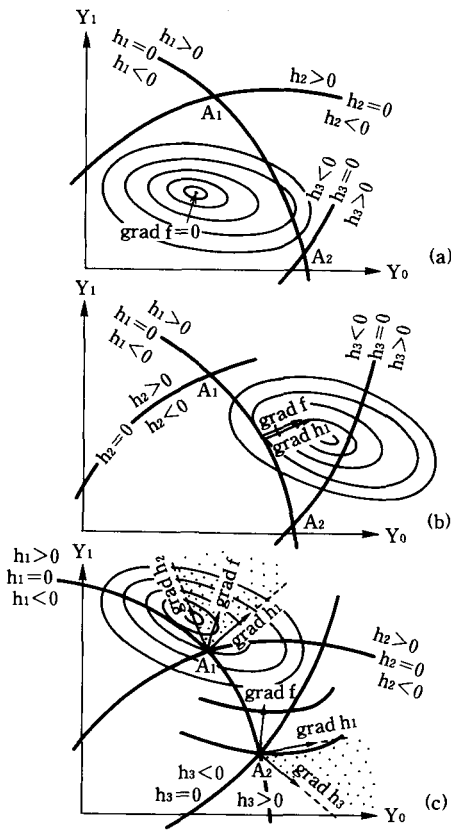


図 3-3

前節でも述べたように、

$$\text{grad } f - \lambda_1 \text{ grad } h_1 = 0 \quad (16)$$

という関係を満たす Lagrange 乗数 λ_1 の存在が最大のための条件になる。

(c)の場合のように 2 つの不等式条件

$$h_1(y_0, y_1) \leq 0 \quad (17)$$

$$h_2(y_0, y_1) \leq 0 \quad (18)$$

がギリギリ (つまり等式として) 満たされる場所に最大点がある場合には、図中の点 A_1 におけるように、ベクトル $\text{grad } f$ が、ベクトル $\text{grad } h_1$ と $\text{grad } h_2$ が張る錐の中に入っていないとなければならない。すなわち、

$$\text{grad } f = \lambda_1 \text{ grad } h_1 + \lambda_2 \text{ grad } h_2 \quad (19)$$

という関係を満たす非負の λ_1 および λ_2 が存在しなければならない。もし、そうでなければ、点 A_2 におけるように、ここから、制約条件を侵すことなく、目的関数が増加する方向に ($h_1=0$ に沿って) 進むことができる。

ただちにわかるように、条件 h_2 が効いてこない (b) の場合は、(19)式において $\lambda_2=0$ という特別の場合として取り扱うことができる。また、変数や不等式条件がさらに多い場合についても、同様に考えれば、一般の場合

の Kuhn-Tucker 条件の意味が理解できよう。

さて、われわれの例題に戻って (1)~(4)式を用いて、(8)式をさらに具体的に書けば、

$$\text{grad } f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{grad } h_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_0}{\partial y_0} \\ \frac{\partial h_0}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2y_1}{\sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{grad } h_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_0} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{grad } h_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_2}{\partial y_0} \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

であるから、

$$m_0 - \lambda_0 + \lambda_1 = 0 \quad (24)$$

$$m_1 - \frac{2y_1}{\sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \lambda_0 + \lambda_2 = 0 \quad (25)$$

となる。

さて、解がこれらの条件を満たすやり方には、いろいろな組合せがある。順に見ていこう。

(i) $\lambda_0=0$ の場合

この場合には (24) および (25) 式から

$$m_0 = -\lambda_1 \quad (26)$$

$$m_1 = -\lambda_2 \quad (27)$$

となる。 m_0 および m_1 は目方であるから、

$$m_0 \geq 0, \quad m_1 \geq 0 \quad (5\text{-再})$$

である。(26) および (27) 式を (9) 式に代入すれば

$$-m_0 \geq 0, \quad -m_1 \geq 0 \quad (28)$$

となる。すなわち

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 0 \quad (29)$$

また、(26) および (27) 式により

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0 \quad (30)$$

が得られる。したがって、許容領域すなわち (1)(2) および (3) を満たす解はどれも最適解になる。力学的にいえば、紐がピンと張ってなくてもよい ($\lambda_0=0$) 場合とは、結局の所、無重力 ($m_0=m_1=0$) の場合に対応するものと解釈できる。

(ii) $\lambda_0>0, \lambda_1>0, \lambda_2>0$ の場合

この場合、(10)(11) および (12) 式が成立するためには、(1) (2) および (3) 式において等号が成立しなければならない。すなわち

$$y_0 = 0 \quad (31)$$

$$y_1=0 \quad (32)$$

$$(y_0-L)^2-4y_1^2=a_1^2 \quad (6\text{-再})$$

が同時に成立しなければならない。(31)および(32)式を(6)式に代入すればすぐにわかるように、これが可能なものは

$$L=a_1 \quad (33)$$

すなわち、紐の長さがちょうど2つの滑車を結ぶ長さになっている場合に限られる。このような特殊な場合を除けば、この場合に対応する解は存在しない。

(iii) $\lambda_0 > 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ の場合

この場合には、(10)および(12)式の条件から、(1)および(3)式において等号が成立しなければならないから、

$$(y_0-L)^2-4y_1^2=a_1^2 \quad (6\text{-再})$$

$$y_1=0 \quad (34)$$

を得る。すなわち、この場合の解は

$$y_0=L-a_1 \quad (35)$$

$$y_1=0 \quad (31\text{-再})$$

である。いいかえれば、図3-2における点Sに最適解がある。ランプが天井の高さまで引き上げられている状態である。

上の結果から、(24)および(25)式は

$$m_0-\lambda_0=0 \quad (36)$$

$$m_1+\lambda_2=0 \quad (37)$$

となる。さらに、(37)式から(5)および(9)式により

$$m_1=0 \quad (38)$$

が導かれる。すなわち、ランプの目方がゼロだということが、ランプが天井の高さまで引き上げられる($y_1=0$)原因になっていることがわかる。

また、(36)式は、後にも述べるように、Lagrange乗数 λ_0 が紐にかかる張力であることに対応している。

(iv) $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ の場合

この場合には、(10)および(11)式の条件から(1)および(2)

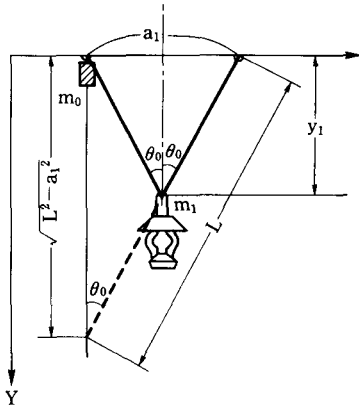


図 3-4

式において等号が成立しなければならないから、

$$(y_0-L)^2-4y_1^2=a_1^2 \quad (6\text{-再})$$

$$y_0=0 \quad (39)$$

を得る。すなわち、この場合の解は

$$y_0=0 \quad (40)$$

$$y_1=\frac{\sqrt{L^2-a_1^2}}{2} \quad (41)$$

である。いいかえれば、図3-2における点Rに最適解がある。錘がランプの目方に抗しきれず、天井の滑車 P_0 の所まで引き上げられランプが紐の長さ一杯まで下にさがっている状態である。

(40)および(41)式を(24)および(25)式に代入すれば

$$m_0-\lambda_0+\lambda_1=0 \quad (42)$$

$$m_1-\frac{2\sqrt{L^2-a_1^2}}{L}\lambda_0=0 \quad (43)$$

を得る。図3-4からもすぐにわかるように、この場合に紐が鉛直線となす角度を θ_0 とすれば

$$\cos \theta_0=\frac{\sqrt{L^2-a_1^2}}{L} \quad (44)$$

となるから(43)式は

$$m_1-2 \cos \theta_0 \cdot \lambda_0=0 \quad (45)$$

となる。(42)および(43)式をベクトル形式で書きなおせば、

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix}=\lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \cos \theta_0 \end{bmatrix}+\lambda_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

となる。条件から λ_0, λ_1 は共に正であるから、この式は

ベクトル $\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix}$ が2つのベクトル $\text{grad } h_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \cos \theta_0 \end{bmatrix}$ および $\text{grad } h_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ の張る錐の中にあることを意味している。

ベクトル $\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix}$ が目的関数 f の点Rにおけるグラジェント・ベクトルであることを思い起こせば、このことが、最適解が点Rにあるための条件になることは容易に理解できよう(図3-5)。

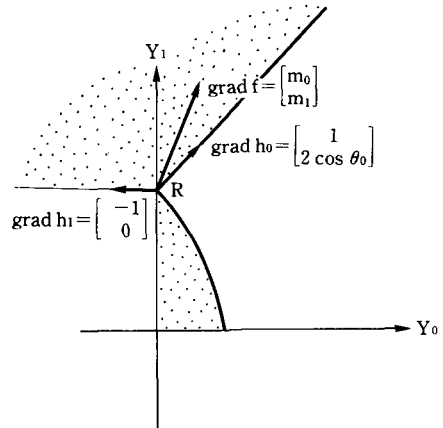


図 3-5

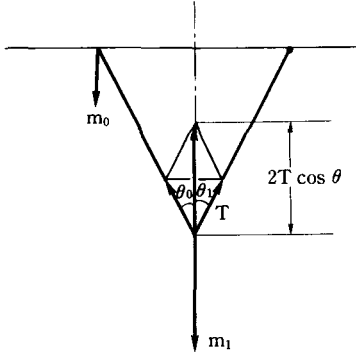


図 3-6

また、(45)式から λ_0 を求めれば

$$\lambda_0 = \frac{m_1}{2 \cos \theta_0} \quad (47)$$

となるから、これを(42)式に代入すれば

$$m_0 = \frac{m_1}{2 \cos \theta_0} - \lambda_1 \quad (48)$$

となる。 $\lambda_1 > 0$ であるから

$$m_0 < \frac{m_1}{2 \cos \theta_0} \quad (49)$$

あるいは

$$\frac{m_1}{m_0} > 2 \cos \theta_0 = 2 \frac{\sqrt{L^2 - a_1^2}}{L} \quad (50)$$

という関係が得られる。すなわち、ランプの目方が錘の $2 \cos \theta_0$ 倍より大きくなると、錘がランプの目方に抗しきれず、天井まで引き上げられてしまう。また、紐の長さ L を短かくしていけば、 $2 \cos \theta_0$ はいくらでもゼロに近い値になるから、ランプの目方の如何にかかわらず、いつかは錘がこれに抗しきれなくなる。

さらに、Lagrange乗数 λ_0 と λ_1 の力学的な意味について触れておこう。図3-6に見るように、紐がランプを引き上げている張力を T とすれば、力の釣合いから

$$m_1 = 2 \cos \theta_0 T \quad (51)$$

という関係が成立する。この式と(47)式を比較すれば、すぐにわかるように、

$$\lambda_0 = T \quad (52)$$

すなわち、 λ_0 は紐に働く張力と解釈できる。したがって、(42)式から

$$\lambda_1 = \lambda_0 - m_0 = T - m_0 \quad (53)$$

が得られる。錘がなければ滑車の所で受けとめなければならぬ張力 T のうち錘 m_0 が受けもつ分を除いた部分ということになる。

(V) $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ の場合

この場合には、(10)式の条件から

$$(y_0 - L)^2 - 4y_1^2 = a_1^2 \quad (6-再)$$

が得られる。すなわち、解は許容領域の境界をなす双曲線上にある。

また、条件 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ を(24)および(25)式に代入してベクトルの形で書けば、

$$\begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2y_1}{\sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \end{bmatrix} \quad (54)$$

という関係が得られる。

$$\text{ベクトル} \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \end{bmatrix} \text{と} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2y_1}{\sqrt{y_1^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}} \end{bmatrix} \text{はそれぞれ目的関}$$

数 f と双曲線で与えられる境界条件 h_0 のグラジエントであるから、この式は、これらの2つのベクトルが同じ方向を向いている所に最適解があることを示している。

そこで、(54)式から計算をして y_1 を求め、これに対応する y_0 を(6)式によって求めれば、結果として、

$$y_0 = L - \frac{4m_0}{\sqrt{4m_0^2 - m_1^2}} \cdot \frac{a_1}{2} \quad (55)$$

$$y_1 = \frac{m_1}{\sqrt{4m_0^2 - m_1^2}} \cdot \frac{a_1}{2} \quad (56)$$

が得られる。

ここで、最適解が許容領域の端点SおよびR以外の点に存在する条件

$$0 < y_1 = \frac{m_1}{\sqrt{4m_0^2 - m_1^2}} \cdot \frac{a_1}{2} < \frac{\sqrt{L^2 - a_1^2}}{2} \quad (57)$$

を整理すると

$$0 < \frac{m_1}{m_0} < \frac{2\sqrt{L^2 - a_1^2}}{L} (= : 2 \cos \theta_0) \quad (58)$$

を得る。これが錘とランプが釣合うことのできる条件である。ここに θ_0 は、ランプが紐の長さの許すかぎり下にさがったときに、紐の鉛直線がなす角度である(44)式参照)。

(54)式によれば、

$$\lambda_0 = m_0 = \frac{m_1}{2 \cos \theta_1} \quad (59)$$

が成立する。ここに θ_1 は釣合いの位置において紐と鉛直線のなす角度である(図3-1参照)。したがって、逆にいえば

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{m_0} \quad (60)$$

が成立する。

(59)式はまた、Lagrange乗数 λ_0 が紐にかかる張力で

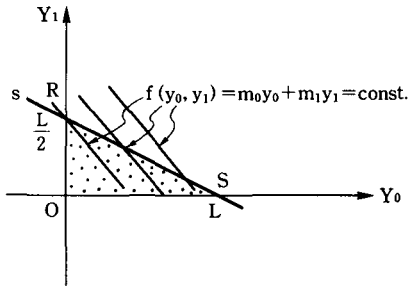


図 3-7

あり、これが滑車 P_0 の所で釣合っていることを意味している。

次に、紐の端を固定する点 P_1 を滑車 P_0 にウンと接近させてみよう。あるいは紐の長さ L をウンと伸ばしても相対的には同じ効果を得ることができる。このとき、明らかに θ_1 はゼロに、 $\cos \theta_1$ は1に接近し、(59)式は

$$m_0 = \frac{1}{2} m_1 \quad (61)$$

となる。この式はランプと錘が釣合うのが、錘がラン

プの目方の半分であるときに限られ、それ以外にないことを示している。これは初等力学でいう滑車の原理に他ならない。

このことはまた、次のようにも説明できる。紐の長さに関する条件(1)式において $a_1=0$ とすれば

$$y_0 + 2y_1 \leq L \quad (62)$$

となる。これと、(2)および(3)式の条件を Y_0 - Y_1 平面上に示せば、この問題の許容領域は図3-7のような1つの直角三角形になる。一方において、目的関数(4)もまた線形関数である。したがって、問題は線形計画問題に帰着されることがわかる。図より明らかなように、この問題の解は

$$\frac{m_1}{m_0} < \frac{1}{2} \text{ のとき } S = (L, 0) \quad (63)$$

$$\frac{m_1}{m_0} > \frac{1}{2} \text{ のとき } R = \left(0, \frac{L}{2}\right) \quad (64)$$

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{1}{2} \text{ のとき 線分 } \overline{SR} \text{ 上の任意の点} \quad (65)$$

である。釣合いがたもたれるのは、最後の場合に他ならない。ただし、これも紐の目方がゼロだという仮定の下での話である。