

紐と滑車と錘(2)

—数理計画の散歩道—

柳井 浩

4. 紐の長さの配分による定式化

—その1

前節までにおいては、錘やランプの高さを変数として問題を定式化してきた。この節以下では、紐が錘やランプにどのように配分されるのかに着目して定式化することにしよう。こうすると、目的関数の形は以前より複雑なものになるが、そのかわり、許容領域は単体というきわめて単純な形の集合になる。

【例題3】この例題では、図4-1のような仕掛けを考える。すなわち、天井の2点 P_0 および P_2 に両端を固定された長さ L の紐があり、線分 $\overline{P_0P_2}$ 上の1点に固定された滑車 P_1 にひっかけられている紐の、 $\widehat{P_0P_1}$ および $\widehat{P_1P_2}$ の間には、それぞれ動滑車 Q_1 および Q_2 を介して錘 m_1 および m_2 が吊され、互いに引きあってバランスしている。その位置を求めたい。ここでも紐の目方はゼロと考えよう。

天井に沿って $\overline{P_0P_2}$ を通過する水平なX軸を設ける。線分 $\overline{P_0P_1}$ および $\overline{P_1P_2}$ の長さをそれぞれ a_1 および a_2 とする。X軸と直交、下向きにY軸をとり、動滑車 Q_1 および Q_2 のy座標を y_1 および y_2 とする。

紐の点 P_0-P_1 間および P_1-P_2 間の部分の長さを u_1 および u_2 とすれば、紐の長さに関する条件は

$$u_1 + u_2 = L, \tag{1}$$

$$u_1 \geq a_1, \quad u_2 \geq a_2 \tag{2}$$

となる。一方、目的関数はX軸まわりのモーメント

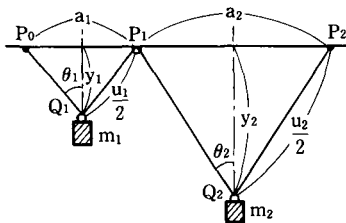


図 4-1

やない ひろし 慶応義塾大学 理工学部
〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

$$f(y_1, y_2) = m_1 y_1 + m_2 y_2 = \max! \tag{3}$$

となるが、紐がピンと張った状態では、各部分で、滑車を通る鉛直線に関して対称となるから、

$$y_1 = \frac{1}{2} \sqrt{u_1^2 - a_1^2} \tag{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \sqrt{u_2^2 - a_2^2} \tag{5}$$

となる。したがって、目的関数は

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{1}{2} (m_1 \sqrt{u_1^2 - a_1^2} + m_2 \sqrt{u_2^2 - a_2^2}) \tag{6}$$

となる。すなわち、(1)および(2)式の条件の下で(6)式を最大にするのが問題である。

前節の例題からも推察できるように、(2)式の条件が問題になるのはきわめて特殊な場合なので、これは無視しよう。そこで、Lagrange乗数を λ としてLagrange関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} (m_1 \sqrt{u_1^2 - a_1^2} + m_2 \sqrt{u_2^2 - a_2^2}) \\ &- \lambda(u_1 + u_2 - L) \end{aligned} \tag{6-再}$$

と定義すれば

$$\text{grad } \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{m_1 u_1}{2\sqrt{u_1^2 - a_1^2}} - \lambda \\ \frac{m_2 u_2}{2\sqrt{u_2^2 - a_2^2}} - \lambda \end{bmatrix} \tag{7}$$

を得る。したがって、目的関数が最大になる条件は

$$\frac{m_1 u_1}{2\sqrt{u_1^2 - a_1^2}} = \lambda \tag{8}$$

$$\frac{m_2 u_2}{2\sqrt{u_2^2 - a_2^2}} = \lambda \tag{9}$$

となる。図4-1からも明らかのように、紐と鉛直線のなす角度を各々 θ_1 および θ_2 とすれば

$$\cos \theta_1 = \sqrt{u_1^2 - a_1^2} / u_1 \tag{10}$$

$$\cos \theta_2 = \sqrt{u_2^2 - a_2^2} / u_2 \tag{11}$$

となるから、(8)および(9)式は

$$\frac{m_1}{2 \cos \theta_1} = \lambda \tag{12}$$

$$\frac{m_2}{2 \cos \theta_2} = \lambda \tag{13}$$

となる。これらの式は、この例題でもまたLagrange乗数 λ が紐にかかる張力であることを示している。

(12)および(13)式では、求めるべき変数が $\cos \theta_1$ および $\cos \theta_2$ になっているから、制約条件(1)もこれらの変数

で表現しておかなければならない。図4-1からも明らかのように

$$u_1 \sin \theta_1 = a_1 \quad (14)$$

$$u_2 \sin \theta_2 = a_2 \quad (15)$$

という関係が成立するから、これを(1)式に代入すれば

$$L = \frac{a_1}{\sin \theta_1} + \frac{a_2}{\sin \theta_2} \\ = \frac{a_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_2}} \quad (16)$$

を得る。さらに、(12)および(13)の関係式を代入すれば、

$$L = \frac{a_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_1}{2\lambda}\right)^2}} + \frac{a_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{2\lambda}\right)^2}} \quad (17)$$

という方程式を得るから、これを λ について解いて、これから θ_1 および θ_2 、あるいは u_1 および u_2 を求めればよい。

あるいはまた(12)および(13)式から得られるように、

$$\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} = \frac{m_2}{m_1} \quad (18)$$

という関係があるから、これを(16)式に代入して

$$L = \frac{a_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \cos \theta_1\right)^2}} \quad (19)$$

という式を導き、これから直接 $\cos \theta_1$ を求めてもよい。そのためには、

$$\ell(\cos \theta_1) = \frac{a_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1} \cos \theta_1\right)^2}} \quad (20)$$

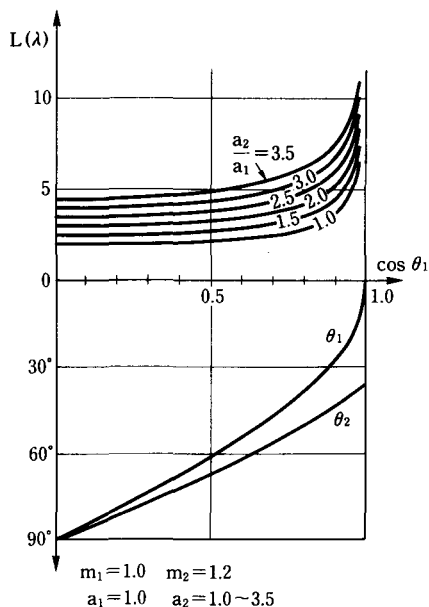


図 4-2

という関数のグラフを画き、これから

$$\ell(\cos \theta_1) = L \quad (21)$$

という関係が成立するような $\cos \theta_1$ を求めればよい。

図4-2には、そのようなグラフの一例が示されている。また、図4-2ではさらに、これから θ_1 および θ_2 が読みとれるようになっている。

この図からもわかるように関数 $\ell(\cos \theta_1)$ は $\cos \theta_1$ の大部分の値に対してほぼ水平に寝た形状を示している。したがって、水平な直線

$$\ell = L \quad (22)$$

との交点によって $\cos \theta_1$ を求めることは誤差を生じやすい。正確な値を求めるには相応の数値解析的配慮が必要になるのだが、本稿の範囲をこえるので、これ以上は立入らない。

このことの力学的な意味を考えてみよう。いま、(6)式に(1)式の関係式を代入して、目的関数を $\widehat{P_0 P_1}$ に配分される紐の長さ u_1 だけの関数として書けば

$$\psi(u_1) = \frac{1}{2} (m_1 \sqrt{u_1^2 - a_1^2} + m_2 \sqrt{(L - u_1)^2 - a_2^2}) \\ u_1 \in [a_1, L - a_2] \quad (23)$$

となる。この関数の形状の一例をプロットしたのが図4-3である。

この図にも見るとおり、この関数はその定義域の中央においてきわめて平坦に広がる部分をもっている。すなわち、この部分では u_1 の値が変化しても、系の1次のモーメントはあまり変化しない。いかえれば、紐がずれて、錘が‘最適’位置を離れても、滑車 Q_1 、 P_1 および Q_2 にCoulombマサツがあれば、その場所で止まってしまうことになる。

別のいい方をすれば、この機構を‘秤’として物の目方を測ろうとするのは無理である。確かに、(18)式からすれば、紐と鉛直線がなす角度から、それぞれの錘の重さの比を知ることができるわけだが、上に述べた

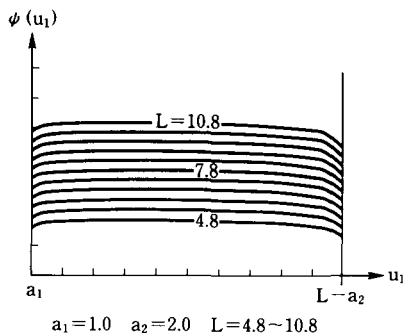


図 4-3

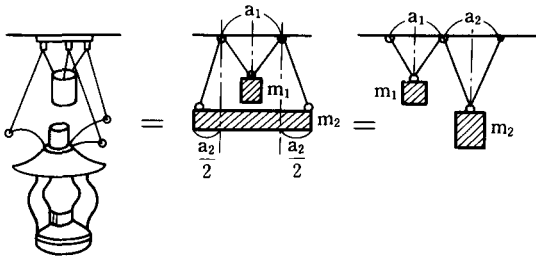


図 4-4

理由から精度に難があり、使いものにならない。

一方、この性質を逆手にとって利用したのが、図 4-4 に示すランプの無定位懸垂装置である。筆者は、このような装置を15年ほど以前に、東京世田谷のポロ市で見かけた。この装置が機構上図 4-1 のそれと等価であることは明らかであろう。この装置では、ランプを上下して、そと手を放せば、ランプはその位置にとどまる。不均合があったとしても、滑車のもつCoulombマサツがひきうけてくれる。

さて、図 4-1 の装置において

$$m_1 = m_2 \quad (24)$$

となる場合について、2, 3 の注意を与えておこう。

釣合いの位置では、まず、(18)式において

$$\theta_1 = \theta_2 = : \theta \quad (24)$$

が成立する。さらに、(16)式にこの関係を代入して整理すれば

$$\sin \theta = \frac{a_1 + a_2}{L} \quad (25)$$

が得られる。そこでこれを(14)および(15)式に代入すれば

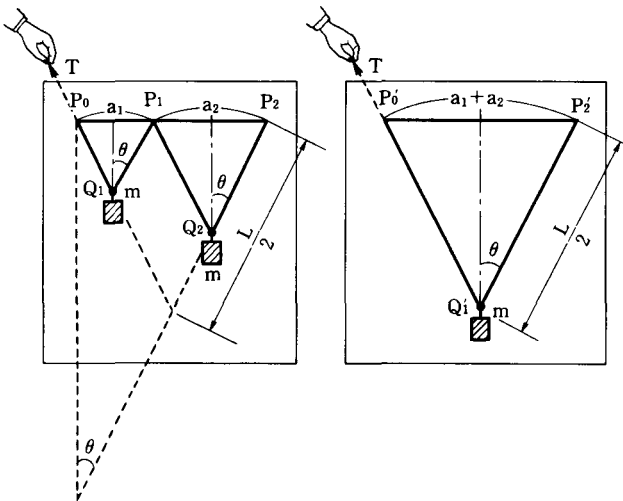


図 4-5

$$u_1 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot L \quad (26)$$

$$u_2 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot L \quad (27)$$

したがって、(4)(5)および(10)(11)式から

$$y_1 = \frac{1}{2} u_1 \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{a_1}{a_1 + a_2} \sqrt{L^2 - (a_1 + a_2)^2} \quad (28)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} u_2 \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{a_2}{a_1 + a_2} \sqrt{L^2 - (a_1 + a_2)^2} \quad (29)$$

となる。また、系がもつ1次のモーメントは

$$M(L, m) = \frac{1}{2} m \sqrt{L^2 - (a_1 + a_2)^2} \quad (30)$$

となる。

ところで、図 4-1 の機構は、 $m_1 = m_2$ の場合、図 4-5 の右の図の機構と力学的に等価であることに注意しよう。右の機構は天井の滑車 P_1 と、動滑車 Q_2 とその錘がとりはずされている。全体としての重さは半分になるわけだが、右の系の1次のモーメントもやはり

$$M_1(L, m) = \frac{1}{2} m \sqrt{L^2 - (a_1 + a_2)^2} \quad (31)$$

となる。また、点 P_0 あるいは P_0' で紐をはずし、指でもつとき、釣合いに必要な張力 T は共に

$$T = \frac{m}{2 \cos \theta} \quad (32)$$

である。いいかえれば、これらの装置に蓋をして中味が見えないようにすれば、 P_0 あるいは P_0' で紐をつまんでみるかぎり、両者の区別がつかない。

5. 紐の長さの配分による定式化その2 一勾配法と緩和法

【例題 4】この例題では図 5-1 のような仕掛けを考える。例題 3 と異なるのは、錘が1つふえたということだけである。

例題 3 と同様に定式化すれば、紐の長さに関する制約条件は

$$u_1 + u_2 + u_3 = L, \quad u_1 \geq a_1, \quad u_2 \geq a_2, \quad u_3 \geq a_3 \quad (1)$$

であり、目的関数は4節の(6)式と同様にして

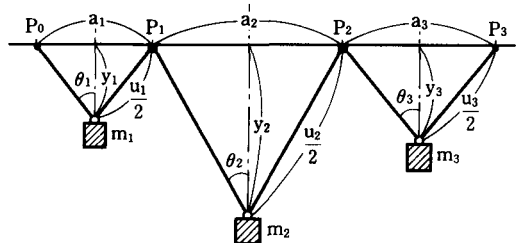


図 5-1

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{2}(m_1\sqrt{u_1^2 - a_1^2} + m_2\sqrt{u_2^2 - a_2^2} + m_3\sqrt{u_3^2 - a_3^2}) \quad (2)$$

となる。

解法 A 勾配法 いま(2)式において(1)式を用いて変数 u_3 を消去すれば、

$$u_1 + u_2 \leq L - a_3, \quad u_1 \geq a_1, \quad u_2 \geq a_2 \quad (3)$$

の下で目的関数

$$\chi(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(m_1\sqrt{u_1^2 - a_1^2} + m_2\sqrt{u_2^2 - a_2^2} + m_3\sqrt{(L - u_1 - u_2)^2 - a_3^2}) \quad (4)$$

を最大化することになる。(4)式の一例について等高線図を画いたのが図 5-2 である。頂上は許容領域(3)の内部にあり、頂上部分は平たく広がった丘を作っているのが見える。

さて、図 5-1 の仕掛けに戻って考えてみよう。紐をピンと張らせたまま、3つの錘に任意の位置をとらせて、指でおさえてしまおう。(明らかに2個をおさえれば錘はどれも動かない。)——指をはなせば、錘は動いて(4)式を最大化する位置に移る。だから、このときの動きを追っていけば、われわれの最大化問題の解が得られるはずである。

しかし、これを空气中(あるいは真空中)で行なえば、その動き方はNewtonの法則に従い、2階の微分方程式によって記述されることになるので、これを追うのはちょっと面倒である。そこで、装置全体を、たとえばシリコン・オイルのような粘性の高い流体の中につけたと考えて、おさえていた指を同時にはなせば、錘はゆっくりと‘準静的に’動いて、やはり(4)式を最大にする最終位置に近づく。われわれが興味の対象とす

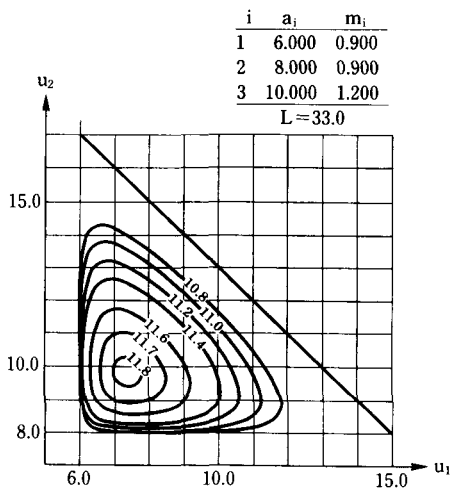


図 5-2

るのは、この最終位置であるから、錘が準静的に動くものとして、これを追ってみよう。

図 5-2 の上で錘の動きを考えれば、錘の準静的な動きを見れば、局所的に見て目的関数(4)が、つねに一番小さくなる方向を向いているはずである。したがって、錘の動きが図 5-2 上で作る軌跡は、

$$\frac{du}{dt} = \text{grad} \psi \quad (5)$$

あるいは、成分ごとに書けば

$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

という微分方程式で表わされる。ここに

$$t: \text{時間} \text{に相当するパラメーター} \quad (7)$$

である。さらに具体的に書けば

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 u_1}{\sqrt{u_1^2 - a_1^2}} - \frac{m_3 (L - u_1 - u_2)}{\sqrt{(L - u_1 - u_2)^2 - a_3^2}} \right] \quad (8)$$

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 u_2}{\sqrt{u_2^2 - a_2^2}} - \frac{m_3 (L - u_1 - u_2)}{\sqrt{(L - u_1 - u_2)^2 - a_3^2}} \right] \quad (9)$$

となる。

この微分方程式を、たとえばRunge-Kutta法など適切な数値的方法によって解けば、その解は等高線と直交しつつ目的関数の丘を登り、この数値計画問題の最適解に収束する。実際、そこでは

$$\text{grad} \psi = 0 \quad (10)$$

となり、微分方程式(5)の右辺がゼロになっている。このようにして最適値を求める方法は、gradient法あるいは勾配法と呼ばれている。

図 5-2 の数値例について、いくつかの初期点から、上の微分方程式の数値解を計算し、解曲線を等高線図上に画いたのが図 5-3 である。解曲線がどれも目的

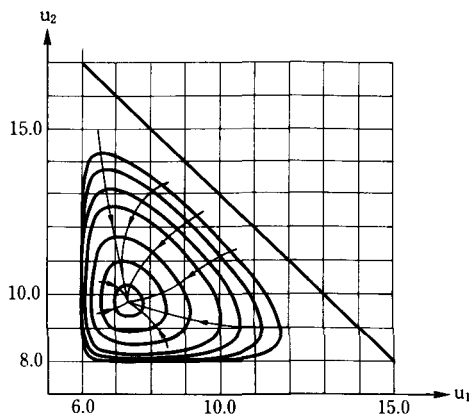


図 5-3

関数の頂上に集まっていくことが見てとれよう。

ところで、この最終値を数値的に求めることだけに目標を絞れば、微分方程式の解曲線をていねいに追う必要はない。グラジエント方向に沿って進み、頂上で収束する趣旨にそって勾配法系のアルゴリズムにはいろいろなヴァリエーションが考えられるし、また試みられている。しかし、本稿ではこれらの取扱いには踏み込まないことにする。

解法 B 緩和法 前の解法では、錘をおさえていた指を同時にはなすことを考えた。しかし、錘を（滑車には触れないで）どれか1つだけ（ m_j とする）おさえて他をはなしてみたらどうだろう？ 錘をおさえても、紐の方は許された範囲では自由に動き得るのだから、紐の長さが $L-u_j$ であるという条件の下で、 m_j 以外の錘が作る1次のモーメントが最大になる。いいかえれば、前節の例題が‘解かれる’ことになる。

そこで、錘を代わる代わるにおさえて、のこりの錘が作る系の1次のモーメントを最大化する操作を繰り返せば、

返せば、やがては系全体の1次のモーメントが最大化されるであろう。こんなやり方がうまく機能するかどうかを試みることにしよう。

このため、3変数 u_1, u_2, u_3 が作る三角座標を用いることにしよう。図5-4に見るように許容領域(1)は、これらの変数が作る3次元空間に浮んだ1枚の正三角形である。そして、ある変数が一定値をとる点の集合は、この正三角形上で平行な直線群をなし、 u_1, u_2, u_3 のそれが互いに60°で交わってこの正三角形上の網目を作る。これを切りとって紙面においたのが、すなわち、三角座標である。三角座標の目盛は、慣れないと読みにくいというものの、もとの3次元空間を思い浮かべれば直ちにわかる。

図5-5に示すのは、目的関数(2)の等高線図を三角座標上に示したものである。この図が結局のところ、図5-2の等高線図を‘ちょっと引きのばして回転したもの’であることは、 u_1, u_2 の許容領域(3)が、図5-4上 u_1, u_2 平面上の小さな二等辺三角形であることから容易にわかるであろう。

さてそこで、1つの変数 u_j を固定し、他を動かして目的関数を最大化するという操作は、三角座標上でいえば、座標軸のどれかに平行な直線を1つ選び、これに沿って、目的関数の値が最大になる点を求めることに他ならない。

いま、 u_1 を固定して、 u_2 および u_3 を動かして最適化したときの u_2 と u_3 の間の関係を求めてみよう。 u_1 を固定してしまえば、の問題は4節問題と同じである。Lagrange関数は

$$\mathcal{L}(u_2, u_3) = \frac{1}{2} \{ m_1 \sqrt{u_1^2 - a_1^2} + m_2 \sqrt{u_2^2 - a_2^2} \}$$

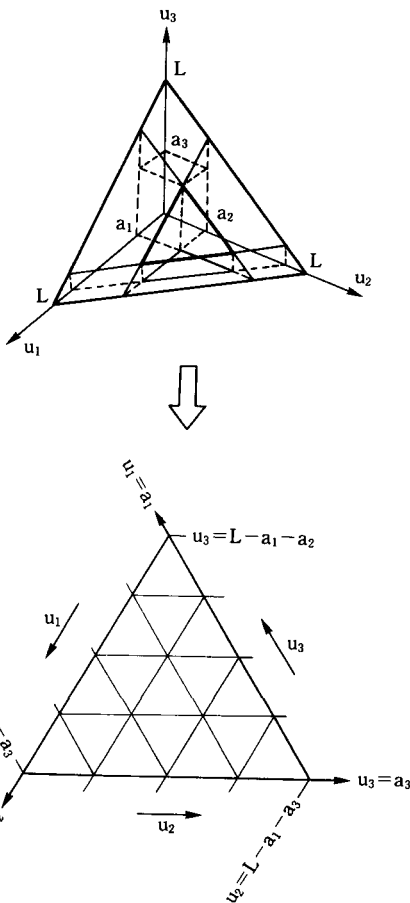


図 5-4

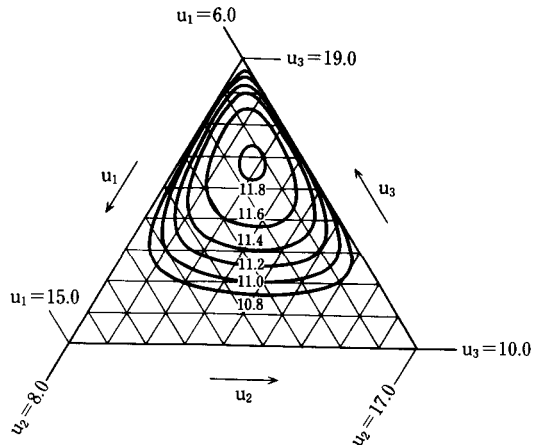


図 5-5

$$+ m_3 \sqrt{u_3^2 - a_2^2} - \lambda(u_1 + u_2 + u_3 - L) \quad (11)$$

となるが、ここで u_1 は定数で、 u_2 と u_3 だけが変数であることに注意しておこう。 u_2 および u_3 で偏微分してゼロとおけば、それぞれ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = \frac{1}{2} \frac{m_2 u_2}{\sqrt{u_2^2 - a_2^2}} - \lambda = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_3} = \frac{1}{2} \frac{m_3 u_3}{\sqrt{u_3^2 - a_3^2}} - \lambda = 0 \quad (13)$$

が得られるから、これから λ を消去すれば、

$$\frac{m_2 u_2}{\sqrt{u_2^2 - a_2^2}} = \frac{m_3 u_3}{\sqrt{u_3^2 - a_3^2}} \quad (14)$$

を得る。さらに整理すれば

$$u_3 = \frac{a_3 m_2 u_2}{\sqrt{(m_2^2 - m_3^2) u_2^2 + a_2^2 m_3^2}} \quad (15)$$

という関係が得られる。(15)式により u_2 が与えられれば u_3 が得られるし、また、

$$u_1 = L - u_2 - u_3 \quad (16)$$

によって u_1 が得られる。こうして得られる u_1, u_2, u_3 を三角座標上にプロットすれば1つの曲線になる。これを

l_1 : u_1 を固定した時の u_2 および u_3 の間の関係を表わす曲線 (17)

と呼ぶことにしよう。 u_1 を固定して、 u_2 および u_3 の最適値を求める操作は、三角座標上 u_1 の値に対応する直線と曲線 l_1 の交点を求めることになる。

全く同様に、

l_2 : u_2 を固定したときの u_1 および u_3 の間の関係を表わす曲線 (18)

l_3 : u_3 を固定したときの u_1 および u_2 の間の関係を表わす曲線 (19)

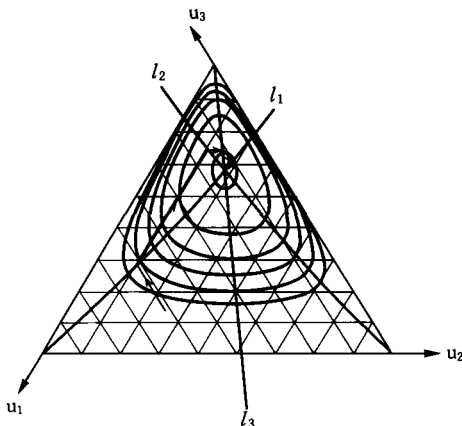


図 5-6

は、それぞれ

$$l_2: u_3 = \frac{a_3 m_1 u_1}{\sqrt{(m_1^2 - m_3^2) u_1^2 + a_1^2 m_3^2}} \quad (20)$$

および

$$l_3: u_2 = \frac{a_2 m_1 u_1}{\sqrt{(m_1^2 - m_2^2) u_1^2 + a_1^2 m_2^2}} \quad (21)$$

と、紐の全体の長さに関する条件から得られる。

u_2 を固定するときには、 u_2 = 一定の直線と l_2 , u_3 を固定するときには u_3 = 一定の直線と l_3 の交点を求めれば、固定した変数以外の変数が最適化されることになる。

三角座標上、3曲線 l_1, l_2, l_3 を書き、この上で変数 u_1, u_2, u_3 を順に固定して他を最適化する操作を行なう過程を示したのが図5-6である。次第に系全体としての最適解に近づく様子が見られる。そしてこの過程は、図5-1の仕掛けにおいて、錘 m_1, m_2, m_3 を順におさえて他をはなすことに対応している。

このように、変数の一部を固定し、のこりの変数に関する最適化を行なう操作を、固定する変数を取りかえつつ繰り返し、系全体の最適解を得ようとする方法を緩和法という。一般的にいって、緩和法が常に系全体の最適解をもたらすという保証はないのだが、多くの実際的な問題については、大体においてうまくいく。

ところで、緩和法において固定する変数の選び方はいろいろである。たとえば、この問題の場合について

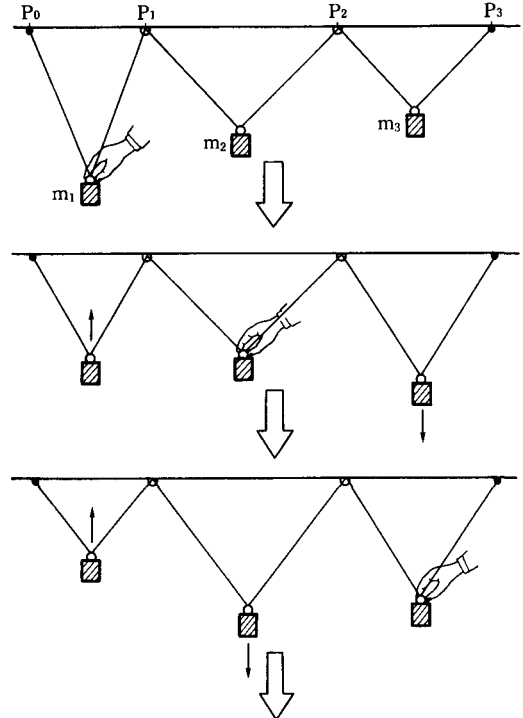


図 5-7

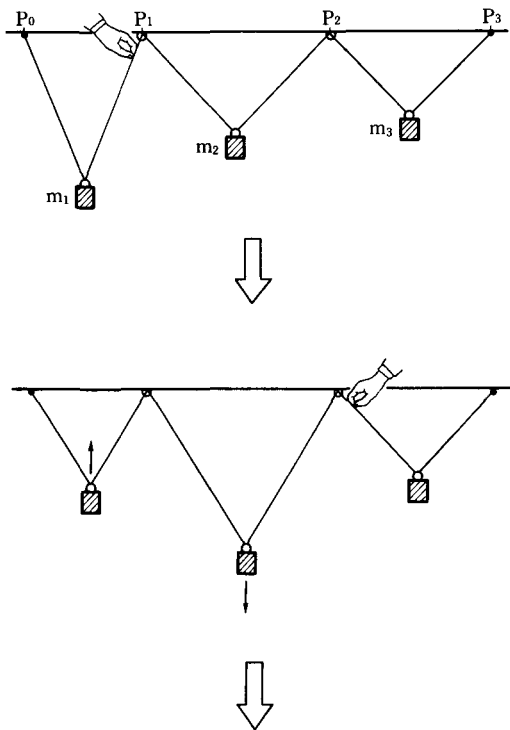


図 5-8

いえは、 u_1 と u_3 だけを交互に固定してもよい。これは、図5-1において、滑車 P_1 および P_2 の所で交互に紐をおさえたりはなしたりする操作を繰り返すことに対応している。(図5-8)これを三角図表上で試みたのが

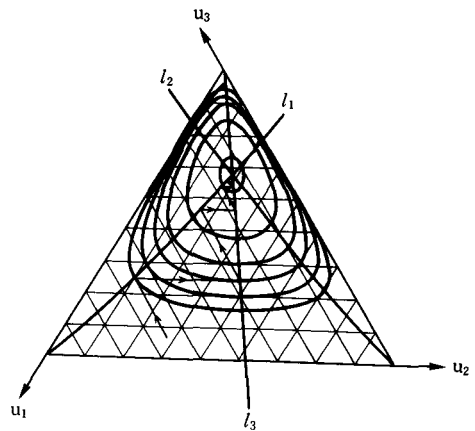


図 5-9

図5-9である。反復の回数は多少多くなるものの、最終的には最適解に近づくことが見てとれよう。

緩和法については、さらにいろいろな変^{グマリエーション}形や改良が考えられる。たとえば、図上の曲線 l_1 , l_2 , l_3 がほとんど直線をなしていることに着目して、このうち1本を選んでこれを特定し、その上に沿って最適化を行なうという考え方も可能である。実際、共役勾配法といわれる方法の中には、このような考え方にもとづくものもあるが、本稿の範囲をこえるので、ここでは詳述しない。