

DEAの解釈と展望

- その2 -

William W. Cooper, 刀根 薫, 高森 寛, 末吉 俊幸

5. 実証データからの推定の問題

統計的回帰分析と DEA の関係を明らかにしようとする研究の過程で、推定に関する新しい原理が関わっていることが明らかになった。図 2 を使って、このトピックに入ることにする。この図において、点 P_1, P_2, \dots, P_8 の座標は、8 個の DMU のそれぞれが使った投入 x と、それに対応する種々の量の産出 y を表す。点 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 は、「生産可能集合」の境界とも呼ばれるフロンティア上にある。この生産可能集合とは、観察された投入量によって達成可能であることが(実証的に)示されたすべての産出量の集合からなるものである。

P_1 はフロンティア上にあるが、 P_2 がこれと同じ投入でより大きな産出をなしているので、DEA⁸ によつては、効率的ではないと評価される。この非効率性は、産出に難点があるので「産出非効率」といわれるべき

ウィリアム・W. クーパー

University of Texas at Austin, College and Graduate School of Business, CBA 5.202, AUSTIN, TEXAS 78712-1175, U.S.A.

とね かおる

埼玉大学大学院政策科学研究科

〒338 浦和市下大久保 252

たかもり ひろし

青山学院大学国際政治経済学部

〒150 渋谷区渋谷 4-4-25

すえよし としゆき

The Ohio State University, College of Business, 1775 College Road, Columbus, OH 43210, U.S.A.

⁸次節の(10)の議論を参照されたい。

ものである。これに対し、 P_6 は、「投入非効率」とみなされる。なぜなら、これと同じ産出をなしながらより少ない投入をなす P_4 との関係で、 P_6 は過剰な投入を示しているからである。

フロンティア上の他の点はすべて効率的である。これらについては、投入を減らせば産出も減るし、逆に、産出を増やしたければ、投入を増やさねばならない。そのような変更は、産出の改善を達成するには投入の方を悪化させねばならないという交換を余儀なくさせ、そのことによって第1節での相対的効率性の定義に照らして効率的である。

フロンティア上にない点は効率的でないが、それらの非効率性の原因と度合いは、(1)式から(5)式への分析から分かるように、異なる DEA モデルによって、違ったやり方で説明され、また、推定される。このことはこれから議論する別の DEA モデルによつても、さらに明らかになる。例として、点 P_6 を取り上げる。効率的フロンティアへ向かって垂直に動くなら、その非効率性を産出の問題に帰することになり、水平に動くなら、過剰投入に帰することになる。フロンティアへ向かった角度を持った矢線は、非効率の原因を投入と産出の両方に帰する。また、別の矢線を引くことが可能であり、種々の投入、産出の非効率性を議論でき、 P_6 の右側の三角形がくずれないようにする必要がある。

ここで、DEA を回帰分析のアプローチと比較してみよう。また「フロンティア回帰」の話題にもふれることにする。破線 A は、これらのデータに通常の最小二乗法回帰(OLS)を当てはめた推定式のグラフである。回帰式の下側にある DMU を非効率として扱えば、点 P_1, P_4, P_5, P_6, P_8 を非効率なものと思なすことになる⁹。 P_4 を除けば、これらの点は、DEA によつて

⁹これは、M. Feldstein, 1968, *Economic Analysis for Health*

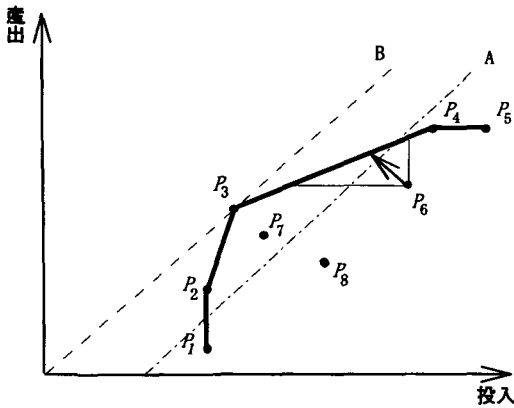


図 2: DEA と回帰分析の比較

も非効率と判定される。しかし、(a) 非効率の量的推定は異なるし、(b) 最小二乗回帰法 (OLS) では、すべての非効率性を産出のみによって判定していることになる¹⁰。もちろん、これだけでは、非効率性評価への回帰分析アプローチのすべてを尽しているわけではない。そこで、ここでは COLS (Corrected Ordinary Least Squares)¹¹ の形に変えてみる。この手法は、図 2 で表すと、回帰直線 A を B にシフトし、すべての観察がこの線上かその下にくるようにする回帰手法を意味している。

R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper and A. Maindiratta (1987) は、DEA が如何に非効率性を判定し計量する能力を有するかを試めするためのシミュレーション研究において COLS の方法を用いてみた。観察データを生成するに当たり介入するテクノロジーや非効率の量が未知であるという前提を除去して、各観察では、既知の関数と既知の非効率の量を使った。COLS の要求条件を満たすために、単一の産出 (すなわち単一の非説明変数) を用いた。この実験では、(a) すべての非効率は産出に帰するように、また (b) データに当てはめる関数形は、観察値を発生したものと一致するように設定した。これらの両仮定とも、回帰分析の方法に有利に結果がでるように意図されたのであったが、それにもかかわらず、COLS からえられた

ものよりも DEA の方がよい結果をもたらした¹²。

この結果については、2つの説明が可能なように見える。まず第一に、データの生成には異なるパラメータ値が使われたということである。その目的は規模の経済性を解明する能力を調べるとともに、すべての技術的非効率を推定する能力を調べられるようにしたことにある。ところが回帰推定値の背後にある理論は、すべてのデータは一つの関数を参照していると仮定しているということである。したがって、原理的に、回帰手法は多種の関数から生成されたデータに応用するには不適切であると考えられる。

二番目の説明の可能性として、DEA における n 回の最適化は、それぞれの観察にできる限り近づくよう意図されていると考えてよい。それに対して、統計的回帰では、すべての観察にできるだけ近づく式を推定する目的で、ただ 1 回の最適化が行われるのみである¹³。

1985 年の *Journal of Econometrics* に発表された Charnes 等による研究 “Foundations of Data Envelopment Analysis” は、これらを含む問題点を解決することを意図している。この論文で指摘したように、もともと DEA の前提となっている線形性等の仮定は、強過ぎ、また限定的過ぎることが分かった。観察値を生成する関数は非線形であってもよいし、多種でもよいし、ひとつの DMU から別の DMU へと異なったものでもよいのである。数学的にいえば、すべての関数は「等張的 (isotonic)」、あるいはもう少し平たくいえば、生産可能集合上で、投入の増加が産出の減少をもたらさないということを仮定するだけでよい。これらの性質が与えられれば、望ましい効率特性を与えるように、データを包絡する一連の支持平面 - 図 2 においてフロンティアを形成する線分 - が生成される。さらに、DEA を使うにあたっては適用する関数形を明確に規定する必要はない。すなわち DEA は「ノン・パラメトリック」である。

Service Efficiency, Chicago Markham Publishing Co., において、英国の病院のパフォーマンスを評価するのに使われたアプローチである。

¹⁰ 回帰と DEA の比較についての議論としては、A. Gallegos (1991)。

¹¹ 参照: J. Richmond (1974)。回帰法によるフロンティア推定の他のアプローチ - “stochastic frontiers” - に関する議論は、Jondrow 等 (1982) に見られる。

¹² より手のこんだ確率的フロンティア回帰モデルを使っただけより精緻な研究としては、Gong, Sickles (1992) を参照されたい。

¹³ COLS のやりかたでは、得られた関係式を、図 2 に示すような具合に、フロンティアに移動する。

6. BCC (Banker-Charnes-Cooper) モデル

図2を使って、(1)(2)式を、以下のBCCモデル¹⁴と云われる双対の線形計画問題と対照させると、より深い洞察が得られる：

主問題：

$$\min \quad \theta_o - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \quad (10)$$

制約：

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_o x_{io} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- \\ y_{ro} &= \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j &= 1 \\ 0 &\leq \lambda_j, s_r^+, s_i^- \end{aligned}$$

ただし、 $i = 1, \dots, m; r = 1, \dots, s,$
 $j = 1, \dots, n$

双対問題：

$$\max \quad \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} - u_o \quad (11)$$

制約：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \nu_i x_{io} &= 1 \\ \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} - u_o &\leq 0 \\ \mu_r &\geq \varepsilon \\ \nu_i &\geq \varepsilon \\ r = 1, \dots, s; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

主問題(1)と(10)を比べると分かるように、両者の違いは、条件 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ が追加されたことである。すべての j についての $\lambda_j \geq 0$ の条件と合わせると、これは、 P_o を評価するにあたり、 $P_j, j = 1, \dots, n$ の座標を結合するときの凸条件を課していることになる。

BCCモデルとCCRモデルの違いについては刀根(1993a, 1993b)に詳細に述べられているのでここでは省略する。さらに、凸条件がないと、(1)のモデルでは、 P_4 を非効率と評価する。

(10)で効率的であると決定される点が、必ずしも、(1)ではそう評価されないことは、明白である。しかし、図2で(1)によって効率的とされる P_3 のような点は、(10)でも効率的とされる。この状況は、一般的に云える - すなわち(1)によって効率的とされる点は、(10)でも効率的とされるが、その逆は云えない。その結果、(1)式が使われた場合は、完全に効率的と評価されるDMUの数は少なくなる¹⁵。

ここで、規模の経済性に関する問題に話を進めると、さらに深い洞察が得られる。まず、次のことをコメントしておく必要がある。厳密な経済分析においては、規模に対する収穫は、技術的な効率性が仮定された場合にのみ、明確な意味をもつ。このことは、図2の場合では、規模の効率性の議論を、点 P_2, P_3, P_4 を結ぶ実線上の点に限定することになる。そういう観点からは、古典的経済学でいう規模の経済性という概念は、価格や費用の情報がない状況での単一産出財のケースに限定されているということを指摘しなければならない。

多種の産出財、投入要素のケースを扱うために、Banker(1984)は、「最も生産的な規模 (Most Productive Scale Size, MPSS)」という概念を導入した。これは、通常の回帰(統計的)アプローチと違って、大局的でなく極所的に解釈されるべきものである。形式的に表現すると、効率フロンティア上で、 (x_{io}, y_{io}) を成分とする点 (X_o, Y_o) は、もし、スカラー $\alpha, \beta > 0$ および $\beta > \alpha$ の下で新しい点 $(\hat{X}_o, \hat{Y}_o) = (\alpha X_o, \beta Y_o)$ に移動することが可能であるならMPSSではない。言い換えれば、もし X_o のすべての成分が α の比率で増加したとき、 Y_o のすべての成分がその比率以上に増加するなら、 (\hat{X}_o, \hat{Y}_o) はMPSSではない。

いま、双対問題(11)に注意を向けて、(2)にはなかった新しい変数 u_o が現れたことに注目しよう。この双対変数は、等式 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ に対応づけられているから、符号制約がない。Banker and Thrall(1992)が証明しているように、この変数は、以下のような具合に、MPSSと関わっている：

1. すべての代替的最適解において、 $u_o^* < 0$ であるとき、また、そのときにのみ、規模に対して収穫が増加型である。
2. すべての代替的最適解において、 $u_o^* > 0$ である

¹⁴Banker, Charnes and Cooper(1984)を表している。

¹⁵異なるDEAモデル間の関係の分析的な扱いについては、Ahn等(1993)、刀根(1993b)を参照されたい。

とき、また、そのときにのみ、規模に対して収穫が減少型である。

3. どの代替的最適解においても、 $u_o^* = 0$ ならば、規模に対する収穫が一定である。

図2を参照して云えば、 P_2 から P_3 にいたる線分は、規模に対する収穫が増加していることを示しており、 P_3 から P_4 にいたる線分は、規模に対する収穫が減少していることを示している。点 P_3 は、規模に対して収穫一定である。したがって、Banker (1984) が議論しているように、モデル(10)、(11)は、規模に対する収穫の評価と技術的効率性の評価とを結び付ける。この理由のために、 P_4 、 P_2 のような点は、(1) によっては効率的とは判定されないが(10)、(11)は、これら2種類の非効率性を区別し、そのことによって、点 P_4 、 P_2 を技術的に効率的と判定し、さらに、望むならば、双対変数 u_o^* を使って分析を規模の経済性へと拡張できるのである。規模の経済性の計算法については刀根(1993b)に紹介されているのでここでは省略する。

7. 加法型モデル

DEA 分析のために、CCR および BCC モデルの他にも、まだいくつかのモデルが開発されている - これらは、異なる DEA モデルに対して、結果がどう変わるかなどの相互チェックの目的の他にも、種々の使い道がある。重要なケースとして、Ahn and Seiford (1993) による米国諸大学の研究があり、「学生数」を産出とした場合、公立大学の方がより効率的であり、「研究指向」を産出とした場合には、私立大学の方がより効率的であることが見いだされている。これらの結論は、一般的に受け入れ易いものであるが、様々な DEA モデルによっても、変わらないものであった - これは、DEA 分析を支持する事実である。私立、公立大学に関する多くの統計的回帰分析では、同一の入力、出力データに対しても、モデルが、例えば線形から対数線形に変わると異なる結論が得られるのとは対照的である。

ここで「加法型モデル」を紹介するが、このモデルはそれ自体として、興味深いものである。ここで議論

する加法型モデルは、次のように定式化できる¹⁶：

主問題：

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \quad (12)$$

制約：

$$-y_{ro} = -\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+$$

$$x_{io} = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^-$$

$$1 = \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

$$0 \leq \lambda_j, s_r^+, s_i^-$$

$$\text{ただし、} \quad i = 1, \dots, m : r = 1, \dots, s, \\ j = 1, \dots, n$$

双対問題：

$$\min \sum_{i=1}^m \nu_i x_{io} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + u_o \quad (13)$$

制約：

$$\sum_{i=1}^m \nu_i x_{ij} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + u_o \geq 0$$

$$\nu_i \geq 1$$

$$\mu_r \geq 1$$

$$r = 1, \dots, s : i = 1, \dots, m : j = 1, \dots, n$$

主問題から、明らかなように、効率性の唯一のテストとして、すべてのスラックがゼロかどうかを調べている。すなわち、 DMU_o は次式が成り立つとき、また、そのときにのみ効率的である¹⁷。

$$\max \sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^- \\ = \min \sum_{i=1}^m \nu_i x_{io} - \sum_{r=1}^s \mu_r y_{ro} + u_o = 0 \quad (14)$$

このモデルには、主、双対問題とも、 ϵ が無い。というのは、加法型モデルでは、そのような非アルキメディアン要素を考える必要がないのである。図3は、非効率性を決めるにあたり、加法型と比率モデルがどう

¹⁶ もうひとつの型の加法モデルで、凸条件 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ をはずしたものがある。これらの2つのクラスの加法モデルの議論は、ちょうど、(1)と(11)に関する議論と平行的なものであるので、ここでは、繰り返さない。詳しい議論は、Banker 等(1989)に見られる。

¹⁷ Charnes and Cooper (1961) の第9章に示しているように、この基準を Charnes-Cooper の効率テストと呼ぶ。

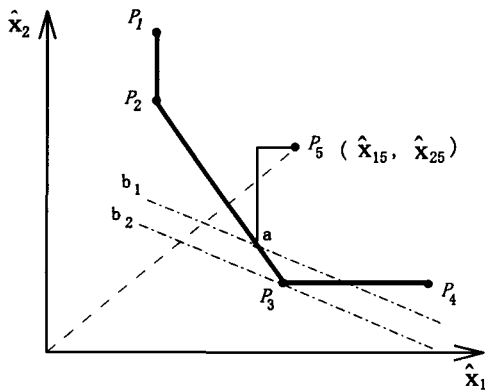


図 3: 単位化フロンティア

違うかを示している。この図では、 X_1 と X_2 の二つの投入要素と、単一の産出財を考えるケースを扱っている。各 DMU について、それぞれの投入量を産出量で割れば、単位産出あたりの投入量、すなわち「投入率」が得られる。図 3 での座標は、このようにして、投入 X_1 , X_2 を投入率 \hat{X}_1 , \hat{X}_2 に置き換えたものである。

図 3 のようにプロットされたデータが与えられたとして、投入率が、 $(\hat{X}_{15}, \hat{X}_{25})$ の DMU₅ のパフォーマンスを評価したいとしよう。これは、効率フロンティア上のある参照点を選んで行われる。ここで、効率フロンティアは、 P_1 から P_3 までを結ぶ直線で示すような「単位化フロンティア (unitized frontier)」で表される。この単位化フロンティアは、種々の異なる量の産出量から導かれている¹⁸。モデル (1) に関連して議論されたように、比率モデルはフロンティア上の参照点を、 θ_0^* の値を通して決めるので、図の原点と点 P_5 を結ぶ放射線 (ray) と単位化フロンティアとの交点 b で決まる。これと対照的に、加法型モデルはスラックの和、 $s_1^- + s_2^-$ を最大化する点 a のような参照点を選び、幾何学的には、 s_1^- の値は P_5 から水平にでている実線であらわされ、また、 s_2^- の値はフロンティアに到達する垂直の実線であらわされる¹⁹。これらの 2 つのモデルは、フロンティア上の異なる点を選んで参照するので、評価される非効率性の量も異なるが、それにもかかわらず、重要なことは、両モデルとも DMU₅ を非効率であると特性づけることである。すなわち、DMU₅ が、

加法型モデル (12), (13) によって効率的であると特性づけられるのは、BCC モデル (10), (11) がそれを効率的であると特性づけるとき、また、そのときのみである。同様のことが、モデル (1), (2) と、凸条件を課さない加法型モデルとの間の関係にも成立する²⁰。

加法型の双対の方、(13) を見ると、すべての投入、産出が正の値を持つという条件は、ここでは、すべての i について $v_i > 1$ 、すべての r について $\mu_r > 1$ を要求する条件に反映されている。これらは目的関数における係数の違いに由来するものである。

さて、図 3 において、点線は「配分的効率性 (allocative efficiency)」の概念を説明する例である。いま、説明を簡単にするために、投入要素 1 と 2 の価格を、それぞれ、 p_1 , p_2 とすると、これらを x_1 と x_2 の量だけ投入することの総費用は、 $p_1 x_1 + p_2 x_2$ である。これらの費用は、図 3 の点線で描写されるような「予算線」と関連づけられる。たとえば、 $b_2 = p_1 x_{13} + p_2 x_{23}$ は P_3 の座標を使って、これらの投入で 1 単位の産出をなす総費用を得ている。これは a での投入にかかる費用 b_1 より低い。よって、 a は技術的に効率的であるけれども、配分的に効率的ではない。かくして、費用最小化が目的であるなら、これらの価格のもとでは、 a から P_3 へと動くというトレードオフは効率的フロンティア上において実行する価値があるのである。

さて、この節をおわるにあたって、もうひとつ重要なトピックである「不変性 (invariances)」について議論したい。比率形式 (9) の議論でも述べたように、Charnes and Cooper (1985) は、同じ正の定数のかけ算が、各 DMU _{j} , $j = 1, \dots, n$, に適用される限り、凡関数の最適値は測定単位の変化に関して不変であることを示した。このことを、「正の変換のもとでの不変性」と呼ぶ。

最近になって、Ali and Seiford (1991) は、(12), (13) が、「座標の平行移動のもとでの不変 (translation invariant)」であることを示した。すなわち、(12), (13) 式のどの投入、産出に任意の定数を加えても、結果に影響しないことを示した。このことをより正確に述べるために、(12) 式の制約を次のように置き換える：

$$-(y_{r0} + d_r) = -\sum_{j=1}^n (y_{rj} + d_r) \lambda_j + s_r^+$$

¹⁸したがって、これは経済学でいうところの「等量曲線 (isoquant)」, すなわち、産出量が等しい水準の曲線とは異なる概念である。

¹⁹これらの長さは、Charnes and Cooper (1961) の Appendix A に述べられている l_1 -metric で記述される。

²⁰これらの解析的展開と証明、および異なる DEA 間の他の諸関係については、Ahn 等 (1989)、刀根 (1993b) を見られたい。

$$\begin{aligned}
-(x_{i_0} + k_i) &= \sum_{j=1}^n (x_{ij} + k_i) \lambda_j + s_i^- \quad (15) \\
1 &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \\
0 &\leq \lambda_j, s_r^+, s_i^- \\
\text{ただし, } & j = 1, \dots, n: r = 1, \dots, s, \\
& i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

ここで、 d_r, k_i は任意の定数でよい。なぜなら、凸性の条件を各制約に適用すると、これら定数は各制約から消えるので、同じ λ_j の値が (12) をも (15) をも、同様に満たし、解の集合は、上の変更に影響を受けないのである。したがって平行移動のもとで不変である。

この性質は、負の投入や産出の存在の可能性を扱うにあたって、重要である。たとえば、P. L. Brockett and W.W. Cooper は、テキサス州の州保険局が保険会社を評価するのに DEA を利用するのを助けたが、その際に、保険会社のいくつかで利益がマイナスのものがあつた、上の結果が無かつたならば、これは厄介な事態であつたと思われる。Charnes 等 (1992) は、投入について類似の状況を扱っており、そこでは、投入のひとつである不良貸付に対する年間許容額を「増加させる」

必要が生じた。これは予備金を増やすためであり、そうしないとリスク対策が不適切であつたからである。

この不変性を使って、(12) の目的関数を次のように変形できる：

$$\sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{\hat{y}_{r_0}} + \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{\hat{x}_{i_0}} \quad (16)$$

ここで、 $0 < \hat{y}_{r_0} = y_{r_0} + d_r, r = 1, \dots, s$ および $0 < \hat{x}_{i_0} = x_{i_0} + k_i, i = 1, \dots, m$ である。これら調整のための定数は、分母がゼロになる問題を解消するためである。こうして、(12) の目的関数は、各投入、産出の測定単位の影響を受けない「相対的偏差」という内容に書き直されたわけである。

この節を終わるにあたり、主問題 (12) は、片側の偏差だけを許す「ゴール・プログラミング」と解釈できるということに触れておきたい。こうして、各相対的なゴールに見合つての偏差というように表現し直すと、一般的なゴール・プログラミングの問題領域に入って行く。ただし、凸条件 $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ が定式化の一部として入っていることに注意する。ゴール・プログラミングについては、Charnes and Cooper (1977) を参照されたい。