

## 非線形計画法 (1)

— テキストの紹介 —

八巻 直一, 矢部 博

## 1. はじめに

非線形計画法は、数理計画法の中核のひとつをなす分野で、つまりはORの主要な武器群ということが出来ます。しかしながら、コンピュータの実用化と共に目ざましい活躍をし続けた線形計画法に対して、非線形計画法の実用化は遅れること数十年、ごく最近になってようやくその実力を発揮し始めた段階といえましょう。

非線形計画法とは、以下のような問題の構成と、それを数値的に解く手法のことを指します。

## 非線形計画問題

$n$  変数の非線形関数  $f(x)$  (目的関数) を、等号制約条件

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

と不等号制約条件

$$g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l$$

のもとで、最小化せよ。

上の問題で、目的関数と制約条件がすべて  $x$  の1次関数であれば、いわゆる線形計画問題となりますが、ひとつでも非線形関数があれば、非線形計画問題となります。

やまき なおかず システム計画研究所

〒150 渋谷区桜丘町 2-9 カサヤビル

やべ ひろし 東京理科大学工学部

〒162 新宿区神楽坂 1-3

本連載は、非線形計画法についてこれから知識を仕入ようと思っている方に、有用な文献のご紹介をするとともに、初歩的な理論と数値解法のあらましを解説することを目的としています。

第一回は、古今のよいテキストのご紹介です。第二回では、非線形計画問題を構成する実例をご紹介し、第三回および第四回で、若干の数学的な理屈と、数値解法のあらましを述べるつもりです。

さて、非線形計画法についての研究は、古くはニュートン法や最急降下法があり、その後、制約条件付きの問題に対する数値解法へと発展してきました。例えば、最近話題の、線形計画法に対する内点法は、非線形計画法における内点法の研究の成果の反映と見ることも可能でありましょう。その間、多くの教科書が出版されましたが、他の分野に比べるとその数は非常に少ないものです。また、教科書といっても、ある程度の数学的レベルが要求されるものがほとんどで、いわゆる初心者用のものが見あたらないことが、悩みの種です。これは、分野の特性として仕方のないことかもしれませんが、企業などで非線形計画法を導入する際に、ネックとなる可能性があることは、いなめない事実でしょう。実務家のための、実用的で丁寧な教科書の出現が待たれるところです。

本稿では、教科書として適当と思われる名著をご紹介することを第一の目的としております。もし、これから非線形計画法を、企業の様々な意思決定の武器として導入しようと計画なさっているならば、ここにご紹介する名著の中から、適当と考えられるものを、とにかく読破されることがよいでしょう。また、卒業研究や、一歩進んで大学院で、研究者として非線形計画法を研究対象として選ぶならば、ここに挙げたテキストの他に、線形代数と関数解析のテキストが必要だと思えます。

ご紹介する文献の分類として、次の色分けに対して一応網羅するよう努めました。

1. 理論的な記述を丁寧にしているもの。
2. 数値計算の記述に重点をおいているもの。
3. プログラムを具体的に示しているもの。

## 2. 教科書として意義のある文献

ここでは、教科書として用いることができる書物を紹介します。

### 【非線形計画法】

関根智明訳，培風館，1972。（原著は O. L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, 1969.）

本書は非線形計画法を勉強するときに必要な基礎理論を網羅したもので、大学の専門課程以上の予備知識を前提としています。本書では、凸関数に関する基礎理論と、最適性および双対性がかなり詳細に解説されています。記号の使い方などは、初心者にはやや分かりにくいところがありますが、慣れば素直に読み進むことができるでしょう。

まず最初は、線形不等式と二者択一の定理です。非線形系に入る前提として、線形不等式系における重要な定理です。二者択一の定理を丁寧に解説することから始めている点で、このテキストは重要であるといえましょう。

次に、凸集合の性質を丁寧に解説しています。ここでは、分離定理が重要です。凸関数に関する解説も丁寧ですが本書のハイライトは、非線形計画に対する最適性の解説でありましょう。もちろん双対性についても、丁寧な解説がなされています。これから非線形計画法を学ぼうという方には、バイブル的書物といえるでしょう。

### 【非線形最適化問題の反復解法】

関根智明訳，培風館，1976。（原著は，S.L.S.Jacoby, J.S.Kowalik and J.T.Pizzo, *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Prentice-Hall, 1972.）

本書は、いささか古い部類に属するテキストではあります。従って、1980年代の重要な成果は記載されていないし、本書の段階では発見されていない事柄が、当たり前ですがそのままになっています。しかし、一方

では、本書で紹介されて、その後衰退し、省みられなくなったいくつかの手法が解説されていて、興味深い読物になっています。これらの埋もれた手法を知ること、歴史的に意味があるばかりでなく、そこに込められたアイデアが今後いつの日にか、再び脚光を浴びるかもしれないがゆえに、重要といえましょう。

本書の構成は、その後の数値解法のテキストの標準の流れとなる、きわめて常識的なものであります。まず基礎的な知識、問題の定義、そして一変数の最適化問題に進み、主要な記述は、制約のない最適化と制約のある最適化についてやされています。

勾配を用いない最適化手法のなかでは、2次計画法による逐次近似法が珍しいでしょう。共役傾斜法では超記憶傾斜法を取り上げていますが、このアイデアは最近の並列計算を意識した手法に継承されています。

制約のある最適化手法では、最小二乗変換法が紹介されています。この手法は、その後あまり話題になっていませんが、有望なアイデアを含んでいるように思われます。

なお、ここに紹介された手法は、丁寧な実験結果と考察が添えられているので、読者はそこから大いに刺激されるでしょう。

### 【Nonlinear Mathematics】

T.L.Saaty and J.Bram, McGraw-Hill, 1964.

本書は、非線形数学の古典です。内容的には、後半に非線形微分方程式や制御問題が含まれているので、本稿の主題に沿った記載は主として前半に集中しています。古い本では、本書のように最適化と制御や微分方程式とを一緒に解説することが、一般的なようです。

さて、本書では、最初に関数解析の基本的な事項を、かなり丁寧に解説しています。そして、非線形方程式に対する、ニュートン法をはじめとした、勾配法に関する非常に丁寧な解説があります。

ここでご紹介すべき非線形最適化の項では、本書の刊行された頃までの代表的な手法が、筆算で追えるような簡単な例題を付けて解説されているのが特徴といえましょう。2次計画法における Frank and Wolfe の方法や、Zoutendijk の許容方向法、および Beal の方法、あるいは、1次関数を非線形制約のもとに最適化する問題に対する切除平面法など、理論的にも当時のアイデアを知る上でも重要なものが含まれてい

ます。

### 【Nonlinear and Dynamic Programming】

G.Hadley, Addison-Wesley Publishing Company, 1964.

本書も、古典的な名著です。後半は Dynamic Programming の解説なので、本稿の主旨に沿った内容は、前半の部分ということになります。

本書の構成で特徴的なのは、確率的要素の入った最適化問題や整数計画法に、早くも立ち入っていることです。例によって、はじめは数学的準備をおこなっていますが、ここに割と丁寧に線形計画法を解説していることも、本書の特徴といえましょう。また、各章には演習問題が付いているので、理解の程度を自ら確かめることができるでしょう。

非線形最適化の基礎の項では、かなり実際的と思われる例題を紹介しつつ、最適性などの基本的知識を理解できるように配慮されています。本書で興味深いのは、目的関数と制約条件が、それぞれ各変数毎の関数で表される、いわゆる separable function である場合を、丁寧に解説していることと、確率的要素の含まれた問題について取り上げている点です。確率的要素の含まれた問題は、最近では投資の問題などがあるにも拘らず、このような問題を解説した文献は多くはなく、本書は貴重な資料といえましょう。

整数計画法の記述も、豊富な例題と、丁寧な解説で、面白くかつよく理解できる記述となっています。勾配法では、信頼領域法の萌芽が認められるのが、興味深い点です。ただし、主として1970年以降に起こった勾配法における大きな発展については、当然ではありませんが記載はないので、テキストとしては本書だけで完結しないことは、しかたがありません。

### 【数理計画法】

志水清孝, 相吉英太郎, 昭晃堂, 1984.

標準的な教科書であり、読みやすいテキストです。凸集合、凸関数、二者択一定理などの数学的予備知識が用意されていますが、理論の部分では、無制約最適化問題および制約条件付き最適化問題のための最適性条件が述べられています。定理も、数値解法の部分を読むために必要な事柄だけに絞られているのが、読みやすい理由のひとつかもしれません。数値解法部分は、無制約最適化問題のための最急降下法、共役方向法・勾配法、ニュートン法、準ニュートン法が、そし

て、制約条件付き最適化問題のためのペナルティ法、乗数法、射影法、逐次2次計画法などが述べられています。

以上は標準的な教科書によく書かれている内容ですが、本書の特徴的な点は、非線形最適化問題の安定性の理論と感度解析、微分不可能最適化問題の最適性条件と数値解法、無制限最適化問題の数値解法の記述にあります。

### 【非線形最適化の理論】

福島雅夫, 産業図書, 1980.

本書は、数理計画法のシリーズ(講座数理計画法)の中の一冊です。したがって、できればシリーズの他の文献も合わせて、全部を手元に置いておくことをお勧めします。本書は、手法の解説は省いてすべて理論の解説となっています。凸解析、最適性など他の書物と同様な内容を扱っていますが、一段と丁寧に書かれています。また、劣微分を解説している点でも、特徴的です。後半では、感度解析や双対性の解説に続いて、微分不可能な最適化問題を取り扱っています。

本書は、その常識的でかつ先進的な構成と内容で、和書の中では非常によいテキストとなっています。また、本シリーズ全体は力作揃いであり、ORの勉強をする上で、格好の教科書シリーズであると申せましょう。

## 3. これから研究を始めようとする方へ

ここでは、卒業研究や大学院で、これから非線形計画法を研究しようとする学生諸氏や、企業でこれから非線形計画法を適用する計画のある方に、適当と思われる文献をご紹介します。

### 【非線形計画法】

今野浩, 山下浩, 日科技連, 1978.

本書は日本における非線形計画法のテキストの、古典中の古典であり、名著として名高いものです。刊行の時期が1970年代なので、1980年代以降の成果は記載されていませんが、それ以前の、勾配法に関する主要な結果は網羅されているといつてよいでしょう。とくに、準ニュートン法に関する解説は、群を抜くものとなっています。準ニュートン法は、現在のところ非線形最適化手法の最有力手法のひとつであり、この道

に入るならば必ずマスターしなければなりません。

本書は、前半で凸集合や凸関数の理論、および最適性と双対性の解説をおこない、後半で、最適化手法を解説しています。最適化手法は、いろいろなものを網羅するという姿勢ではなく、勾配法に属する手法を系統的に解説することを主眼としているようです。もちろん、勾配法以外の手法にも触れていますが、それらにはそう多くの頁を割いてはいません。ただ、トピックスとして、凸2次計画問題と相補掃き出し法や、不動点計画法などに言及しているのが興味深い点です。

前半の理論編は、Mangasarian の非線形計画法の解説に勝るとも劣らない内容であり、錘などの数学的な道具を駆使して、最適性の条件を述べているのが特徴的です。手法編での特徴は、やはり勾配法に関する解説にあります。ニュートン法からはじまり、制約条件付きの問題に対するいくつかの手法が、統一的に手際よく解説されていて、非常に読み易く、内容の高さにもかかわらず理解し易いテキストとなっています。準ニュートン法の解説は、系統的かつ近代的な解説であり、読者は十分な知的刺激を味わうことが出来るでしょう。制約条件付きの最適化手法では、乗数法の解説が貴重なものです。乗数法は、制約条件付き最適化手法のエポックとなった手法といえます。この手法の出現で、はじめて我々は、実用的な計算時間で解が得られる手法を手にしたといえるかもしれません。その後、逐次2次計画法やその他のアイデアが提案されて、乗数法は主役の座を降りた感がありますが、その有用性はいまでも定評があります。

本書では、演習問題の他、各章の末尾に筆者の考察が載っている点でも、特徴的です。この中には、研究の方向を示唆する貴重なコメントも含まれており、研究を志す諸氏には、重要な記事といえましょう。

#### 【 Nonlinear Programming: Analysis and Methods 】

M. Avriel, Prentice-Hall, 1976.

本書の構成は、その後のテキストの標準的な内容のお手本ともなったものです。すなわち、理論編として、数学的基礎、凸集合と凸関数、および最適性と双対性が解説され、手法編では一変数の最適化、微分を用いない最適化、微分を用いる最適化、およびいくつかのトピックスと言った具合です。

手法編では、準ニュートン法のかかなり詳しい解説があります。また、制約条件付き最適化問題では、制約

のない場合の拡張として系統的な解説があります。そして、自然な応用として、2次計画法の解説が続きます。本書もまた、分かりやすい例題を適宜挙げて、具体的に手法の挙動を示すことによって、読者の理解を助けるように工夫されています。やや難解な点もあるテキストですが、例題のおかげで、よく理解することが出来るでしょう。

#### 【 Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations 】

J.E.Dennis, Jr. and R.B.Schnabel, Prentice-Hall, 1983.

無制約最適化問題および非線形方程式に対する数値解法として、ニュートン法の考え方に基づいた解法の、基本的な事柄について丁寧に解説しています。教科書としてのみならず、この分野の研究者にとっても非常に役に立つ本であると申せましょう。ニュートン法ならびに準ニュートン法に関する説明が、要領よくまとめられています。

本書は4つの部分から出来ています。1番目の部分で線形代数、多変数の微積分などの数学的準備があり、反復法の基本事項を勉強するのにも向いているでしょう。2番目の部分はニュートン法の説明に費やされています。大域的収束性を実現するための手段として、直線探索法や信頼領域法が紹介されています。また、局所的収束性や2次収束性、超1次収束性に関する内容も丁寧に書かれており、超1次収束性のからくりが大いに参考になるでしょう。3番目の部分は準ニュートン法の解説です。代表的な更新公式を用いた解法の収束性が論じられています。そして、4番目は非線形最小2乗問題など、ヘッセ行列が特別な構造を持っている場合の準ニュートン法に関する記述です。

なお最後に、本書で説明した数値解法のソフトウェアの解説が付録として載っています。これは、大学院の学生に解法の内容を理解させるために教材用として、Schnabelが開発したもので、Dennis-Schnabel codeとして知られているものです。

#### 【 Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables 】

J.M.Ortega and W.C.Rheinbolt, Academic Press, 1970.

本書は、はっきりいって、やや難解です。本書の構成は、他の文献とは少し異なっていて、手法の紹介に

とどまらず、収束性などの理論的側面を重視したものになっています。基礎的な数学知識に続いて、関数解析の解説がありますが、他のテキストよりもやや高度な内容となっています。とくに作用素に関する解説は重要であり、本書の骨格のひとつをなすものでしょう。手法の解説も非常に系統的であり、ニュートン法からセカント法へと結び付けた解説は、自然であるといえましょう。さらに、セカント法のアイデアの帰結として、準ニュートン法が自然に導かれることを読み取ることによって、手法の全体を統一的に理解することができます。

本書で特徴的な記事は、ニュートン法などが現在の近似解の情報のみを用いて、次のステップへ進む操作を行うのに対して、前 $k$ ステップの情報から次のステップへ進む情報を得る手法の解説があることです。微分方程式の数値解法でいうところの、多段法に相当します。多段法のアイデアは、今後の研究の方向に多くのヒントを与えるものであると考えられます。後半の収束性に関する様々な解説も、本書の特徴の一つです。

#### 【Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques】

A.V.Fiacco and G.P.McCormick, John Wiley and Sons, 1968.

本書は、有名な SUMT を中心とした解説書です。SUMT は内点ペナルティ法に属する最適化法ですが、1970 年代以降他の性能のよいアルゴリズムが出現すると、歴史的意義を残してその役割を終えたかに見えました。ところが、線形計画法において、内点ペナルティ法を用いたアルゴリズムが、センセーショナルなデビューを飾るに及んで、再び脚光を浴びる存在になった感があります。本書では、数学的な基礎理論を済ませると、内点法と外点法の理論的解説を詳細におこなっていることが、特徴です。最後に、著者らの作成した有名なソフトウェア SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) を用いた例題が解説されています。内点ペナルティ法および外点ペナルティ法、なかんずく SUMT は、最適化技法の重要な分野知識として、ぜひ読んでおかなければなりません。本書はそのバイブルであります。

なお、本書は最近 SIAM から復刻版が出版されています。

#### 【Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods】

D.P.Bertsekas, Academic Press, 1982.

本書は乗数法に関する本であり、Bertsekas 自身の研究成果も含めて、この分野の研究をまとめた本です。第1章は最適化問題の数値解法一般の事柄に関する紹介で、この部分だけを読むことも勉強になるでしょう。第2章で等号制約条件付き最適化問題のための乗数法を、第3章で不等号制約条件付き問題の乗数法をそれぞれ扱っています。そして第4章では、「正確なペナルティ関数法」が説明されています。こうした内容を丁寧に扱っている本が少ないだけに、興味深いテキストとなっています。

#### 4. プログラム編

ここでは、実際のソフトウェアを軸に、理論と応用を解説した文献をご紹介します。非線形計画法を、てっとりばやく理解するには、この種の文献がよいのかも知れません。

#### 【FORTRAN77 最適化プログラミング】

茨木俊秀, 福島雅夫, 岩波書店, 1991.

本書は、最近までの最適化手法をほとんどすべて網羅した文献として、貴重なものです。しかも、そのすべてに FORTRAN77 のプログラムが付けられていて、さらに注文すれば、フロッピーディスクに収納されたそれらのプログラムを、手に入れることができます。

各手法には、理論的にもかなり詳細な解説が加えられているので、単なる実用書ではなく、研究者が資料とするのにも耐える内容を備えています。この中では重要な手法として、非線形最適化に対する逐次2次計画法、線形相補問題に対する Lemke 法、2次計画法に対する Goldfarb and Idrnani 法、および整数を含む線形計画法に対する分枝限定法による解法が挙げられるでしょう。もちろん本書には、他にも興味深くかつ実用的な多くの手法が紹介されています。ひとつの文献の中で、数多くの手法とそのプログラムが、このように系統的に解説され、プログラムも公開された例はないと思われますので、貴重なテキストでしょう。また、著者らの独自の研究成果も、要所要所に配置されて、手法をより堅固なものにしています。

#### 【パソコン FORTRAN 版 非線形最適化プログラミング】

ASNOP 研究会, 日刊工業新聞社, 1991.

本書は, 我々の書いた書物なので, ここにご紹介することはやや恥ずかしいのですが, 実用書ということであえて挙げさせていただきます. 本書は準ニュートン法に関連する解説と, それの応用としての, 逐次2次計画法および拡張ラグランジュ乗数法に限定された内容となっています. 準ニュートン法に関しては, 解説に加えて我々の研究結果が列挙されています. また, 制約条件付きの最小二乗問題に対する独自の手法が記載されていることも, 特徴となっています. この手法が非常に優れたものかどうかはともかくとして, 実用性は大いに認められるでしょう.

注文すれば, フロッピーディスクに収納されたソフトウェア (ASNOP という) を手に入れることができます. ASNOP はサブルーチンライブラリではなく, プリプロセッサであり, 問題を定義するとそれに応じた FORTRAN ソースを得ることができます.

#### 【最小二乗法による実験データ解析: プログラム SALS】

中川徹, 小柳義夫, 東京大学出版会, 1982.

本書は, UP 応用数学選書7として出版されたものです. 最小二乗法は, ORに限らず広くデータ解析に用いられる手法です. もちろん, ORの世界でも多くの問題が最小二乗問題として定式化されることが知られています. 本書は, 東京大学大型計算機センターから公開されている, 最小二乗法のプログラム SALS の開発者が, 最小二乗法の解説と SALS の解説を併せて書物にまとめたものです. 最小二乗法を丁寧にかつ最新情報も含めて解説した文献は, 和書では殆ど見られないことを考えると, 本書は是非手元に欲しい本といえましょう.

SALS を利用できる方にとっては, 本書をマニュアルとして用いることもできます. その場合, 著者の専門家としての注意が随所に現われるので, 誤ったデータ解析を防止することに役立つでしょう.

#### 【Test Examples for Nonlinear Programming Codes】

W.Hock and K.Schittkowski, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.187, Springer-Verlag, 1981.

非線形最適化問題の数値解法を使用したり開発したりするときには, その解法の性能評価をする必要が

あります. そうした場合に, 解の情報がわかっているテスト問題が, おおいに役に立ちます. 本テキストと, 次の2つは代表的なテスト問題集で, この分野の解法比較でよく引用されるものです.

#### 【More Test Examples for Nonlinear Programming Codes】

K.Schittkowski, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol.282, Springer-Verlag, 1987.

#### 【Testing unconstrained optimization software】

J.J.Moré, B.S.Garbow and K.E.Hillstrom, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol.7, 17-41, 1981.

## 5. おわりに

ここにご紹介したいいくつかの文献は, それぞれ有意義であるとは思いますが, 我々の知らないもっと優れた文献が存在することは, 大いに考えられます. また, ここには紙面の都合でご紹介出来なかった, 優れた文献もかなりあったことを申し添えておきたいと思います. とくに, ここで配慮したのは, 日本語以外の文献については, 是非あげなければならないと考えられる名著以外は, それが重要な文献でも割愛しました. 手に入りにくいことや, やはり日本語に比べれば入門書としては一般に難しいことが, その理由です. たとえば, プログラムに関するものは, 欧米にはかなりありますし, 電子媒体でもずいぶん出回っています. これらについては, 特集を組んでご紹介するとよいと思われるくらいです.

また, ずいぶん古い文献も取り上げましたが, それらは必ずしも手に入りやすくはありません. しかし, 当時の名著であり, 歴史的にも取り上げるべきと考えました.

なお, 本文の記載のかなりの部分は, 東京大学大型計算機センターのセンターニュース Vol.26 No.1 p.85-95 (1994) に, 同様の主旨で我々が執筆した記事と重複していることを, お断りしておきます. できれば, 両方の記事をあわせてお読みいただければと思います.