論文・研究レポート

CFAを用いた対数型DEAモデル

平瀬 啓太, 山口 俊和, 合田 充利, 福川 忠昭

1. はじめに

DEA (Data Envelopment Analysis) [4] は, 企業体などの多入力多出力システムの相対的な効率性を総合的に評価する手法である.

従来のDEAでは, 入力－出力平面で一般的に言われているS字型の生産関数を表すことができなかった(後述の図1参照). これに対し, Bankerらが入出力値を対数変換して取り扱う区分的線形対数型(以下対数型と略す)モデル[2]を提案している. 本研究では, この対数型DEAモデルに, 効率的フロンティアを拡張する手法であるCFA(Constrained Facet Analysis)[3]の考え方を適用した新たなDEAモデルを提案する. 提案するDEAモデルでは, 限られた領域だけに存在する従来の効率的フロンティアではなく, 全領域に存在する効率的フロンティアが得られる.

この新しい効率的フロンティアを用いることにより, 従来のDEAモデルがもつD効率値に関する様々な問題が解決され, より妥当な効率性の評価が可能になる. また, 場合によっては改善情報を得ることができなかった従来のモデルの改善案とは異なり, どのような場合でも改善可能な情報を得ることができる.

2. 既存のDEAモデル

DEAでは, 評価対象をDMU (Decision Making Unit) と呼ぶ. 各DMUは各々同種類の複数の入力値と複数の出力値を持つ. 入力値, 出力値ともに正値であり, 入力値は小さい値, 出力値は大きい値が効率の面から望ましいものとする.

いま, n個のDMUがあり, 各DMUはm種類の入力値と, k種類の出力値を持っているものとする. DMU_j のi番目の入力値を x_{ij}, r番目の出力値を y_{rj} とする.

評価対象となるDMUの入出力値の集合から, 入出力値のとりうることのできる範囲である生産可能集合を考えることができる. 基本的なDEAモデルのうち, スケール効果を考慮したDEAモデルであるBCC (Banker, Charnes, Cooper) モデル[1]の生産可能集合は, 次式によって示される.

$$x_i \geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \qquad (i=1,2,\cdots,m) \quad (1)$$

$$y_r \leq \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \qquad (r=1,2,\cdots,k) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad (3)$$

$$\lambda_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\cdots,n) \quad (4)$$

生産可能集合の境界面を効率的フロンティアと呼び, 効率性の評価に用いる. 効率的フロンティア上にあるDMUは, 入力に関する余剰と出力に関する不足がないと考えられ, D効率的なDMUと呼ばれている. 逆に効率的フロンティア上にないDMUは, 入力の余剰, あるいは出力の不足があり, D非効率的なDMUと呼ばれている.

効率性の尺度としては, 評価対象のDMUの入力値を一律縮小, あるいは出力値を一律拡大して, 生産可能集合内でどこまで縮小あるいは拡大できるかといった値で表される. もし, これ以上縮小・拡大ができないのなら, そのDMUは効率的フロンティア上にあるのでD効率的と評価され, 縮小・拡大が可能なら, D非効率的と評価される.

ひらせ　けいた　東京理科大学
やまぐち　としかず　東京理科大学
〒162 新宿区神楽坂1-3
ごうだ　みつとし　ソニー（株）
ふくかわ　ただあき　慶應義塾大学
受理 94. 3. 7　再受理 94. 6. 27

この縮小率そのもの，あるいは拡大率の逆数をD効率値と呼ぶ．D効率値は0から1の値を取り，その値が1になるDMUは，D効率的なDMUと評価される．また，効率的フロンティアまで一律縮小・拡大した値そのものは，そのDMUの改善案と考えることができる．

D効率値は，評価対象のDMUごとに線形計画問題を解くことによって得られる．評価対象のDMUをDMU_aとすると，BCCモデルの線形計画問題は次のようになる．

(BCC)

最小化

$$P_1\theta_a - P_2(\sum_{i=1}^{m} s_i^+ + \sum_{r=1}^{k} s_r^-) \quad (5)$$

制約条件

$$\theta_a x_{ia} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^+ = 0 \quad (i=1,2,\cdots,m) \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^- = y_{ra} \quad (r=1,2,\cdots,k) \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad (8)$$

$$\lambda_j, s_i^+, s_r^- \geq 0, \quad \theta_a \text{ は符号無制約} \quad (9)$$

なお，P_1, P_2は付順係数$(P_1 \ggg P_2)$であり，θ_aは入力に関する縮小率，s_i^+, s_r^-は，生産可能集合の不等式に関するスラック変数にあたる．

この問題の最適解θ_a^*がD効率値になる．D効率値が1のDMUのうち，最適解のスラック変数であるs_i^{+*}, s_r^{-*}がすべて値を持たないもののみがD効率的と評価される．そうでない場合には，たとえD効率値は1であってもD非効率的と評価される．効率性の指標であるD効率値だけで評価を行うのではなく，スラック変数の値も加味した上で効率性を評価しなければならない．また，DMU_aがD非効率的である場合，D効率的になるための改善案$\overline{x_{ia}}, \overline{y_{ra}}$はそれぞれ次のようになる．

$$\overline{x_{ia}} = \theta_a^* x_{ia} - s_i^{+*} \quad (i=1,2,\cdots,m) \quad (10)$$

$$\overline{y_{ra}} = y_{ra} - s_r^{-*} \quad (r=1,2,\cdots,k) \quad (11)$$

これらの式からわかるように，従来のDEAモデルでは，改善案を得る際にもD効率値だけではなく，最適解のスラック変数の値も利用しなければならない．これは，効率的フロンティアが限られた領域にしか存在しないため，入出力値を一律縮小・拡大した値が，その領域からはずれた場合に，スラック変数でその値を補正する必要があるためである．

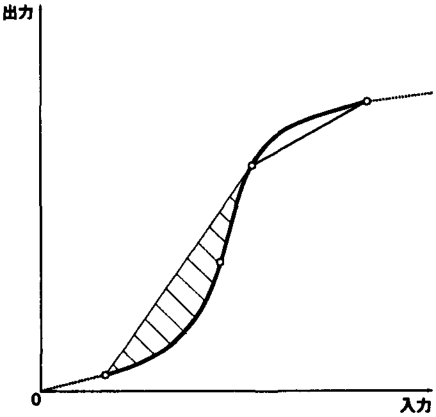

図 1: S字型の生産関数とBCCモデル

3. 対数型DEAモデル

一般的に経済学では，入力－出力平面でのスケール効果は図1の太線部分のようなS字型の生産曲線としてあらわされるといわれている．この生産曲線はDEAの効率的フロンティアに相当するものである．BCCモデルはスケール効果を考慮したモデルになっているが，S字型の生産曲線を持つ場合の生産可能集合の窪んだ部分（図1参照）を正確に表すことはできない．

この問題に対して，Banker らによって対数型のDEAモデルが提唱されている[2]．入出力値を対数変換した値で取り扱うことにより，従来のBCCモデルでは不可能であったS字型の生産曲線を表すことができる．この対数型モデルの定式化を以下に示す．なお以後 ^ の付いている記号は対数をとった値とする．

(L-DEA)

最大化

$$P_1\widehat{\gamma}_a + P_2(\sum_{i=1}^{m} \widehat{s_i^+} + \sum_{r=1}^{k} \widehat{s_r^-}) \quad (12)$$

制約条件

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{x_{ij}}\lambda_j + \widehat{s_i^+} = \widehat{x}_{ia} \quad (i=1,2,\cdots,m) \quad (13)$$

$$-\widehat{\gamma_a} + \sum_{j=1}^{n} \widehat{y_{rj}}\lambda_j - \widehat{s_r^-} = \widehat{y}_{ra} \quad (r=1,2,\cdots,k) \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \quad (15)$$

$$\lambda_j, \widehat{s_i^+}, \widehat{s_r^-} \geq 0, \quad \widehat{\gamma_a} \text{ は符号無制約} \quad (16)$$

この問題では$\widehat{\gamma}_a$が一律拡大率に相当する．最適目的関数値$\widehat{\gamma_a^*}$の対数値を元に戻し，さらに逆数をとった値である$(\widehat{\gamma_a^*})^{-1}$は，D効率値と同様に0から1の値をとる．ここでは，この値を‘L-D効率値’と名付けることにする．L-D効率値が1で，かつスラック変数である$\widehat{s_i^{+*}}, \widehat{s_r^{-*}}$のすべてが0であるとき，そのDMUはL-D効率的なDMUであるとし，そうでなければL-D非効率的なDMUであるとする．対数型DEAモデルでは縮小，拡大は減算，加算で表される．入出力値のスケーリングによっては対数値が負になることもあるが，そのような場合も含めてL-D効率値は不変である．

4. 対数型DEAモデルの拡張

DEAモデルでは，入力の縮小率，出力の拡大率を同一の変数で取り扱い，入力，出力ともに固定項目（制御不能項目）が選べるような定式化が望ましい．そのような定式化ができれば，小さい方が望ましい項目を入力側に，大きい方が望ましい項目を出力側にした上で，産出に関する項目のみを固定して，投入に関する項目の変化で効率性を評価することが可能となる．また逆の方法での評価や，投入，産出すべてに関して自由な変化を許すといった従来の定式化では扱えなかった考え方も可能になる．また，このモデルは入力の全項目固定，あるいは出力の全項目固定といった従来の定式化も含んでいる．

本研究ではBankerらの対数型モデルに対して，上記の考え方を導入した対数型DEAモデルを提案する．その定式化は次のようになる．

(L-DEA I/O)

最大化

$$P_1\widehat{\gamma}_a + P_2\left(\sum_{i=1}^{m}\widehat{s_i^+} + \sum_{r=1}^{k}\widehat{s_r^-}\right) \tag{17}$$

制約条件

$$\widehat{\gamma_a} + \sum_{j=1}^{n}\widehat{x_{ij}}\lambda_j + \widehat{s_i^+} = \widehat{x_{ia}} \quad (i \notin F(I)) \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\widehat{x_{ij}}\lambda_j + \widehat{s_i^+} = \widehat{x_{ia}} \quad (i \in F(I)) \tag{19}$$

$$-\widehat{\gamma_a} + \sum_{j=1}^{n}\widehat{y_{rj}}\lambda_j - \widehat{s_r^-} = \widehat{y_{ra}} \quad (r \notin F(O)) \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\widehat{y_{rj}}\lambda_j - \widehat{s_r^-} = \widehat{y_{ra}} \quad (r \in F(O)) \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \tag{22}$$

$$\lambda_j, \widehat{s_i^+}, \widehat{s_r^-} \geq 0, \quad \widehat{\gamma_a} \text{ は符号無制約} \tag{23}$$

ここで，$F(I), F(O)$はそれぞれ入力，出力の固定項目の添字集合である．また，効率性の評価方法はBankerらのモデルと同じである．

5. 拡張した対数型DEAモデルへのCFAの適用

本研究では，上述の拡張した対数型DEAモデルに対してCFA[3]の考え方を適用したモデルを提案する．

DEAでは，効率性の評価を行う際に，D効率値のみでは効率的，非効率的の判断を下せないという問題がある．この問題に対して，効率的フロンティアの裾を延長して，従来のモデルより広い効率的フロンティアを構築するというCFAが提案されている．これにより，D効率値のみで評価を行えるようになる．

図2のように，出力値がすべて一定である2入力1出力の例の場合，従来のDEAでは効率的フロンティアが直線AD上，DE上にしか存在しないため，B,Cは対応する効率的フロンティアがなく，D効率値のみでは評価ができないDMUである．しかし，CFAにより効率的フロンティアを破線部分にまで延長することで，対応する効率的フロンティアが構築され，B,CもD効率値のみで効率性を評価することができる．

しかしながら，このCFAはスケール効果を考慮しないCCR(Charnes,Cooper,Rhodes)モデルで固定項目がない場合にしか用いることができない．BCCモデルや，固定項目がある場合には評価できないことがある．図2の例でも，破線部をさらに延長すると負の領域になってしまう．DEAでは一般に入出力値が正値であるとしているので，これに反することになる．また，対応する効率的フロンティアが負になってしまう

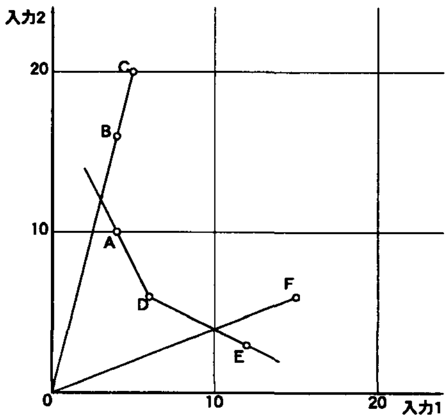

図2: 2入力1出力(同一出力値)の例

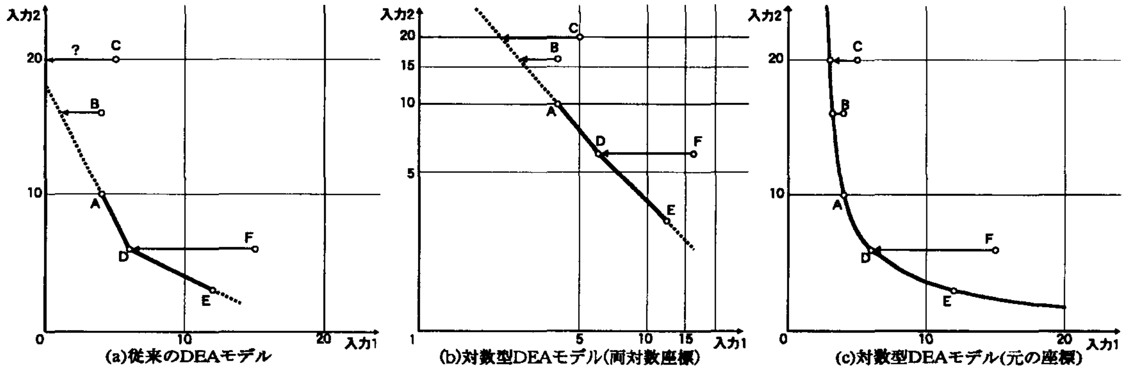

図 3: 2 入力 1 出力 (同一出力値, 入力 2 固定) の例

と，いくら入力を縮小しても，効率的フロンティアには到達しない (図 3(a))．そのため，非効率的とわかっても，D 効率値を与えることができず，改善案も提示することができない．このように，固定項目がある場合や BCC モデルには，CFA を用いても，改善案を与られない場合がある．

このような問題点に対して，対数型 DEA モデルに CFA の考えを適用すれば，負の領域に入ることなく正値全領域に広がる効率的フロンティアを構築することができる．この新たな効率的フロンティアを用いれば，固定項目があった場合でも，すべての DMU に対してスラックのない効率値と，改善案を提示することでき，かつ，BCC モデル以上にスケール効果を考慮した効率値を得ることができる．

これは，たとえ得られた対数値が負の値になったとしても，対数を元に戻した値では正値を維持していることを利用している．例えば，先ほどの例の 2 つの入力値を両対数座標にした座標上で効率的フロンティアを直線的に延長した場合 (図 3(b)) では，両対数座標上なのでどんな効率的フロンティアの値も元に戻せば負の値はとらない．また，座標系を元に戻してみると，延長された効率的フロンティアが双曲線になるために，負の値をとることがなくなったことがわかる (図 3(c))．

これにより，固定項目が存在する場合にも，一つの制御可能な入出力項目さえあれば，すべての DMU に対して，一律縮小・拡大率のみで，効率性の評価を行うことができ，改善案を提示することが可能になる．

具体的な分析手順は次のようになる．

［ステップ 1］ すべての DMU について (L-DEA I/O) を解く．L-D 効率的な DMU，スラックの値のない L-D 非効率的な DMU については，$(\widehat{\gamma_a^*})^{-1}$をその L-D 効率値とする．

［ステップ 2］ ステップ 1 で L-D 効率値が決定できなかった DMU に対して，効率的フロンティアを構成する DMU のλの非負条件をはずすことで，効率的フロンティアを，従来の内分点から構成される面に，外分点を加えることにより拡張する．

また，効率的フロンティア面は，入力項目と出力項目を加えた数の次元の超平面になる．その面を構成するためにはその次元数だけの L-D 効率的な DMU が必要になる．そのため，L-D 効率的な DMU を新たにいくつか選ぶ必要がある．この数を u とする．u の数は (L-DEA I/O) の解において値を持ったスラック変数の数であり，$u=$ (入力項目数) $+$ (出力項目数) $-$ (既に値を持つλの数) である．

新たに加わる DMU の候補となりうるのは，すでにλに値を持っている DMU 以外の L-D 効率的な DMU である．この候補の数を p とする．一般に $p>u$ である．

この候補から，求めるべき DMU の組み合わせを得るため，${}_pC_u$個のすべての組み合わせについて，次の連立方程式を解く．

$$\widehat{\gamma_a}+\sum_{j\in E}^{n}\widehat{x_{ij}}\lambda_j+\widehat{s_i^+} = \widehat{x_{ia}} \quad (i\notin F(I)) \quad (24)$$

$$\sum_{j\in E}^{n}\widehat{x_{ij}}\lambda_j+\widehat{s_i^+} = \widehat{x_{ia}} \quad (i\in F(I)) \quad (25)$$

$$-\widehat{\gamma_a}+\sum_{j\in E}^{n}\widehat{y_{rj}}\lambda_j-\widehat{s_r^-} = \widehat{y_{ra}} \quad (r\notin F(O)) \quad (26)$$

表 1: 入出力値

DMU 名	入力	出力	入力 (log)	出力 (log)
A	1.75	2.31	0.56	0.84
B	3.06	5.35	1.12	1.68
C	9.36	9.36	2.24	2.24
D	7.08	7.08	1.96	1.96
E	4.05	1.75	1.40	0.56
F	1.75	1.75	0.56	0.56

表 2: 各 DMU についての線形計画問題の解

DMU 名	最適解	入力スラック	出力スラック
A	1.000	0.000	0.000
B	1.000	0.000	0.000
C	1.000	0.000	0.000
D	0.757	0.000	0.000
E	0.432	0.000	0.278
F	1.000	0.000	0.278

$$\sum_{j\in E}^{n} \widehat{y_{rj}}\lambda_j - \widehat{s_r} = \widehat{y_{ra}} \quad (r \in F(O)) \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \tag{28}$$

ただし，Eは組み合わせでによって決められたλの添字集合である．

［ステップ 3］ 得られた$(\widehat{\gamma_a^*})^{-1}$の中での最大値を L-D 効率値とする．

ここで得られる L-D 効率値は従来のモデルのようにスラック変数の値によることなく，1 であれば L-D 効率的な DMU，そうでなければ L-D 非効率的な DMU と評価することができる．また，L-D 非効率的な DMU が効率的になるための改善案は次のようになる．

$$\overline{x_{ia}} = (\gamma_a^*)^{-1}x_{ia} \quad (i \notin F(I)) \tag{29}$$

$$\overline{x_{ia}} = x_{ia} \quad (i \in F(I)) \tag{30}$$

$$\overline{y_{ra}} = \gamma_a^* y_{ra} \quad (r \notin F(O)) \tag{31}$$

$$\overline{y_{ra}} = y_{ra} \quad (r \in F(O)) \tag{32}$$

なお，これまで報告されている DEA の事例研究では，入出力項目の数はそれほど多くないので，［ステップ 2］における u の値は，あまり大きくなることはなく，組み合わせの数も実用に支障がない程度に収まるものと考えられる．

6. 数値例

1 入力 1 出力の数値例に提案した方法を適用してみる．なお，ここでは，出力を固定項目として考えることにする．各 DMU の入出力値と，それに対して対数を取った値をを表 1に示す．

［ステップ 1］ DMU$_A$について，次の (L-DEA I/O) を解く．

最大化

$$P_1\widehat{\gamma_A} + P_2(\widehat{s^+} + \widehat{s^-}) \tag{33}$$

制約条件

$$\widehat{\gamma_A} + 0.56\lambda_A + 1.12\lambda_B + 2.24\lambda_C + 1.96\lambda_D + 1.40\lambda_E + 0.56\lambda_F + \widehat{s^+} = 0.56 \tag{34}$$

$$0.84\lambda_A + 1.68\lambda_B + 2.24\lambda_C + 1.96\lambda_D + 0.56\lambda_E + 0.56\lambda_F - \widehat{s^-} = 0.84 \tag{35}$$

$$\lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D + \lambda_E + \lambda_F = 1 \tag{36}$$

$$\widehat{\gamma_A}\text{は符号無制約}, \lambda_{A-F}, \widehat{s^+}, \widehat{s^-} \geq 0 \tag{37}$$

この問題の解は，$\widehat{\gamma_A^*} = 0$なので，一律縮小率$(\widehat{\gamma_a^*})^{-1}$は 1 になる．スラック変数$\widehat{s^{+*}}, \widehat{s^{-*}}$は値を持たないので，DMU$_A$は L-D 効率的な DMU と評価され，L-D 効率値は 1 になる．

以下同様にして他の DMU についても線形計画問題を解いた結果を表 2に示す．DMU$_A$,DMU$_B$,DMU$_C$は一律縮小率が 1 でスラック変数に値を持たないので L-D 効率的な DMU であり，DMU$_D$は一律縮小率が 1 ではないが，スラック変数に値を持たないので，L-D 効率値は 0.757 である．これに対して DMU$_E$,DMU$_F$はスラック変数に値を持つのでスラック変数のない L-D 効率値を得るためにステップ 2 に進む． ［ステップ 2］ DMU$_E$については，(L-DEA I/O) の解ではλ_Aが値を持っていたので，それ以外に新たにλの候補になりうるのは DMU$_A$以外に L-D 効率的な DMU である DMU$_B$,DMU$_B$のλに相当するλ_B,λ_Cの 2 つである．しかし，値を持ったスラック変数は 1 つなので，この 2 つの変数についてそれぞれ連立方程式を解く．

(λ_Bについての連立方程式)

$$\widehat{\gamma_{AB}} + 0.56\lambda_A + 1.12\lambda_B = 1.40 \tag{38}$$

$$0.84\lambda_A + 1.68\lambda_B = 0.56 \tag{39}$$

$$\lambda_A + \lambda_B = 1 \tag{40}$$

表 3: L-D 効率値

DMU 名	L-D 効率値	評価
A	1.000	L-D 効率的
B	1.000	L-D 効率的
C	1.000	L-D 効率的
D	0.757	L-D 非効率的
E	0.358	L-D 非効率的
F	0.830	L-D 非効率的

(λ_Cについての連立方程式)

$$\widehat{\gamma_{AC}} + 0.56\lambda_A + 2.24\lambda_C = 1.40 \quad (41)$$

$$0.84\lambda_A + 2.24\lambda_C = 0.56 \quad (42)$$

$$\lambda_A + \lambda_C = 1 \quad (43)$$

［ステップ 3］ これら 2 つの連立方程式の解のうち，γについては，対数値では$\widehat{\gamma^*_{AB}} = 1.03, \widehat{\gamma^*_{AC}} = 1.18$ となる．この値の対数を元に戻して逆数をとって一律縮小率に相当する値にすると，$(\gamma^*_{AB})^{-1} = 0.358, (\gamma^*_{AC})^{-1} = 0.309$ となる．最大値を L-D 効率値とすることから L-D 効率値は 0.358 となる．この値はスラック変数の値を持たない完全な一律縮小値であるので，L-D 効率的になるための改善案は次のようになる．

$$\overline{x_E} = (\gamma^*_E)^{-1}x_E = 4.05 \times 0.358 = 1.45 \quad (44)$$

$$\overline{y_E} = y_E = 1.75 \quad (45)$$

同様にしてについてDMU_Fについてステップ2,3を適用し，L-D 効率値0.830を得る．表3に最終的なL-D効率値を示す．この数値例の結果を図示すると図4のようになる．

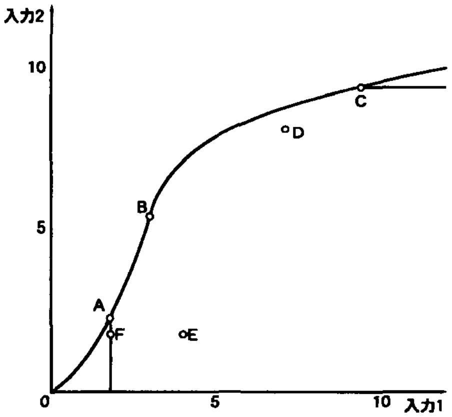

図 4: 数値例の図示

7. おわりに

本研究では，まず，従来の対数型DEAモデルに対して，より汎用性を高めた拡張モデルを提案した．つぎに，そのモデルに CFA の考え方を適用して，全領域に広がる効率的フロンティアを構築する手法を示した．これにより，スラック変数の値を持たない一律縮小・拡大値のみの等質な L-D 効率値が得られ，入出力に固定項目がある場合でも必ず改善案を得ることができる．これによって，すべてのDMUに対して平等に効率値・改善目標を与えることが可能となった．

なお，本研究では入力-出力平面で S 字型の効率的フロンティアが表せる点でBCC型の対数型DEAモデルに CFA の考え方を適用したが，同様の方法でCCR型のモデルにも適用が可能である．

参考文献

[1] Banker,R.D., A.Charnes, W.W.Cooper : " Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis" , Management Science, pp.1078-1092, Vol.30, No.9(1984).

[2] Banker,R.D., A.Maindiratta : "Piecewise Logliner Estimating of Efficient Production Surfaces" , Management Science, pp.126-135, Vol.32, No.1(1986).

[3] Bessent,A., W.Bessent, J.Elam : "Efficiency Frontier Determination by Constrained Facet Analysis" , Operations Research Society of America, pp.785-796, Vol.36, No.5(1988).

[4] Charnes,A., W.W.Cooper, E.Rhodes : " Measuring the Efficiency of Decision Making Units" , European Journal of Operational Research, pp.429-444, Vol.2(1978).

[5] 刀根　薫： "DEA のモデルをめぐって" ，オペレーションズ・リサーチ誌, pp.34-40, Vol.38, No.1(1993).

[6] 刀根　薫：「経営効率性の測定と改善ー包絡分析法 DEA によるー」，日科技連出版社，(1993).