A Study on the Capacitated Traveling Salesmen Location Problem

大竹　徳成
（東京理科大学工学研究科経営工学専攻　現所属：住友化学工業㈱）
指導教官　平林隆一教授

1．はじめに

近年物流問題として配送路を求める問題（Routing Problem）と配送拠点を求める問題（Location Problem）が重要視されている．これら2つの問題に対し，それぞれ独立にさまざまな解法が提案されている．しかし，これらの間には相互に深い関係があり，これら2つの問題を同時に考慮したLocation-Routing Problem（LRP）が近年盛んに研究されている[3]．本研究の目的は，LRPに対して，解法を提案することである．

本論文では，LRPのひとつであるCapacitated Traveling Salesmen Location Problem（CTSLP）を取り上げた．まず，CTSLPをグラフを用いて表現し，一般的なグラフにおいて成り立つ最適地点の性質を示した．この性質から，最適地点の候補を点だけに限定することができる．しかしながら，CTSLPの部分問題として，$\mathcal{NP}$-hardな問題を何度も解かなければならないので，CTSLPを解くのは困難である．そこで，与えられたグラフの各点が最大次数3である木のCTSLPを取り上げる．そして，隣接する2点の間に存在する性質を用いることによって，本問題に対する多項式時間の解法を提案する．

2．問題の定義

$G=(N,E)$ を点集合 N（$|N|=\mathrm{n}$），枝集合 E からなる無向グラフとする．ここで，無向グラフ G は自己閉路，並列枝のいずれをも含まないものとする．各点 $i\in N$ では，既知の確率 p_i によって発生する非負の需要量 D_i をもつ．この既知の確率 p_i に対して，点 i の需要量 D_i が k となる確率を $p_i(k)$ とする．すなわち，$p_i(\mathrm{k})=Pr(D_i=k)$ である．需要量 D_i の確率分布は，離散でかつ他の点とは独立であるものとする．さらに，各点の最大需要量は，K とする．したがって，点の需要量の組合せは $(K+1)^n$ 個存在する．枝 $(i,j)\in E$ に対し，$d(i,j)$ を非負の距離とする．

点の需要量の組合せをリスト $L=(D_1,D_2,\cdots,D_n)$ とする．また，リストの全集合を $\mathscr{L}$ と表わすものとする．交互に並んだ点と枝からなり，その要素数が有限である列（$n_0,e_1,\cdots,e_j,n_j$）をwalkと定義する．ここで，枝 e_i の端点は点 n_{i-1} と n_i である．特に，$n_0=n_j$ であるwalkをclosed walkと呼ぶ．ある与えられた正数 Q（$\geq K$）とリスト L に対して，正の需要量をもつ点は少なくとも1つのclosed walkに含まれ，各closed walkに含まれる点上の需要量の和が高々 Q であるとき，G 上のclosed walksの集合は，L に対して実行可能であると定義する．

そのとき，CTSLPは，

(1) 任意の L に対して，地点 X が，すべての実行可能なclosed walkに含まれ，

(2) 任意の L に対して実行可能なclosed walksの距離の和と L の発生確率との積の和を最小にする G 上の1地点 X を求める問題である．

CTSLPを解くには，与えられたあるリスト L と1地点 X に対して，条件(2)から，L に対する実行可能なclosed walksの距離の和は，最小化されなければならない．L におけるclosed walksに対する距離の和の最小値は，Vehicle Routing Problem with split delivery（VRP）[3]を解くことによって得られる．この最小値を $T_L(X)$ とし，このときの実行可能なclosed walksを最適なclosed walksと呼ぶことにする．さらに，リスト L の発生確率 P_L は，$\prod_{i\in E}P_i(D_i)$ を計算することによって得られる．

これらの記号を用いることによって，CTSLPは，

$$g(X^*)\leq g(X)=\sum_{L\in\mathscr{L}}P_L\cdot T_L(X)$$

である1地点 X^* を求める問題として表現できる．1地点 X に対して $g(X)$ を期待距離，そして X^* を最適地点と呼ぶことにする．

3．結　果

最適地点 X^* に対して，次の定理が成り立つ．

Theorem. 1 最適地点が点上に存在する．

この定理から，最適地点の候補として，G の点だけを探索すればよいことがわかる．しかしながら，CTSLP の部分問題として，何度も VRP を解かなければならないので，CTSLP を解くのは困難である．

以下本論文では，扱うグラフを各点の最大次数が3である木とする．

ここで，X を与え，X を根とする根付き木として与えられたグラフを扱う．任意の点 i に対して，$V_i(X)$ を点 i と点 i の子からなる点集合とする．さらに，任意のリスト $L=(D_1, D_2, \cdots, D_n)$ に対して，$W_i^L(X)$ を $V_i(X)$ に含まれる点の需要量の和とする．すなわち，$W_i^L(X)=\sum_{j\in vi(X)} D_j$ である．

このとき，次の Lemma が成り立つ．

Lemma. 2 与えられたリスト L と X に対して，最適な closed walks に含まれる枝 $(i,\ j)\in E$ の回数は，$2\cdot\min(\lceil \frac{W_i^L(X)}{Q} \rceil,\ \lceil \frac{W_j^L(X)}{Q} \rceil)$ である．

この Lemma から，木のすべての枝を探索することによって，L に対する最適な closed walks を $O(n)$ 時間で求めることができる．しかしながら，最適地点 X^* を求めるためには，すべてのリスト $L\in\mathscr{L}$ に対して，最適な closed walks を求めなければならない．

ここで，G において，ある隣接する2点を $s,\ t$ とする．枝 (s, t) を取り除くことによって得られるグラフは，2つの連結成分 $G_s=(N_s, E_s)$ と $G_t=(N_t, E_t)$ とにわかれる．ただし，$s\in N_s (t\in N_t)$ とし，$N_s(N_t)$ 中の点を端点とする枝集合を $E_s(E_t)$ とする．

また，ある点集合 $S=\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ に対して，$h(i_1), \cdots, h(i_m)$ を $h(i_j)=h(i_{j-1})\cup\{i_j\}$ $(h(i_1)=\{i_1\})$ である点集合 S の部分集合とする．ここで，$h(i_j)$ と非負の整数 r に対して，$f(h(i_j), r)$ を $h(i_j)$ に含まれる点の需要量の総和が r となる確率とする．すなわち，

$$f(h(i_j), r)=\sum_{L\in\mathscr{L}^1} P_L$$

$$\text{where } \mathscr{L}^1 = \{L\in\mathscr{L} \mid \sum_{k\in h(ij)} D_k=r\}.$$

このとき，$h(i_j)$ と $h(i_{j-1})$ との間には，次の関係式が成り立つ．

$$f(h(i_j), r)=\sum_{k=0}^{\min(K,r)} p_1(k)\cdot f(h(i_{j-1}),\ r-k)$$

この関係式を用いることによって，$r=0, \cdots, K|S|$ に対する $f(S, r)$ を $O(K^2|S|^2)$ 時間で計算することができる．このとき，隣接する2点 s と t に対して，次の定理が成り立つ．

Theorem. 3 任意の隣接する2点 s と t に対して，次の等式が成り立つ．

$$g(s)=g(t)+\sum_{i=0}^{K\cdot|Ns|}\sum_{j=0}^{K\cdot|Nt|}(f(N_s, i)\cdot f(N_t, j) \times \{\lceil \frac{j}{Q} \rceil-\lceil \frac{i}{Q} \rceil\}\cdot 2\,d(s, t)).$$

この等式から，隣接する2点 s と t とに対する期待距離 $g(s)$，$g(t)$ の差は，$O(K^2n^2)$ 時間で計算できる．よって，すべてのリスト $L\in\mathscr{L}$ に対する最適な closed walks からなる最小値を求めることなしに，隣接する2点に対する期待距離の差が求められる．

グラフは木を扱っているので，すべての隣接する2点を探索するのに $O(n)$ 時間かかる[2]．以上から，グラフ G において，すべての隣接する2点に対してこの定理を適用することによって，$O(K^2n^3)$ 時間で最適地点を計算することができる．

4．おわりに

本論文では，LRP のひとつである CTSLP をとりあげた．この CTSLP に対して，一般的なグラフにおいて成り立つ最適地点の性質を示した．この性質から，最適地点の候補を点だけに限定することができる．

しかしながら，CTSLP の部分問題として，何度も VRP を解かなければならないので，CTSLP を解くのは困難である．そこで，扱うグラフとして，各点の最大次数が3である木を取り上げた．そして，ある与えれた点集合に含まれる点上の需要量の和とその発生確率を計算できる新しい手順を用いることによって，本問題に対して多項式時間の解法を提案した．

参考文献

[1] O. Berman and D.Simchi-Levi, "Minisum Location of a Traveling Salesman," *Networks*, 16, 239-254, 1986.

[2] T. H. Cormen, C. E. Leiserson and R. L. Rivest, Introduction to Algorithms, McGraw-Hill, New York, 1990.

[3] B. L. Golden and A. A. Assad, Vehicle Routing : Methods and Studies, North-Holland, Amsterdam, 1988.