ファジィ線形計画と ファジィ環境下における確率的推移システム

藤田　敏治
（九州大学大学院理学研究科数学専攻　現所属：同大学院数理学研究科博士後期課程）
指導教官　川崎英文助教授

1．はじめに

この論文では，ファジィ数理計画におけるいくつかの問題を扱っている．ファジィ線形計画およびファジィ多目的線形計画，それとファジィ評価関数を持つ確率的推移システムである．また，ファジィ（多目的）線形計画問題を解く際必要となるクリスプ（ファジィに対し，ファジィでない通常のものをクリスプと表現する）な多目的線形計画に関する結果も含む．それでは，以下それぞれの結果について述べる．

2．多目的線形計画問題の解の特徴付け

多目的線形計画問題を考える際，その評価の基準として目的関数の空間に順序をいれて考える．この順序として，たとえば目的関数の空間を R^nとした場合 $C \subset R^n$を錐とし次のものを用いる．

$$x, y \in R^n \text{ に対して} \qquad x \leq y \iff y - x \in C$$

現在までに多目的線形計画の分野では，この C として acute な錐（その閉包が原点と半開空間に含まれる錐）を考え，順序が半順序の公理を満たす際の解法のみが与えられている．ここでは，C として一般の錐を考え，解法を与えた．まず，この C により与えられる順序が一般には半順序の公理をも満たさないため，解の定義をより一般的な形で与え，次に解の特徴付け定理を与えた．特に C が線形不等式系で与えられる（acute とは限らない）閉凸多面錐のときには，acute な錐によって与えられる順序に関する多目的線形計画問題に変換できることを示した．その結果，従来の方法（[5]）を用いて解全体を求めることが可能である．

3．ファジィ線形計画

ファジィ線形計画に関しては，これまでにその定式化にあたり複数の方法が提案されているが，われわれは制約式や目的式の係数としてある種のファジィ数を考えて，それをクリスプな問題へ変換するというアプローチをとった．Ramík and Římánek は，制約式に対してこの方法をとっている [4]．また，古川 [2] により目的関数も含めてその係数に L-ファジィ数を考えた際の結果が与えられている．ここでは古川の考えにもとづき，係数として用いられるファジィ数の一般化，および多目的の場合についての結果を与える．

まずファジィ数を定義する．ファジィ数は，そのメンバーシップ関数が R 上 $[0,1]$ の値をとる関数で，center と呼ばれる一点 m でのみ 1 の値をとり，m 以下の部分では広義単調増加，m 以上の部分では広義単調減少であるとする．つまり，“だいたい m くらい” という概念を表わすファジィ集合である．ところで一般のファジィ数という概念は，あまりに抽象的で計算上扱うのは困難である．よって，もう少し構造のはっきりした L-R ファジィ数というものを導入する．それは，メンバーシップ関数がある与えられた関数 L および R で表わされるもので，L が center 以下の部分の形を決定し，R が center 以上の部分を決定する．この L および R は shape function と呼ばれる．また，形状は shape　function で与えられるが，その広がりは deviation parameter α, β で柔軟に決めることができる．また L-R ファジィ数は，shape function を与えた際，m および L 側と R 側の α と β により定まるので，パラメータ表現で $(m, \alpha, \beta)_{LR}$ と表わされる．

次に，ファジィ数の順序関係を定義する．それは，center 間に大小関係がつき，かつ center 間のある一点を境にしてメンバーシップ関数の大小関係が逆転するときにのみ比較可能というものである．この順序に関し，L-R ファジィ数は半順序集合となる．さらに，この順序に関し特徴付け定理が得られており，ファジィ数の大小関係はパラメータに関するクリスプな線形不等式系で表される．

以上で準備は整ったので，いよいよファジィ線形計

画問題を考える．

Minimize $\tilde{c}_1 x_1 \oplus \tilde{c}_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{c}_n x_n$

subject to

$\tilde{a}_{i1} x_1 \oplus \tilde{a}_{i2} x_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{in} x_n \leq \tilde{b}_i,\ \ i=1, 2, \cdots, m$

$x_j \geq 0,\ \ j=1, 2, \cdots, n$

ここで目的式および制約式の係数はすべてL-Rファジィ数，変数は実数とする．またファジィ数どうしの和，正数倍は通常の定義どおり，すなわちパラメータ表現した際，成分どうしの和，および各成分との積とする．なお，shape functionは，同一の式内でさえ同じであれば何種類用いてもかまわない．

まず実行可能解の全体をSとする．Sを定めるファジィ線形不等式系は，順序の特徴付け定理によりクリスプな線形不等式系に変換されることがわかる．次にMinimizeの意味だが，ファジィ数に対し導入した半順序に関する極小元を求めることとする．このとき，順序の特徴付け定理によりファジィ線形計画問題の解全体は，R^n上の閉凸多面錐Kで与えられる順序に関する，Sの極小元全体と一致することが示される．この極小元は，対応するクリスプな多目的線形計画問題を解けば求められるが，ここで前節の結果が必要となる．なぜなら，このKに関する順序は半順序の公理さえも満たさず，よって従来の方法をそのまま適用できないからである．最後に目的関数が複数になったファジィ多目的線形計画問題であるが，これも同様の考え方により，前節の結果を用いて解が求められる．

4．ファジィ環境下における確率的推移システム

ファジィ評価関数を持つ確率的推移システムが最初に考えられたのは，Bellman and Zadeh [1] においてである．この論文は，ファジィ環境下における意志決定法として基礎となる考えを提案しており，その後の議論に大きな影響を与えてきた．しかし，その中の確率的推移システムに関する誤りをわれわれは [3] で指摘し，新たな方法を提案している．ここでは，その方法をより広い問題に対して適応可能とするとともに，数値計算をする上で効果的な方法を与える．

それでは，まずわれわれの考えるファジィ確率的推移システムを定式化する．細かい説明は省略するが，基本的にはBellman and Zadehのシステムと同じものである．違いは評価関数で，彼らが最小型評価基準だったのに対し，われわれはさらにその関数を考えている．

$$\text{Maximize } E[f(\mu_0(\mu_0) \wedge \mu_1(\mu_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{GN}(x_N))] \quad (1)$$

$$\text{subject to (i)}_n\ x_{n+1} \sim p(\cdot | x_n, u_n)\ \ 0 \leq n \leq N-1$$

$$\text{(ii)}_n\ u_n \in U \quad 0 \leq n \leq N-1$$

ただし$a \wedge b := \min(a, b)$で，fは$[0,1]$上の関数である．ここでは演算子$\wedge$を結合的2項演算$\wedge : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$とみなし1をその単位元（$^\forall x \in [0,1]$に対して$1 \wedge x = x$）と考えることによって，問題(1)を1パラメータを含む部分問題群：

$$\mu_{GN-\nu}(x_{N-\nu}; \lambda)$$
$$= \text{Maximize } E[f(\lambda \wedge \mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(\mu_{N-1}) \wedge \mu_{GN}(x_N)) \mid \text{(i)}_m,\ \text{(ii)}_m N-\nu \leq m \leq N-1] \quad 1 \leq \nu \leq N$$
$$\mu_{GN}(x_N; \lambda) = \lambda \wedge \mu_{GN}(x_N) \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

に埋め込んで考える．というのも普通に部分問題群を考えても，問題(1)に対しては，その評価基準が最小型故うまく再帰式が導けないからである．よって，このように不変埋没原理を用いて1パラメータを導入する必要がある．こうして得た部分問題に対しては，その相隣る問題間の再帰式を導くことができる．その再帰式を解くのである．最終的には，λに単位元である1を代入すれば$\mu_{G0}(x_0; 1)$すなわち求める最大値を得ることができる．しかし，実際の再帰式の計算は計算量が多く，面倒なものである．そこでわれわれは，数値計算の簡略化のため，新たな表記法を導入した．それは，ベクトルあるいは行列的な表現である．これにより，計算は非常に簡明になる．しかしここでは紙面の都合で省略する．詳しくは本論文を参照していただきたい．なお問題(1)には，Bellman and Zadehの問題はもちろん確率評価基準をもつような問題も含まれる．

参考文献

[1] Bellman, R. E. and Zadeh, L. A., *Decision-making in a Fuzzy Environment,* Management Science 17, pp. 141-164, 1970.

[2] 古川長太，ファジィ線形計画とファジィベクトルの空間における凸集合の分離定理，研究集会「最適化基礎理論とその応用」，新潟大，pp. 86-87，1992.

[3] Iwamoto, S. and Fujita, T., *Stochastic Decision-making in a Fuzzy Environment,* submitted.

[4] Ramík, J. and Řimánek, J., *Inequality Relation between Fuzzy Numbers and its Use in Fuzzy Optimization,* Fuzzy Sets and Systems 16, 1985.

[5] Yu, P. L., *Multiple-criteria Decision Making,* Plenum Press, New York, 1985.