

## 環状道路の混雑

柳井 浩

## 1. はじめに

環状\*\*号道路はどうも混雑する。——このような話がよく聞かれる。また実際、専門家達の経験も、ある種の環状道路の、殆ど定常的な混雑を認めている。

混雑の原因は何処にあるのか?利用者の出発点と目的地がその環状道路に沿って偏在しているのか?中心部に公共施設が数多く分布するために起こる中心部の混雑を避けた車が特定の環状道路に集まるのか?——勿論、これらのいずれも環状道路の混雑の原因となり得ることは明らかである。

しかし、放射線状道路と環状道路によって都市を覆うという、道路網の幾何学的構造そのものにも原因があると考える考えもある。——しかし、この性質上、これを実証的に裏付けるのは困難である。本稿では、ごく単純化した数学モデルにもとづいて、この幾何学的構造にも混雑の原因があることの説明を試みる。

## 2. 速度場と最短時間経路

個々の道路利用者の経路選択にはいろいろな理由があろうが、ここでは、目的地に最短時間で到達するような経路が選択されるものとしよう。出発地から目的地までの所要時間は経路とそれに沿っての走行速度に依存する。そして、走行速度は、多くの場合、その道路の、その場所における'流れ'の速度によって規定されてしまう。確かに、その利用者の車の存在にしても、'流れ'を構成する要素には違いない。しかし、大多数の利用者の側からすれば、むしろ、速度場が、あらかじめ経験的な知識として与えられており、その上を、

放射線道路と環状道路を選択して、乗りかえつつ、目的地を目指すという行動をとるのが現実であろう。

一方、このような速度場は、都市の中心部では遅く、周辺部へ行くのに従って早くなるものと仮定してよいだろう。さらに、理論的な取扱いのために、放射線状道路と環状道路が、この平面上に稠密に存在するものと仮定しよう。

このような仮定のもとで、個々の利用者が最短経路を辿るものとすれば、それはどのようなものになるだろうか?この問題から考えよう。

都市の中心を原点とする極座標 $(r, \theta)$ を設定しよう:

$$r \geq 0, \quad (1)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2)$$

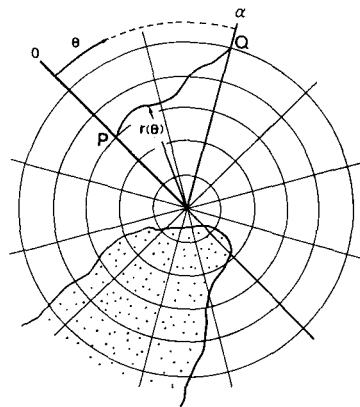


図1 都市と極座標

環状道路を逆向きに回る可能性を考えれば、(2)式において、偏角 $\theta$ の範囲の上限を $\pi$ とすることも考えられるのだが、都市の近辺には山が迫っていたり、海岸線が湾を成して食い込んでいたりすることも少なくないので、ここでは、 $2\pi$ まで考えることにした。

出発地 $P$ および目的地 $Q$ は、極座標

やない ひろし 慶應義塾大学理工学部

〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

受理 94.5.9

再受理 94.8.30

1995年2月号

$$P(0, p), \quad Q(\alpha, q) \quad \alpha \in [0, 2\pi] \quad (3)$$

で与えよう。ここで、一般性を失うことなく、

$$p \leq q \quad (4)$$

を仮定することにしよう。

また、中心からの距離が  $r$  であるとき、

$$u(r) : \text{放射線状の道路に沿っての速度} \quad (5)$$

$$v(r) : \text{環状道路に沿っての速度} \quad (6)$$

が与えられているものとしよう。また、表記の簡単のために、これらの速度の逆数を、それぞれ

$$\zeta(r) = 1/u(r) \quad (7)$$

$$\eta(r) = 1/v(r) \quad (8)$$

と書くことにする。 $u(r)$  及び  $v(r)$  は非負の単調増加の飽和型関数、したがって、 $\zeta(r)$  および  $\eta(r)$  は非負で単調減少とするのが、とりあえずの自然な仮定であろう。

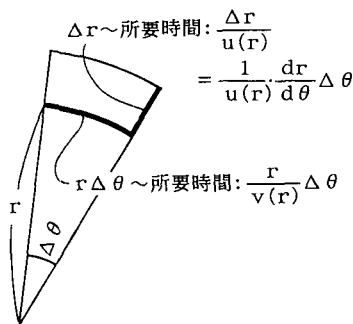


図2 微小部分の所要時間

さて、2点  $P, Q$  の間に行く自動車の経路が

$$r(\theta) \quad \theta \in [0, \alpha] \quad (9)$$

によって与えられるものとすれば、その所要時間は

$$\begin{aligned} T[r(\theta)] &= \int_0^\alpha \left\{ \frac{1}{u(r)} \frac{dr}{d\theta} + \frac{r}{v(r)} \right\} d\theta \\ &= \int_0^\alpha \left\{ \zeta(r) \frac{dr}{d\theta} + \eta(r)r \right\} d\theta \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(図2参照) したがって、最短時間経路を求める問題は、境界条件

$$r(0) = p, \quad r(\alpha) = q \quad (11)$$

のもとで、汎関数(10)を最小にする変分法基本問題[1]である。そこで、汎関数(10)に関するEulerの方程式を書けば、

$$\eta'(r)r + \eta(r) = 0 \quad (12)$$

となる。しかしこれは、 $r$ に関する微分方程式ではなく、 $r$ を値として決定する方程式である。(このようにEulerの方程式に  $\frac{dr}{d\theta}$  の項が含まれないのは、変分法の初等的な教科書[1],[2]にも述べられている通り汎関数  $T[r(\theta)]$  が自変数  $\theta$  を直接含まないからである。)

厳密に言えば、この方程式の解の有無や個数を問題にしなければならないのだが、話が形式的に面倒になるだけなので、とりあえず、一個の解  $r_1$  があるものとして、このとき、

$$p = q = r_1 \quad (13)$$

の場合だけに対して、汎関数(10)を最小にする連続微分可能な解が得られることになる。このことからすると、2点  $P, Q$  を結ぶ最短経路は、それぞれ、 $P$  および  $Q$  を通る放射状の道路の部分と、1本の環状道路の部分から構成されていなければならない。(無論その一部分が縮退することもありうる。)

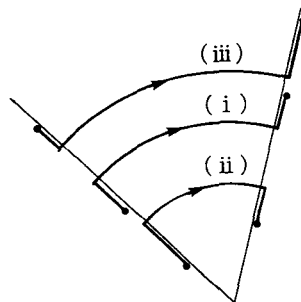


図3 最短経路の候補の3つのタイプ

そこで、我々が考察しなければならないのは、図3のような3つのタイプの経路であるが、いずれの場合にせよ、総所要時間は

$$T(r) = f(p, r) + \tau(r) + f(r, q) \quad (14)$$

と書ける。ここに、 $f(x, y)$  は同一の放射線状道路を  $x$  (中心からの距離) 点から  $y$  点へ移動するのに要する時間であり、次式によって与えられる：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_x^y \zeta(\xi) d\xi \quad y \geq x \\ &= \int_y^x \zeta(\xi) d\xi \quad y \leq x \end{aligned} \quad (15)$$

また、 $\tau(r)$ は中心からの距離が $r$ の環状道路を、中心角 $\alpha$ だけ移動するのに要する時間であり、

$$\tau(r) = \alpha r \eta(r) \quad (16)$$

によって与えられる。

そこで問題は、所要時間 $T(r)$ を最小にするような $r$ を求めることになるのだが、(15)式により、それぞれのタイプに分けて扱わなければならない。

(i)  $p \leq r \leq q$ : この場合には、(14)式は

$$\begin{aligned} T(r) &= \int_p^r \zeta(\xi) d\xi + \tau(r) + \int_r^q \zeta(\xi) d\xi \\ &= \int_p^q \zeta(\xi) d\xi + \alpha r \eta(r) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。最小を求めるために、この式を $r$ で微分してゼロとおくと

$$\frac{dT(r)}{dr} = \tau'(r) = \alpha(\eta(r) + r\eta'(r)) = 0 \quad (18)$$

という、Eulerの方程式(12)と等価な関係式が得られる。つまり、経路のうちの環状道路の部分の所要時間を最小にする経路を求める問題になる。

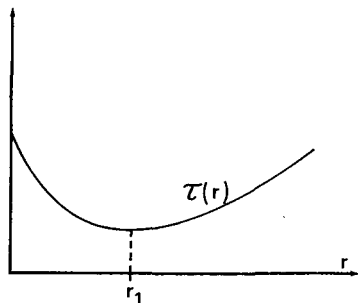


図4 環状道路部分の所要時間が一つの場合

そこで、(18)式に(8)式を代入すれば、

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{\alpha r}{v^2(r)} \left( \frac{v(r)}{r} - \frac{dv}{dr} \right) \quad (19)$$

が得られるから、最小のための条件

$$\frac{d\tau}{dr} = 0 \quad (20)$$

を満たすのは、( $r=0$ を除いて考えれば)

$$\frac{dv}{dr} = \frac{v(r)}{r} \quad (21)$$

となる点である。すなわち、原点を通る直線が曲線 $v(r)$ に接する点(図5の点AやB)である。さらに、簡単な計算からわかるように、この点では

$$\frac{d^2\tau}{dr^2} = -\frac{r}{v^2(r)} \frac{d^2v}{dr^2} \quad (22)$$

が成立するから、点A(B)のように曲線 $v(r)$ が原点を通る接線の下(上)側に位置する場合には、 $\tau(r)$ が極小(大)になることがわかる。

また、 $r=0$ の場合には、(16)および(8)式から

$$\tau'(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha}{v(r)} \quad (23)$$

を得るが、この値が非負になるのが $r=0$ が最小点になるための条件である。したがって、 $v(0) > 0$ のときには、 $r=0$ は極小点になる。とくに、走行速度が到る所で一定値 $c$ をとるものとすれば、 $r=0$ が最小点になる。(このことは、 $\tau(r) = r/c$ という関係からも明らかである。)

このようにして、 $v(r)$ がどのようなものであっても、その形から $\tau(r)$ の極小点が存在するの否か、また、その個数や位置を知ることが出来る。これからも分かるように、一般的にいえば、このような極小点はただ一つとは限らないし、それが正の値になるとも限らない。しかし、ここでは、話をはっきりさせるために、とりあえず、 $\tau(r)$ が谷を一つだけもつ、滑らかな関数で、(18)式を満たす正の解が存在するものとして、これを、ここでも $r_1$ と書くことにしよう。(図4)

$$\eta(r_1) + r_1 \eta'(r_1) = 0 \quad (24)$$

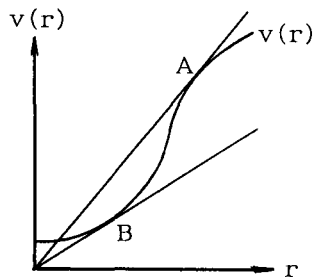


図5  $\tau(r)$ の極大、極小点と $v(r)$

(ii)  $p \leq q \leq r$ : この場合には、(14)式は

$$\begin{aligned} T(r) &= f(p, q) + 2f(q, r) + \tau(r) \\ &= \int_p^q \zeta(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \int_q^r \zeta(\xi) d\xi + \alpha r \eta(r) \end{aligned} \quad (25)$$

という形にまとめられる。したがって、

$$\frac{dT(r)}{dr} = 2\zeta(r) + \alpha(\eta(r) + r\eta'(r)) \quad (26)$$

となる。

(iii)  $r \leq p \leq q$ : この場合には, (14)式は

$$\begin{aligned} T(r) &= f(p, q) + 2f(q, r) + \tau(r) \\ &= \int_p^q \zeta(\xi) d\xi \\ &\quad + 2 \int_r^q \zeta(\xi) d\xi + \alpha r \eta(r) \end{aligned} \quad (27)$$

という形にまとめられる。したがって,

$$\frac{dT(r)}{dr} = -2\zeta(r) + \alpha(\eta(r) + r\eta'(r)) \quad (28)$$

となる。

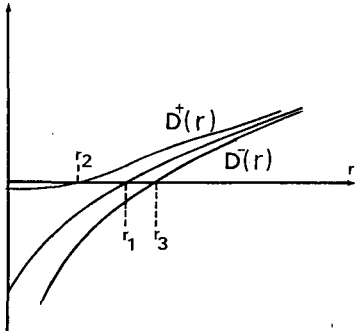


図6 関数 $D^\pm(r)$ と最適な $r$

(ii)あるいは(iii)のいずれの場合にせよ,  $T$ を最小にする $r$ を求めるには, (26)や(28)式をゼロと置いて, これらを解けばよい:

$$D^\pm(r) = (\eta(r) + r\eta'(r)) \pm \frac{2}{\alpha}\zeta(r) = 0 \quad (29)$$

図6に見るように, この $D^\pm(r)$ は,  $\eta(r) + r\eta'(r)$ を中心として, これに $\pm \frac{2}{\alpha}\zeta(r)$ をのせたものである。ここでも, (29)式に正の解が必ず存在するとは限らないが, とりあえず存在する場合を考えて,  $r_2$  ((ii)の場合) および $r_3$  ((iii)の場合) と書くことにしよう。  $\zeta > 0$  ( $\zeta$ は速度の逆数) および(29)式からも明かなように,

$$r_2 < r_1 < r_3 \quad (30)$$

が成立する。

さて, このように3つの半径 $r_1, r_2$ および $r_3$ が求まった所で,  $p$ および $q$ のいろいろな組み合わせに対する最短経路を与えよう。

(a)  $p \leq r_1 \leq q$ : この場合の最短経路はタイプ(i)のそれで,

- 放射線状道路 (下り)  $p \rightarrow r_1$
- 環状道路 $r_1$
- 放射線状道路 (下り)  $r_1 \rightarrow q$

によって構成される。

(b)  $p \leq q < r_2$ : この場合の最短経路はタイプ(ii)のそれで,

- 放射線状道路 (下り)  $p \rightarrow r_2$
- 環状道路 $r_2$
- 放射線状道路 (上り)  $r_2 \rightarrow q$

によって構成される。

(c)  $r_3 \leq p \leq q$ : この場合の最短経路はタイプ(iii)のそれで,

- 放射線状道路 (上り)  $p \rightarrow r_3$
- 環状道路 $r_3$
- 放射線状道路 (下り)  $r_3 \rightarrow q$

によって構成される。

(d)  $r_2 < q < r_1$ : この場合の最短経路は,

- 放射線状道路 (下り)  $p \rightarrow q$
- 環状道路 $q$

というタイプ(i)が縮退した形をとる。これは,  $p$ および $q$ が $r(r)$ の減少区間 $[0, r_1]$ にあり, また,  $r_2 \in [p, q]$ のためタイプ(ii)の経路が有利にならないためである。

(e)  $r_1 < p < r_3$ : この場合の最短経路は,

- 環状道路 $p$
- 放射線状道路 (下り)  $p \rightarrow q$

というタイプ(i)が縮退した形をとる。これは,  $p$ および $q$ が $r(r)$ の増加区間 $[r_1, \infty)$ にあり, また,  $r_3 \in [p, q]$ のためタイプ(iii)の経路が有利にならないためである。

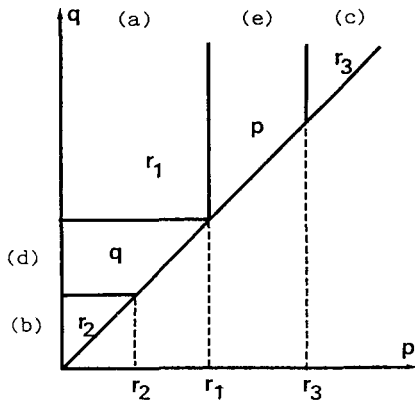


図7 最短経路を構成する環状道路

これらを図示したのが図7であり、これに対応する経路を例示したのが図8である。

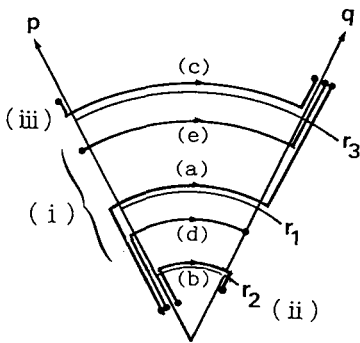


図8 最短経路

以上では、2点P,Qの間の中心角 $\alpha$ があらかじめ与えられた一定の値であると考えて問題を取り扱ってきた。次に、 $\alpha$ の影響を考えよう。(24)式からも分かるように、 $r_1$ は $\alpha$ には依存しない。それに対して、 $r_2$ および $r_3$ は中心角 $\alpha$ の減少とともに増大し、場合によっては無限遠に向かって去って行く。 $r_2(\alpha)$ および $r_3(\alpha)$ が $\alpha$ とともにどのように変化するのか?その1例を示したのが図9である。

### 3. 速度場の形成と道路網の構造

前節においては、速度場が与えられたとき、一台の車が辿るべき最短時間経路を求めてきた。しかしながら、道路は不特定多数の車が利用する。そして、その大多数が最短経路を辿ろうとするというのも、決して不自然な仮定ではない。そうだとすると、図7に見る

ように、そのうちのかなりの部分が、中心から $r_1$ という距離にある環状道路を利用する。いまこれを最適環状道路とよぼう。

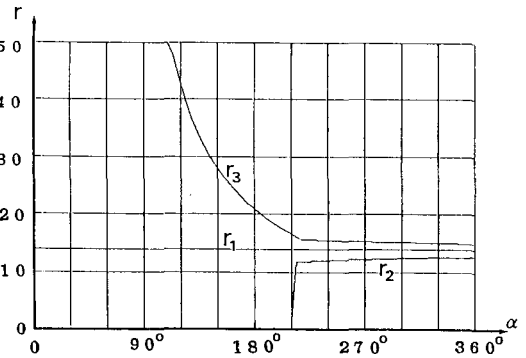
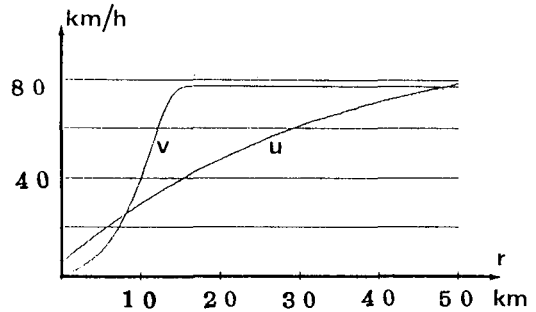


図9 中心角と $r_1, r_2$ および $r_3$

この最適環状道路をはさむ場所にある出発点から目的地に行くには、いずれにせよこの最適環状道路を通ることになる。また、出発点と目的地が、ともに最適環状道路の一方の側にある場合にも、最適環状道路に引き寄せられるように、これを中心とする帯状の部分に車が集まる。この際に利用する環状道路 $r_2(\alpha)$ あるいは $r_3(\alpha)$ が、特に、中心角 $\alpha$ が大きい場合に最適環状道路 $r_1$ に接近するからである。このように、最適環状道路はあたかも‘吸引力’をもつように見える。

実際、出発点と目的地が半径50kmの円盤上に一様に分布するものとして、そこからランダムに選んだ各自動車を図9に与えられた‘速度場’に対応する最短経路を辿ったときの軌跡を示したのが図10である。ここでも、 $r_1$ を中心とする環状道路に多くの軌跡が重なっているのが見られる。

ところで、このように車が集中する‘最適環状道路’やそれを中心とする‘帯’は、環状道路を走行するのに要する時間 $t(r)$ の谷の部分に対応している。そして、前にも述べた通り、これは、環状道路に沿っての速度 $v(r)$ から知ることが出来る。しかし、個々の利用者が

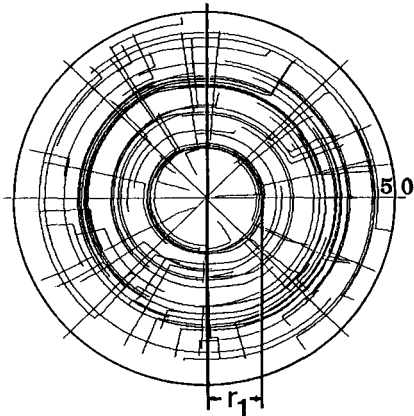


図10 最適経路を辿る自動車の軌跡

経路を選択する場面では、利用者は、時々刻々の走行速度を完全に把握しているわけではない。個々の利用者は、ただ、速度を経験的に想定し、最短経路を選ぶだけであろう。そこで、大勢が共通の想定をすれば車はある一帯の環状道路に集中することになる。

そこで、視点を後退させて、次のように推論することが出来よう。いま仮に、自動車の速度が到る所で一定であるとすれば、前にも述べた通り、 $r_1 = 0$ となり、たとえ出発点と目的地が一様に分布しているとしても、都市の中心部が吸引力をもち、混雑する。この結果、速度場が変化し、中心部では車が殆ど動けない状態 ( $v(0) = 0$ ) になる。

こんな状態が実際にも起こるだろうし、また、多くの利用者がそれを想定する結果、 $r_1$ は原点から離れ、そこに最適環状道路が出来て、この辺りに車が集中することになる。しかし、そうだとすると、自動車の速度に上限があり、関数 $v(r)$ が飽和型だとすれば、 $r_1$ もそれほど中心部から離れない。このような訳で、中心部あるいはその周辺にある環状道路が混雑することになる。

繰り返すが、これは都市において中心部を出発点や目的地とする利用者がもともと多いことを前提とした議論ではない。放射線状の道路と環状道路によってその地域を覆うという、その交通網の構造そのものが特定の環状道路の混雑の原因となることを意味している。

#### 4. おわりに

放射線状の道路と環状道路——この二つによって都市を覆う道路網は都市交通網として、いわば、典型的なものの一つである。ここに速度場を想定し、この上での最短時間経路を求める問題を、筆者は、都市工学が専門である栗田 治先生（慶應大学）から教えていただいた。

筆者は、以前、中央部で流れの早い川での上下や横断に関する最短時間問題を扱ったことがあるので[3]、この問題が変分法で扱えることに気が付き、早速、これを試みた。確かに、この問題は変分法基本問題として定式化されるには違いないのだが、汎関数に自変数としての偏角を含まない特殊なものであることがわかった。これは、速度場を偏角について一様であるとしたことからすれば、当たり前のことである。

しかし、このことは、'吸引力'をもつ環状道路の存在をはっきりと教えてくれると同時に、その混雑の理由もはっきりした。栗田 治先生のお話では、このような環状道路が存在することについては、いろいろな説明があるが、このような数理モデルによるものは無いよだということなので、ここに、報告させていただくことにした。このように、本稿は文字どおり栗田先生の御支援のたまものであり、ここに深く感謝の意を表するものである。

さらに、レフェリーの方からは大変貴重なコメントを頂戴し、それによって、最適環状道路の位置に関する説明を刷新することができた。ここに感謝の意を表したい。

#### 参考文献

- [1] グリファント, フォーミン共著, 関根智明訳「変分法」総合出版, 1970
- [2] エルスゴルツ, L.E. 著, 瀬川 富士訳「変分法」ブレイン図書出版, 1974
- [3] 柳井 浩「流れの中の最短時間航路」オペレーションズ・リサーチ, Vol.30, No.3, pp.197-207, 1985