掛け持ち受験と冗長化

森　　雅夫

1．はじめに

大学や高校，中学を受験するときに，いくつかの学校や学部を掛け持ちで受験する人が多い．少し難しいA校を第1希望に，B校を第2希望に，滑り止めにC校を受験する，などのパターンがふつう行なわれる．なかには，10校近く受験し体力勝負にかける人もいると聞く．逆に，うんと自信のある人や浪人しても何とかその学校に入りたくて1校しか受験しないモサも少なくない．人さまざまである．以下では，まず，掛け持ち受験の効用について考えてみよう．

掛け持ち受験は，ロケットなどの大規模で複雑なシステムの信頼性を向上させる手法の1つである冗長化にあたる．そこで冗長化につながるシステムの信頼性の考え方についても簡単に述べてみよう．

2．合格確率はアップする

いま，M子さんが上に述べたふつうのパターンのようにA，B，Cの3校を受験する場合を考えてみよう．M子さんのA，B，C各校の合格の可能性は，予備校の模擬試験のデータでは，それぞれp_1，p_2，p_3である．M子さんがどれかの学校に合格する確率Rは，全部に落ちなければよいのだから

$$R=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) \tag{2.1}$$

となる．$p_1=0.5$，$p_2=0.6$，$p_3=0.7$とすると，どれかに合格する確率は，$R=0.94$とかなり高くなる．

話を簡単にするために，同じレベルの学校だけをいくつか受けるものとしよう．各校の合格率を $p_k=p$ としn校受験すると，そのどれかに合格する確率は

$$R=1-(1-p)^n \tag{2.2}$$

となる．**表1**はいろいろなnに対して合格率を変化させたときのRの値を示す．**図1**はそれをグラフにしたものである．

表1　少なくともどれか1校に合格する確率

p	$n=2$	$n=3$	$n=5$	$n=10$
0.1	0.19	0.271	0.40951	0.65132
0.2	0.36	0.488	0.67232	0.89273
0.3	0.51	0.657	0.83193	0.97175
0.4	0.64	0.784	0.92224	0.99395
0.5	0.75	0.875	0.96875	0.99903
0.6	0.84	0.936	0.98976	0.99989
0.7	0.91	0.973	0.99757	0.99999
0.8	0.96	0.992	0.99968	0.99999
0.9	0.99	0.999	0.99999	0.99999

「下手な鉄砲，数打ちゃ当たる」という言葉もあるように，1校の合格率がわずか0.1なのに，体力に任せて10校も受けると，どれかに合格する確率Rが0.65に急上昇するのは驚きである．もともとpのある程度大きな人は，掛け持ち数をむやみに増やしていっても，受験料ばかりかかり，Rはそれほど大きくならない．

それではいくつ掛け持ちするのがよいだろうか．浪人するのをどれほど避けたいかによって判断は違ってこよう．人によって違うが，Rを0.9あるいは0.95以上にするように，掛け持ち数を決めるとよいだろう．Rが0.95ということは，このようなやり方で20回受験し

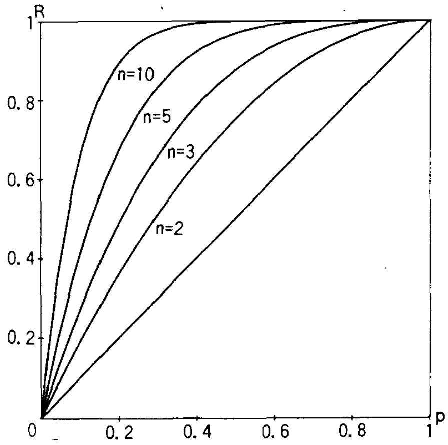

図1　どれかに合格する確率Rのグラフ

もり　まさお　東京工業大学経営システム工学科
〒152 目黒区大岡山2-12-1

たときに1回泣きをみる程度ということである．

この結果をそのまま鵜呑みにしてよいか，少し心配である．M子さんにとって各校の合否が互いに影響を残さないという前提の下では，つまり，A校とB校の受験結果は独立と考えてよい場合は，共に不合格となる確率は$(1-p_1)(1-p_2)$と積の形で表わされるので，この結果は正しい．しかし，M子さんが前の試験の出来，不出来で気力が落ち込んでいったりする場合はこのように計算できない．また，私立大学を受験する場合，多くの人がその大学のいくつかの学部を掛け持ちするが，それらの人たちの各学部の成績の順序関係はあまり変わらないことも考えられるので，独立性が怪しくなり，このまま当てはめることはできない．

3．満足度を考慮する

大学は受かればよいというものではない．自分の希望する分野が希望するレベル・環境で学習できるかが，大学選びのポイントであろう．いま，M子さんは希望する分野の勉強ができ，受験可能な大学を調べたら，5校あった．これらの大学について，学習内容，スタッフ，設備，環境，通学可能性あるいは下宿，世間的な評価などを考慮して，大ざっぱではあるが満足の程度を表現し，満足度の高い順に，A_1，A_2，A_3，A_4，A_5と並べてみた．M子さんの場合，A_3が標準的と思われ，その満足度を1としたときに，A_1は満足度が高くA_3の2倍程度に思われ，A_5は半分程度に思われる．大学A_kの合格率をp_k，満足度をa_kとする．

複数の大学を掛け持ちで受験し，いくつかの大学に合格したときには満足度の高い大学に入学するものとしよう．いま，A_1，A_2，A_3の3つの大学を受験する場合の期待される満足度Sは，とにかくA_1に合格すれば満足度はa_1，A_1に失敗しA_2に合格すれば満足度はa_2，A3のみ合格すればa_3であるから，

$$S=a_1p_1+a_2(1-p_1)p_2+a_3(1-p_1)(1-p_2)p_3 \qquad (3.1)$$

と表わされる．

表2はM子さんの各大学の合格率と満足度をまとめたものである．数多く掛け持ち受験をすれば合格の確率も高くなり，期待される満足度も大きくなることは分かっているが，受験料や受験のための宿泊・交通費を考えると，3校しか受けられない．M子さんとしてはどの大学を選んで受験したらよいであろうか．皆さんはどのようにアドバイスしますか？

いろいろな考え方があるだろう．1つの方法として，

1）どれかに合格する確率Rを0.9以上にする
2）その中で期待される満足度Sのできるだけ大きい組合せを選ぶ

というのはいかがだろうか．

表3は可能な大学の10通りの組合せについて，R，Sを計算したものである．M子さんの場合，両極端を避けた常識的な判断と一致するが，筆者としてはA_2，A_3，A_4を掛け持ちで受験することを薦める．どれかに合格する確率は0.94と高く，期待される満足度の値は1.162と悪くない．また，満足度が標準以上のA_2，A_3のどちらかに合格する確率は0.8以上と高く，それらがだめでA_4に入ったとしても満足度はそれほど下がらない．

4．追い込み作戦

第2節で述べたように，個々の大学の合格率は低くとも，体力に任せてたくさん受ければ，どれかに合格する確率を大きくすることができる．しかし，たくさん受験すると受験費用もかかるだけでなく，1回の受験に受験日の前後を合わせると2，3日の勉強時間を消耗することも多い．本番が受験期間の後半の場合，数打つのは止めて，追い込みに力を注ぐのも1つの作戦である．

表2　M子さんの合格率と満足度

大学	合格率p_k	満足度a_k
A_1	0.2	2
A_2	0.5	1.5
A_3	0.6	1
A_4	0.7	0.8
A_5	0.8	0.3

表3　大学の各組合せの合格率と満足度

掛け持ちする大学	合格率R	満足度S
A_1，A_2，A_3	0.840	1.240
A_1，A_2，A_4	0.880	1.224
A_1，A_2，A_5	0.920	1.096
A_1，A_3，A_4	0.904	0.867
A_1，A_3，A_5	0.936	0.765
A_1，A_4，A_5	0.952	0.906
A_2，A_3，A_4	0.940	1.162
A_2，A_3，A_5	0.960	1.098
A_2，A_4，A_5	0.970	1.066
A_3，A_4，A_5	0.976	0.853

M子さんは追い込みの効くタイプであり，受験までの残りの1ヵ月を何とか頑張って，できればA_3，A_2，A_1のどれかに入りたい．どれか1校に絞って赤本に集中すれば，その大学の不合格率を20%低下できると信じている．もともと合格率の高いところは効果は現われにくいだろうから，このように設定しておこう．それでは，どの大学の赤本を中心に勉強したらよいだろうか．追い込みにより，他の大学の合格率も幾分上がることになろうが，ここではその変化は考えない．

表4はA_1，A_2，A_3 を受験し，A_kの大学の赤本を集中的に勉強したときのRとSを計算したものである．合格する確率Rは式(2.1)において，A_k大学の不合格率$(1-p_k)$が20%下がるだけだから，どの大学の赤本に取り組んでも同じ値になる．難易度の高いA_1を狙うと，満足度Sがかなり改善される．この3つ受けるのであれば，勇気を奮ってA_1の赤本を勉強するのがよさそうだ．とは言っても，A_1に入れる可能性は36%しかなく無謀な気もする．その努力により，ここでは勘定に入れなかった，A_2，A_3 の大学の合格率のアップ分に期待して夢を追うことになる．

A_1の夢を追うより浪人するのをできるだけ避けたいのであれば，やはりA_2，A_3，A_4 を受けて，中でも満足度の高いA_2の勉強を中心にやるのがよいであろう．

表4　追い込みの効果

赤本修得大学	上昇後の合格率	合格確率 R	満足度 S
A_1	0.36	0.872	1.392
A_2	0.60	0.872	1.312
A_3	0.68	0.872	1.280

合格すると，数日以内に入学金を納めなければならない．大抵の場合，志望順位の低いところから入試が始まり，志望順位の高い大学の発表が行なわれる前に納入することを求められる．親にとっては頭の痛い問題である．受験のときの調子を聞き合否を推し量りながら，入学金を納めたり，見合わせたりするが，一種の保険だと思って観念するほかない．これを回避する志望校選びも考えられる．子どもがある程度希望するのであれば，どこでもよいから合格して欲しいという受験前の気持ちと，合格し始めた後の冷静な心持ちとのギャップの調整は難しい．

5．信頼性と冗長化

冗長というと，くどくて長たらしいとか，ふつうよい意味では使われない．モノを設計するときにあまりキチキチにつくると，部品のどれかが壊れると，モノそのものが使えなくなってしまうことも多い．たとえば，背広を買うとその背広のボタンと同じものがおまけについてくる．ボタンをうっかりと落としてしまい，違った種類のボタンを付けたのでは恰好が悪い．そのとき，替えのボタンがあると助かる．

ロケットや通信衛星などは，細かく数えれば何十万個もの部品から構成されている．そのどれかが故障したら作動しなくなっては困るので，故障しやすい部品については，代替部品や代替の機能を追加して寿命を長持ちさせるように工夫している．これを冗長化するという．

簡単のために，たとえば，アンプ，CDプレイヤー，スピーカーからなるステレオ装置のように，3つの要素A，B，Cからなるモノ（システムとも言う）を考える．A，B，Cのどれが故障してもモノが機能しなくなるとき，直列システムと呼び，概念的には**図2**のように表わされる．各要素をスイッチと考えて，両端に電流を流す場合，3つともオンになっていないと電流が流れないことを模式化している．各要素が所定の期間故障しないで機能し続ける確率を信頼度と呼び，p_1，p_2，p_3とおくと，上の直列システムの信頼度R_2は，その期間3つの要素のいずれもが機能していなくてはならないので

$$R_2=p_1p_2p_3 \tag{4.1}$$

となる．各要素の信頼度が$p_1=p_2=p_3=0.9$と高くても，直列システムの信頼度は$R_2=0.729$と低くなる．

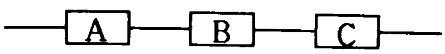

図2　直列システム

これに対し，掛け持ち受験の場合は，**図3**のような並列システムとして表わされる．どれかのスイッチがオンになっていれば電流が流れるというわけである．並列システムの場合，各要素がいずれも代替的役割を

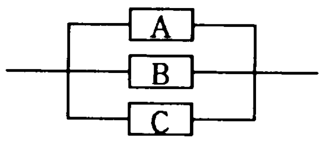

図3　並列システム

しているので冗長化されていることになる．２節でみたように並列システム信頼度R_3は

$$R_3=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$

と計算され，各$p_k=0.9$のとき$R_3=0.999$と高信頼度を得る．

いま，直列的なシステムに対して，各部品を２つずつ使いながらシステムの信頼度を上げる場合，冗長化のやり方として**図４**，**図５**のような２通りの方法がある．どちらが得策であろうか．図４の直・並列システムはもともとの直列システムを２重に持ったものであり，図５の並・直列システムは部品ごとに２重化してシステムを構成したものである．各要素の信頼度がいずれもpのとき，図４，５の各システムの信頼度R_4，R_5は

$$R_4=1-(1-p^3)^2 \tag{4.2}$$

$$R_5=\{1-(1-p)^2\}^3 \tag{4.3}$$

となる．

これらのグラフは**図６**のようになる．冗長化する場合，できるだけ部品に近いレベルで冗長性を持たせてゆく方がよいことがわかる．図６のそれぞれの曲線はＳ字形をしている．複雑なシステムの信頼度の曲線はこのようにＳ字形をすることが知られている．個々の部品の信頼度pの小さい中は，pを少し上げてもシステムの信頼度Rは大きく改善されない．また，pが１に近い高信頼度のところでも，Rの改善は容易でないことがわかる．

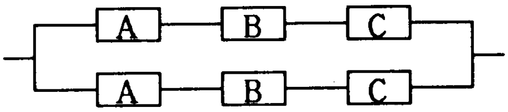

図４　直・並列システム

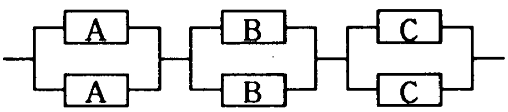

図５　並・直列システム

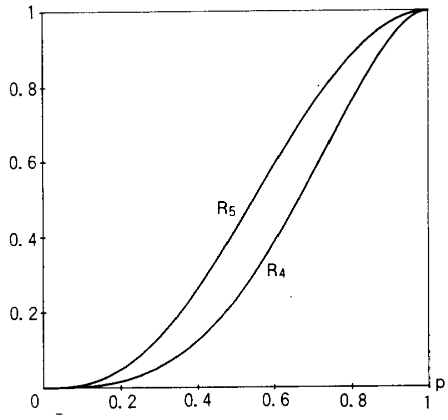

図６　R_4，R_5のグラフ

さて，ある通信衛星が10万個の部品からなる直列システムであるとしよう．衛星は高価なので１万回打ち上げて１回程度の失敗は仕方がないとして，信頼度を0.9999以上に設計したいとする．たとえば，各部品の衛星の使用期間の間の信頼度を0.999999999（ナイン・ナインという）にすると，

$$R=0.999999999^{100{,}000}=0.99990$$

となり，ようやく要求が満たされる．部品数が多くなると，各部品にはますます高信頼度が要求され，最近ではエレブン・ナインなどとも言われる．こうなると個々の部品の信頼度を上げることは難しくなるので，冗長化などの工夫をしてシステムの信頼度を上げることが必要になる．

つまり，掛け持ち受験と心は同じである．