論文・事例研究

バングラデッシュの洪水に関する微分方程式モデル

山重 裕之，柳井 浩

0．はじめに

インド亜大陸の東端に位置するバングラデッシュの国土の大部分は，ガンジス川，ブラハマプトラ川，メグナ川等の大河川が形成する肥沃なデルタ地帯である．このデルタ地帯は，バングラデッシュに豊かな農作物をもたらしている．反面，標高30ｍ以下の低平地には，雨期に慢性的な洪水が起こる．特に高潮を伴うサイクロン上陸の際には国土が壊滅的打撃を被る．1988年に上陸したサイクロンの被害は史上最悪といわれ，国土の６～７割が水没した．しかし世界の最貧国の一つに数えられる経済状態のバングラデッシュだけでは，これに対して手の打ちようが無いというのが現状である．

一方，隣国のインドではダムが建設され，すでに取水が行われており，ネパールではガンジス川支流におけるダム建設の計画がある．しかし，このような多国籍河川の開発には，関係各国への影響を十分検討する必要がある．そのため，このダム建設による，バングラデッシュの水理現象への影響が問題となってくる．

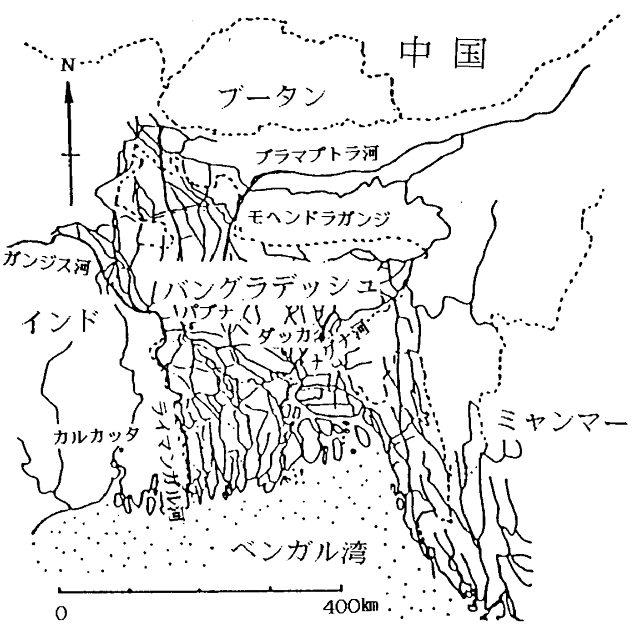

図１　バングラデッシュの地図

しかしながら，このデルタ地帯には，複雑な水系がはりめぐらされ，その水理も単純ではない．これを忠実にモデル化する試みも，必要になってはこようが，その時間と労力は多大なものとなろう．それゆえ，一方において，この国の全土を覆う水系全体を大局的にとらえる努力も必要となってくる．もし，この複雑な水系を一つの単純化されたシステムとして捉え，それに相当するモデルを作ることができれば，この国の水理の概略を把握し，予測や計画の際に役立つ知見が得られるだろう．

本研究は，このような見地より，バングラデッシュ国土全体の水理に関する簡単な微分方程式モデルを提起し，これに基づいて２～３の考察を試みるものである．

1．酒杯型遊水池モデル

まず，バングラデッシュの地形は，東から東北にかけての狭い地域および北部のごく一部に標高が高い部分が見られる他は，平らな低地が広がっている．西ではガンジス＝ライマンガル川がインドとの国境をなし，南にはベンガル湾を望む，四角いまとまった形の国土である．パブナ付近を中心にガンジス川の，モヘンドラガンジ付近を中心にブラマプトラ川・メグナ川のデルタ地帯が広がり，込み入った河川網を構成している．しかも，その流れは洪水の都度，つまり毎年，流路を変える．さらに，河口沿岸部はマングローブが密生する湿原となっている．この沿岸部から400kmの内陸部でも海抜はわずか30ｍにすぎない．東京－岐阜間が約400kmであることを思えば，このデルタ地帯がいかに平坦であるかが想像できよう．このような地形の国土に，世界でも有数の三大河川が流入するのであるから，バ

やましげ　ひろゆき　長銀システム開発㈱
やない　ひろし　慶応義塾大学理工学部
〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

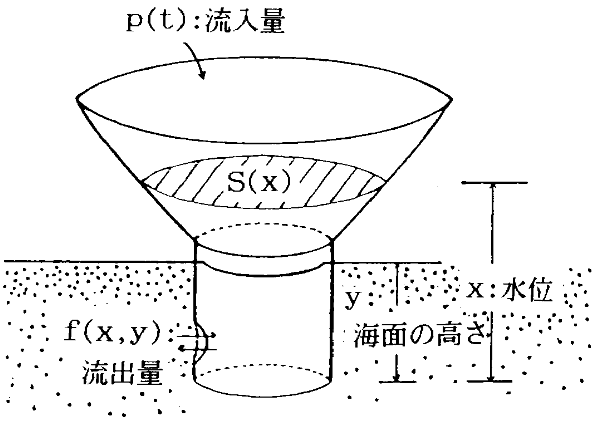

図2　酒杯型遊水池モデル

ングラデッシュは，古来その遊水池としての役割を果たしてきたといえる．すなわち，雨期には洪水が，乾期には渇水が起こるのも当然といえる土地柄なのである．

さて，このようなバングラデッシュの国土全体を一つの容器とみて，その水収支を考えてみることにしよう．第一に問題にすべきは，国土の形状のモデル化である．いま，海水中に立てられた，ある高さの円筒があり，その上に中華鍋がおかれた形を想像して欲しい．この円筒の側面および中華鍋の底には，十分大きな穴が開いており，ここから水が自由に出入りするものとしよう．そして，バングラデッシュの国土が，このような形であるとモデル化してみる．また，円筒の上に中華鍋をのせたこの形全体は，酒杯のようにも見える．そこでこれを**酒杯型遊水池モデル**と呼ぶことにしよう．この酒杯において，円筒部分はほとんど一年中冠水している河川や湖沼に対応し，中華鍋の部分は，普段は陸地だが，洪水時には冠水する場所に対応している．

このモデルにおいて，酒杯内部の水位は，冠水している地域の海抜に対応している．これを x と記す．

x：水位

この時の水面の面積を

$S(x)$：水面の面積

と記し，これを**形状関数**と呼ぶ．

また，この酒杯への単位時間あたりの流入量が

$p(t)$：単位時間あたりの流入量

であるものとする．この $p(t)$ を**流入関数**と呼ぶ．

一方において，海面もまた上下する．日々の潮汐もさることながら，サイクロンの際の低気圧は海面を大幅に上昇させるという．これを考慮に入れるために，海面の高さもまた変数として扱い，これを y と記す．

y：海面の高さ

ところで，河川から海に向かっての流量，モデルでいえば，酒杯内部から外部へ向かっての流量は，両者の水位の関数で表されると考えられる．これを

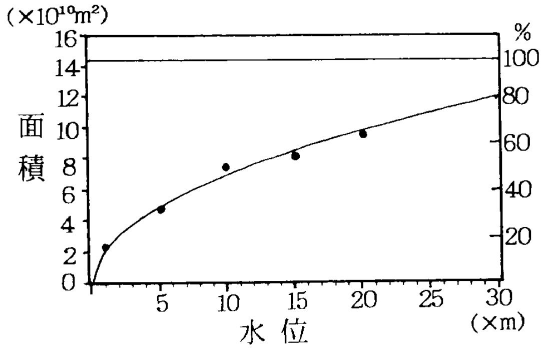

図3　水位と面積の関係

$f(x,y)$：単位時間あたりの流出量

と記し，**流出関数**と呼ぶ．

実際，バングラデッシュという遊水池から水が失われる要因には，海への流出以外にも蒸発や浸透が考えられるが，このモデルでは，これらの要因はとりあえず無視するものとしよう．その根拠は，本研究の本旨が雨期における水理の問題であり，雨期においては，第一に，高湿度のため蒸発は大きな影響を与えない，第二に，バングラデッシュの泥土層は，水を十分含み飽和状態になっていると考えられるからである．

このような前提のもとでは，水位(x)の変化について，次のような微分方程式をたてることができる*)．

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p(t)-f(x,y)}{S(x)} \tag{1}$$

2．微分方程式を構成する諸要素の推定

本節では，(1)式の微分方程式を構成する諸要素を，バングラデッシュに即して推定して行くことにしよう．

2.1　形状関数 ($S(x)$)

第一に，形状関数を推定する．形状関数($S(x)$)の値とは，すなわち基準からの標高 x 以下にある国土の面積である．上述の酒杯型遊水池モデルは，形状関数($S(x)$)を

$$S(x)=\begin{cases} S_0 & (x\leqq x_0) \quad (\text{円筒部分}) \\ \phi(x) & (x>x_0) \quad (\text{中華鍋部分}) \end{cases} \tag{2}$$

とするものである．ここに，S_0 および x_0 は定数で，$\phi(x)$ は x の滑らかな単調増加関数である．形状関数

*) このような微分方程式は，容器における水収支を示す基本的なものであり，他にも湖沼の水位変化を記述するものとして用いられた例がある [1]

$(S(x))$の特定には，これらの定数 S_0，x_0 および関数 $\phi(x)$ の推定が必要である．

まず，関数 $\phi(x)$，すなわち中華鍋の部分から考えて行こう．そのため，地図 [2] より各等高線に囲まれている地域の面積を測定し，その結果を，面積 (S) をヨコ軸に，水位 (x) をタテ軸として打点してみた（**図3**）．これより，関数 $\phi(x)$ が次のような平方根関数（図3の実線）で，十分近似されることが分かる．

$$\phi(x)=2.172\times10^{10}\times\sqrt{x}\ (\mathrm{m^2}) \tag{3}$$

次に円筒部分について考えよう．バングラデッシュの全国土の約15%は常に冠水している [3] から，その断面積 (S_0) を次のように定めた．

$$S_0=2.172\times10^{10}\ (\mathrm{m^2}) \tag{4}$$

さて，酒杯型遊水池モデルにおいて $x=x_0$ という高さは，円筒部分と中華鍋部分との接合部に相当する．それゆえ，$x=x_0$ の時，中華鍋部分の断面積 $(S(x_0))$ と円筒部分の断面積 (S_0) とが等しくなるように

$$x_0=1\ (\mathrm{m}) \tag{5}$$

という値を用いることにした．

以上より，バングラデッシュを対象とした遊水池モデルにおける形状関数 $(S(x))$ を，次のように推定した．

$$S(x)=\begin{cases}2.172\times10^{10}(\mathrm{m^2}) & (x\leqq1)\\ 2.172\times10^{10}\times\sqrt{x}(\mathrm{m^2}) & (x>1)\end{cases} \tag{6}$$

2.2 流入関数 $(p(t))$

次に流入量について考える．流入量には，河川によって周辺国から運び込まれる水量と，国土内部への降水量とがある．前者は，河川の上流域でのダム建設など人為的な流量操作が可能であるが，後者は，人為的には如何ともしがたい．そこで，流入量を制御可能な流入量 $(p_1(t))$ と制御不可能な流入量 $(p_2(t))$ とに分けて考える．すなわち流入関数 $(p(t))$ は，次式のように書ける．

$$p(t)=p_1(t)+p_2(t) \tag{7}$$

また，この国の気候は各月の降水量から，乾期（11～3月），小雨期（4～5月），雨期（6～10月）の3つの期に分けられる．無論，各月毎に河川流量および降水量は変化するが，大局的見地より，この3期をそれぞれまとめて考える．さらに，河川流量および降水量には年次による変化もあるが，ここでは，平均的な量を基本に据えて考えることにした．推定の過程は後述するが，気象記録 [2] [4] に基づいて，制御可能な流入量 $(p_1(t))$，制御不可能な流入量 $(p_2(t))$ をそれぞれ，次のように想定した．

$$p_1(t)=\begin{cases}5.605\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{乾期})\\ 12.330\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{小雨期})\\ 30.600\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{雨期})\end{cases} \tag{8}$$

$$p_2(t)=\begin{cases}0.301\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{乾期})\\ 2.618\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{小雨期})\\ 6.743\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{雨期})\end{cases} \tag{9}$$

以後，これら $p_1(t)$ および $p_2(t)$ をそれぞれ**単位時間あたりの標準河川流量**，および**標準降水量**と呼ぶことにする．一方，サイクロン上陸時には，河川流量，降水量ともに標準量より大幅に増加するといわれる．このときには，流入量を標準流入量とは別に設定せねばならない．これについても，気象記録 [2] [5] からそれぞれ

$$p^*{}_1(t)=50.389\times10^{10}(\mathrm{m^3}) \tag{10}$$

$$p^*{}_2(t)=14.490\times10^{10}(\mathrm{m^3}) \tag{11}$$

とした．それゆえこの時の流入量は次のように書ける．

$$p^*(t)=64.879\times10^{10}(\mathrm{m^3}) \tag{12}$$

このような設定値の推定過程を述べておこう．第一に，単位時間あたりの標準河川流量 $(p_1(t))$ について考える．前述のように，バングラデッシュの国土の約8割は，三大河川を中心とする複雑な水系に覆われたデルタ地帯である．このことから，これら三つの河川の流量の和をもって，河川流量としても差し支えないだろう．

そこで，これらの河川の流量を調べ（**表1**），乾期・小雨期・雨期それぞれの期毎に，月平均流量を求めた．ただし，小雨期に関しては，年間平均流量を用いた．

月平均河川流量

$$=\begin{cases}5.618\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{乾期})\\ 13.740\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{小雨期})\\ 34.000\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{雨期})\end{cases} \tag{13}$$

さて，この河川流量のデータは，バングラデッシュの中心部で測定されたもので，そのすべてが国外からの流入量ではない．一方，バングラデッシュの河川流量の9割近くが，インド等周辺国から流入していることが文献 [3] に見えたので，(13)式の各期の値に0.9を乗じたものを，単位時間あたりの標準河川流量 $(p_1(t))$ と考え，(8)式を得た．

第二に，単位時間あたりの標準降水量について考える．バングラデッシュの月別平年降水量は，**表2**の通りである．この値に国土面積（143,998km²）を乗じた結果，乾期・小雨期・雨期各々の月平均降水量は，次のように求められた．

表1　三大河川の流量［2］（単位：m³／s）

	ガンジス川	ブラハマプトラ川	メグナ川
乾期平均流量	790	19,577	1,328
雨期平均流量	51,625	65,491	14,047
年間平均流量	8,544	37,550	6,748
史上最大流量	76,000	98,600	19,800

表2　バングラデッシュの月別平年降水量［4］
（1961～1981年平均，単位：mm）

1月	2月	3月	4月	5月	6月
4.2	14.4	34.6	129.8	233.8	594.3
7月	8月	9月	10月	11月	12月
757.8	558.9	249.7	180.5	46.0	8.4

月平均降水量

$$=\begin{cases} 0.301\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{乾期}) \\ 2.618\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{小雨期}) \\ 6.743\times10^{10}\ (\mathrm{m^3}/\text{月})\ (\text{雨期}) \end{cases} \tag{13}$$

この月平均降水量を，単位時間あたりの標準降水量（$p_2(t)$）とみなすことによって(9)式を得た．

第三に，サイクロン上陸時の河川流量について考える．そのため，バングラデッシュを流れる三大河川の史上最大流量（表1）を合計して，サイクロン上陸時の河川流量（$p^*_1(t)$）を，次式のように推定した．

$$p^*_1(t)=50.389\times10^{10}(\mathrm{m^3}) \tag{15}$$

第四に，サイクロン上陸時には，その影響による降水量だけで8月の平均月間降水量の1.8倍にも達したとの気象記録［5］に基づき，サイクロン上陸時の降水量($p^*_2(t)$)を，次式のように推定した．

$$p^*_2(t)=14.490\times10^{10}(\mathrm{m^3}) \tag{16}$$

2.3　海面の高さ(y)

海面の高さ(y)は，波浪や潮汐を考えれば，時々刻々変化するものであるが，本研究では，水理の概略に主眼を置いているので，サイクロン上陸時以外は

$$y=0\ (\mathrm{m}) \tag{17}$$

という一定値をとるものとした．また，サイクロン上陸時については，1988年に潮位が7 m前後上昇したという事実に鑑み，次のような値を用いた．

$$y=7\ (\mathrm{m}) \tag{18}$$

2.4　流出関数（$f(x,\ y)$）

2.4.1　関数形の推定

第1節で述べたように，流出量は酒杯内の水位(x)と海面の高さ(y)の関数として与えられるものとした．実際問題として，この関数の推定は極めて困難である．そこで，トリチェッリの定理を参照した上で，我々はごく粗い近似として，次のような関数を考えた．

$$f(x,\ y)=u|x-y|^v \tag{19}$$

ここに，u および v はパラメターである．

トリチェッリの定理によれば，水面の高さの異なる二つの水槽をU字管でつないだとき，U字管を通る水の速さは，抵抗を無視すれば，両水面の高さの差の平方根に比例する．すなわち，断面積(s)が一定である時，U字管を通る流量(f)は次のように書ける．

$$f=s\sqrt{|x-y|} \tag{20}$$

それゆえ，v は1/2或いはその近くの値と推定される．

また，酒杯型遊水池モデルにおいて，U字管の断面積は，酒杯内部の水と外部の水とが出入りする穴の断面積に対応する．(19)式において，パラメターuはこの穴の断面積と抵抗に対応している．河口の形を考えるならば，水位の上下によって‘穴’の断面積に変化があるとするのが自然ではあるが，一方において，水量が増し，水位が上昇すれば抵抗も高まる．後にも述べるように，uの値を適当に選べば，uをほぼ一定と考えても全体として妥当な流出量を構成することができる．

2.4.2　パラメターの推定

（イ）v の一次近似

先に述べたように，トリチェッリの定理を参照すれば，パラメター v は1/2或いはそれに近い値と推定できる．それゆえパラメター v を

$$0<v<1 \tag{21}$$

の範囲で考えることにした．

（ロ）u の一次近似

パラメター u の一次近似として，そのオーダーを推定しよう．いま，バングラデッシュの水位(x)が安定している時期があるとすれば，そのときには

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p(t)-f(x,\ y)}{S(x)}=0 \tag{22}$$

が成り立っている．すなわち，このとき，

$$p(t)-f(x,\ y)=0 \tag{23}$$

が満たされている．このことは，流出関数$f(x,\ y)$と流入関数($p(t)$)とが同じオーダーの値を持つことを示している．第2.2節で述べた通り，流入関数($p(t)$)はおよそ10^{10}～10^{11}の値である．また，パラメターvを1/2を中心に考えるのであれば，$(x-y)^v$については，

$$0<(x-y)^v<10 \tag{24}$$

として良いだろう．これらのことを考えて，パラメターuの範囲を次のように定めた．

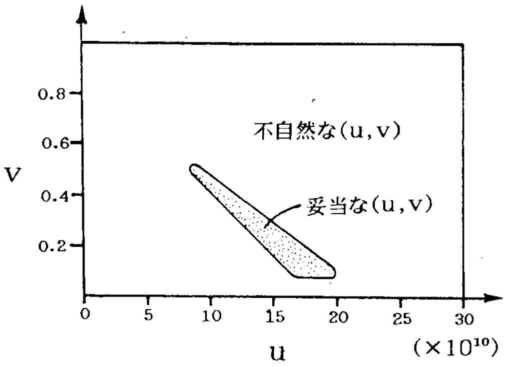

図4　妥当な（u, v）の範囲

$$10^{10} \leqq u < 10^{12} \tag{25}$$

(ハ)シミュレーションによるパラメターの区間縮小

以上に述べてきたような諸元の推定に基づいて，微分方程式((1)式)の数値解を求めることができる．ただし，流出関数を特定するパラメター u および v については，その区間しか推定されていないから，その中で特定の値を選択する他はない．しかし，選択されたパラメター u および v を用いての数値解は，実際の現象に照らして不自然であってはならない．このようにして，パラメター u および v の妥当な値の範囲をさらに縮小できる．

ここで，対比に用いた実際の現象とは，

①全国土の約15%が一年中冠水している．

②雨期における冠水率が全国土の35%を下回らない．

③サイクロン上陸時には全国土の約60%が冠水する．

④乾期には洪水が起こらない時期がある．

という客観的事実であるが，これによって絞られた u および v の範囲は大略**図4**に示す通りである．この図より，パラメター u および v の妥当な値は，ごく狭い範囲に限られることが分かる．また，この範囲の u および v の値を用いて微分方程式((1)式)の数値解を求めてみると，さほど大きな差はない．それゆえ，以後

$$u = 12.5 \times 10^{10} \tag{26}$$

$$v = 0.3 \tag{27}$$

という値を，パラメター u および v の代表値とする．すなわち，流出関数($f(x, y)$)を

$$f(x, y) = 12.5 \times 10^{10} \times (x - y)^{0.3} \tag{28}$$

として，議論を進めてゆくことにする．

3．シミュレーション

3.1　モデルの妥当性

前節までの議論で，モデルとパラメターをとりあえず設定した．このような設定に基づく微分方程式（(1)式）の数値解を**図5**に示す．この数値解は，計算を始めてから3年目および4年目の結果であり，初期値の影響は除かれている．また，この数値解では，雨期後半には国土の半分が冠水するほど水位が上昇するが，洪水の影響が翌年にまではおよんでいない．これらは，実際，平年の現象とほぼ一致している．

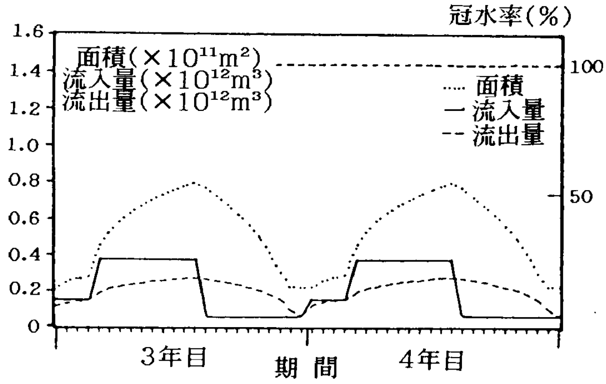

図5　微分方程式の数値解

次に，サイクロンの場合を考えよう．3年目の雨期の後半に，サイクロンが上陸したという設定のもとで得られた数値解を**図6**に示す．これは，サイクロン上陸時には国土の約6割が水没するという気象記録とも合致している．

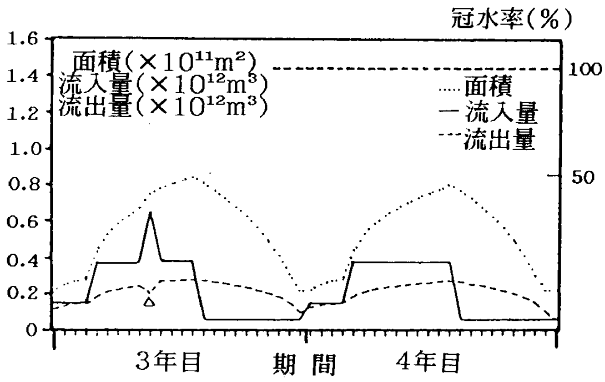

図6　サイクロンの影響

以上は，この微分方程式の妥当性を示しており，限定された範囲とはいえ，バングラデッシュの治水問題の議論にこのモデルを用いることができる．

3.2　数値実験

上記のようにモデルの妥当性をとりあえず認めたところで，数値実験を試み，遊水池や浚渫による洪水回避の可能性を検討してみよう．

まず，上流に巨大な遊水池を作って流量を減らすことを考える．いま，バングラデッシュの雨期における一か月分の流量の貯水が可能な遊水池を作り，その水を乾期に一様に放水するものとして微分方程式の数値解を求めた結果を**図7**に示す．この遊水池の規模はロ

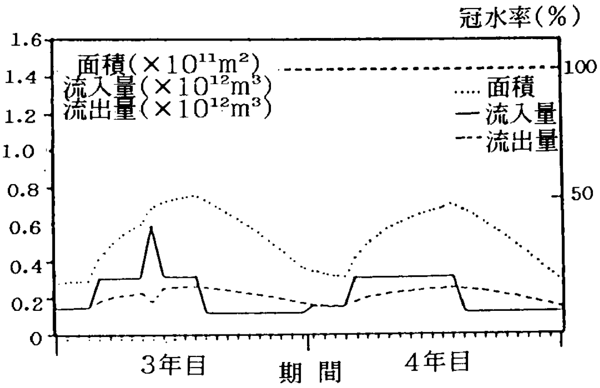

図7　遊水池の効果

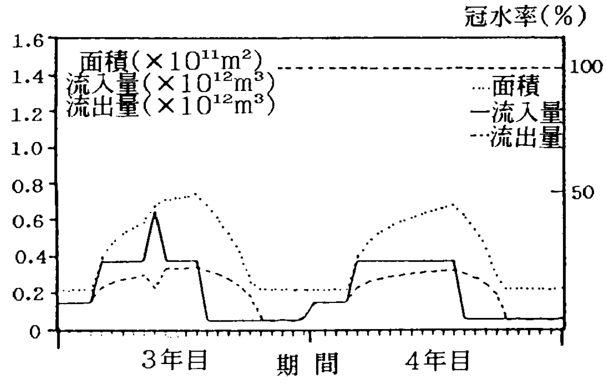

図8　浚渫の効果

シア西部に位置するオネガ湖と同等であり，これは琵琶湖11個分に相当する．これだけの遊水池をしても，洪水はピーク時にこそ多少緩和されるものの，期間は長引き，サイクロンの影響が乾期にも残ってしまう．

次に，下流域において浚渫を施し，河道面積を大きくして洪水時の水はけをよくすることを考える．河道面積の増大は，このモデルにおいて流出関数($f(x,y)$)のパラメターuの値の増大に対応する．いま，河道面積が従来の1.2倍になるような浚渫を実施したと仮定して，微分方程式の数値解を求めた結果を**図8**に示す．この図からも分かるように，これだけを浚渫を施したにしても，雨期には国土の約45%が冠水し，サイクロン上陸時には冠水する地域が国土の50%以上になってしまい，洪水の回避は不可能である．

最後に，上流には巨大な遊水池を作り，下流では大規模な浚渫を実施した場合でも，数値実験の結果，サイクロン上陸時には，やはり国土の半分が水没してしまうことが分かった．

4．おわりに

現在，洪水回避の策として，ダムおよび堤防の建設が計画されている．しかし，このような方法では，たとえ莫大な時間と経費を費やしても，バングラデッシュの洪水の防止や緩和が，局地的目的以外は，困難であることを，本研究結果は明らかにしている．

この深刻な洪水は，バングラデッシュを流れる河川の流量の膨大さと，国土の平坦さに起因することは，以上に見たとおりである．しかし，河川の流量を大幅に減らすことも，国土の形状を変えることも，事実上極めて困難である．

それにもかかわらず，この国の発展のためには，洪水への対策が不可欠である．しかし，洪水が防ぎきることのできない自然現象であるならば，打開策はこれを前提としたものでなくてはなるまい．本研究の結果は，洪水そのものを防ぐことから，発想を転換して，洪水との共存を前提として，全体を高床形式にした都市の開発等の考慮の必要性を示唆している．

参考文献

[1]　柳井浩：「アラル海の水位－微分方程式による考察－」，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 38，No. 9，p. 22-27，1993，日本OR学会．

[2]　H. Brammer，M. Asaduzzaman，P. Sultana 著：“Briefing Document No. 3 Effect of Climate and Sea-Level Changes on the Natural Resources of Bangladesh.”，1993，Bangladesh Unnayan Parishad.

[3]　Q. K. Ahmad，N. Ahmad，K. B. Sajjadur Rasheed 著：“RESOURCES, ENVIRONMENT AND DEVELOPMENT IN BANGLADESH.”，1994，Academicpublishers

[4]　国立天文台編：「理科年表 平成6年（机上版）」，1993，丸善．

[5]　日本気象協会編：「1989年版 気象年鑑」，1989，大蔵省印刷局．

Vol.41, nos. 1 & 2 に掲載されました「やさしい待ち行列 (3), (4)」に、つぎのような誤記が見つかりました。謹んで訂正させていただきます。

p.37, (5) 式：分母の $(c-1)!$ ⇒ $c!$

p.38, (6) 式：分母の $\mathrm{E}(S)$ を2乗する

$$W_q(M/G/c) = \frac{\mathrm{E}(S^2)}{2\{\mathrm{E}(S)\}^2} W_q(M/M/c) \quad (6)$$

p.38, (6) 式の1行下、行末：M/M/1 ⇒ M/M/c

p.105, 表4：2つ目の欄タイトル ⇒ “$K=100$”

p.105, 左、下から8行目：“全く” を削除