

# 多様化時代の数理計画法 第1回 目標計画法

山口 俊和

## 連載「多様化時代の数理計画法」 のねらいと構成

近年の消費動向を見れば、画一化された製品から多様で個性豊かな製品へと移行している。自動車为例に挙げれば、フォードのT型自動車のような画一化は流行らず、顧客の要求に応じた仕様や形状の選択が当然になってきている。

ところで、数理計画問題のような決定問題では、意思決定者の意向を反映することは重要である。意思決定者の個性に応じた合理的な解を求めなければならない。通常の数理計画法では、決定により生じる結果が明確かつ正確に予測でき、絶対的な単一の評価基準が容易に設定できる状況での問題を取り扱っている。このような問題設定においては、最適性は一意に定まる。

しかし、現実の意思決定を考えれば、評価基準の一つに限定できない場合や、決定により生じる結果が明確に予測できない場合がある。このような状況の数理計画問題を取り扱うため、複数の評価基準の存在を許す目標計画法と多目的計画法や、生じる結果の不確実性を扱う確率計画法と可能性計画法（ファジィ数理計画法）などが提案されている。これらの計画問題では、最適性が一意に定まらず、自動車の選定のように、意思決定者の意向により解が異なる。したがって、どのように解を求めるかという数理計画法の課題に加えて、意思決定者の意向や好みを反映してどのように問題を取り扱うかが重要な課題となる。

本連載では、多様に解が存在する状況下の数理

計画法として、目標計画法や多目的計画法、確率計画法や可能性計画法などを取り上げ、意思決定者の意向や好みの取り扱い方を中心に、6回にわたり解説する。各回の内容および執筆者は次のとおりである。

- 第1回 目標計画法（山口俊和）
- 第2回 目標ベクトル法、多目的線形計画法、フレキシブル計画法（山口俊和）
- 第3回 確率計画法（石井博昭）
- 第4回 可能性計画法（乾口雅弘）
- 第5回 確率計画法 v.s. 可能性計画法（乾口雅弘）
- 第6回 今後の展望（石井博昭）

各回とも、できる限り種々の手法の列挙による紹介を避け、基本的な手法に限定し、簡単な例題と図を用いたわかりやすい解説を目指した。また、類似した手法については、比較・検討を行うなど、各手法の特徴や長短が把握できるよう心掛けた。ただし、各手法の厳密な理論展開や、より複雑なモデルについては、紙面の都合上、割愛した。興味を持たれた読者は、引用文献等を参考にして頂きたい。

（乾口雅弘 広島大学）

## 1. はじめに

企業では、限られた各種の経営資源を有効に活用するための計画問題が、生産、購買、設計、営業、財務、労務などのいろいろな部門で生じている。利益の最大化やコストの最小化を目的にする場合には線形計画法（linear programming）がしばしば利用されてきた。たとえば、利益総額を最大にするための製品生産量の組み合わせを求める生産計画問題や、輸送コストを最小化するための輸送計画などに利用されている。

ところが、企業の目標は唯一のものではなく、複数

の目標を同時に考慮すべきであるという考え方が注目されるようになってきた。たとえば、財務計画では、税引後利益を大きくしたいという目標のほか、配当金をある水準以上支払いたい、売上高をある水準以上にしたい、というような複数目標が実際には考えられるので、単一目標の最大化モデルに定式化するよりは、複数の目標を同時に考慮した定式化を行なった上で満足できる解を求めたい。そのために、線形計画法を発展させて多目標を扱えるようにした“目標計画法(goal programming)”が Charnesら [1] や Ijiri [2] によって開発された。

多目標計画の代表的な手法である目標計画法は、意思決定者が複数の目標のそれぞれに要求水準 (aspiration level) を設定し、それらを同時に満足させることを望むが、もしそれが不可能な場合には目標値からの不達成の度合に順序あるいは重みを付けて、総合的なリグレット (regret) を最小化して、意思決定者が妥協できる解を得るための方法である。

## 2. 目標計画法の基本的な考え方

### 2.1 リグレット関数

複数の目標を考慮した問題を検討する前に、まず1目標の場合を例にして、目標計画法の定式化の基本となるリグレット関数の考え方を整理してみよう。

#### [例題 1]

ある工場では2種類の製品A, Bを生産しており、どちらも共通の2つの工程を必要としている。生産に利用できる時間は、工程1が月間延べ320時間、工程2が月間延べ360時間に制限されている。製品Aの単位当り所要時間は工程1で16時間、工程2で20時間である。製品Bは工程1, 2とも10時間ずつ必要である。また、製品Aは1単位につきある特殊な部品を10単位必要とするが、この部品を供給する外注工場の能力は月間150単位に制限されている。製品の単位当り粗利益(販売単価から変動費単価を差し引いた額)60万円, Bが20万円である。製品の需要は十分あるものとする。

この問題を目標計画法の考え方にしたがって定式化してみよう。製品Aの月間生産量を  $x_1$  単位、製品Bの月間生産量を  $x_2$  単位とすると、月間の粗利益総額(単位: 万円) は次のようになる。

$$g(x) = 60x_1 + 20x_2 \quad (1)$$

また、工程の制約条件および非負条件は次のようになる。

$$T_1(\text{工程1の制約}) : 16x_1 + 10x_2 \leq 320 \quad (2)$$

$$T_2(\text{工程2の制約}) : 20x_1 + 10x_2 \leq 360 \quad (3)$$

$$T_3(\text{外注部品の制約}) : 10x_1 \leq 150 \quad (4)$$

$$T_4(\text{非負条件}) : x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

線形計画法では、(2)~(5)式のもとで、(1)式の最大化をはかるが、目標計画法では、意思決定者が目標に要求水準(または満足水準)を設定し、それを達成することを望み、もし達成できない場合には、できるだけその値に近づけるという考え方をとる。要求水準を  $g^*$  とするとき、実際の達成値が  $g^*$  に不足する量を示す偏差変数(差異変数ともいう)を  $d^-$ 、 $g^*$  を超過する量を示す偏差変数を  $d^+$  とすると、(1)式は次のようになる。

$$60x_1 + 20x_2 + d^- - d^+ = g^* \quad (6)$$

ここで、 $d^- \geq 0$ 、 $d^+ \geq 0$  であり、 $d^- \times d^+ = 0$  である。 $d^-$ 、 $d^+$  は、達成値が要求水準に達しなかったためのリグレットの大きさを示すものとする。(6)式を「目標条件式」と呼び、これを前述の(2)~(5)式の制約条件式((2)~(4)式を「テクニカルな条件式」と呼ぶ)に追加し、リグレット関数  $R$  を目的関数として、その最小化をはかる。

リグレット関数  $R$  は、種々の形をとることができるが、この例題のように目標が利益のような場合には、次の2つのタイプが考えられる。

$$(a) R = d^- + d^+$$

要求水準に粗利益目標をできるだけ近づけたい場合であり、不足も超過も避け、要求水準にちょうど一致させることをねらいとする。例題1で、 $g^* = 600$  万円

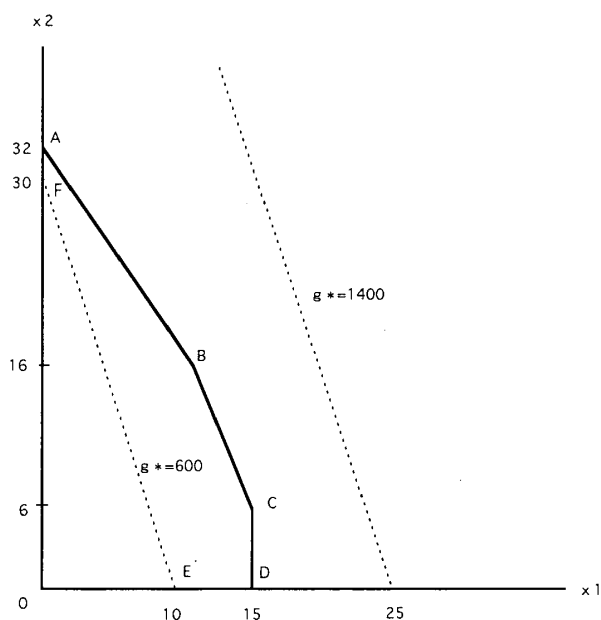


図1  $x$  平面での図解

とすると、図1の線分EF上の各点が最適解となる

$$(b) R = d^-$$

要求水準を超過してもかまわないが、不足する場合には、不足分をできるだけ小さくしたいという場合である。例題1で、 $g^* = 1400$ 万円とすると、図1の点C ( $x_1 = 15, x_2 = 6$ )が解になる。また、 $g^* = 600$ 万円とすると、図形ABCDEF内の点はすべて解になる。

もし、目標がコストの場合には、次のようなりグレット関数が考えられる。

$$(c) R = d^+$$

要求水準に不足することはかまわないが、超過する場合には、超過分をできるだけ小さくしたいという場合である。

また、要求水準とは無関係にできるだけ大きくしたい(あるいは小さくしたい)という場合には次のような2つのリグレット関数を設定すればよい。

$$(d) R = d^- - d^+$$

要求水準に関係なくできるだけ大きくしたいという場合であり、線形計画法の最大化問題に対応している。

$$(e) R = d^+ - d^-$$

要求水準に関係なくできるだけ小さくしたいという場合であり、線形計画法の最小化問題に対応している。

このほか、目標の内容によっては、「目標の達成値がある値からできるだけ隔たるようにしたい」というケースや、「目標の達成値がある値とある値の範囲にしたい」というケースも生じるが、それらの定式化については、文献[3]を参照されたい。

## 2.2 付順方式と加重方式

次に、 $m$ 個の目標  $G_1, G_2, \dots, G_m$  を含む問題を考えよう。

目標  $G_i$  の達成水準をあらわす関数を

$$g_i(x) = \sum c_{ij} x_j, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (7)$$

とし、 $G_i$ の要求水準を  $g_i^*$ 、要求水準からの偏差変数を  $d_i^-$ 、 $d_i^+$  ( $d_i^-$ 、 $d_i^+ \geq 0$ ;  $d_i^- \times d_i^+ = 0$ ) とすると、目標条件式は次のようになる。

$$\sum c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i^* \quad (8)$$

異なる目標のリグレットを同一の次元で扱えるようにするための方法として、付順 (ordering) お

よび加重 (weighting) という2つの方式が用いられている。

付順方式とは、目標の重要度の大きさの順に“順位係数”  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, T$ ) を与え、対応する偏差変数に  $P_i$  をつけたリグレット関数を最小化する方法である。順位係数には

$$P_1 \gg P_2 \gg \dots \gg P_T$$

という関係が定義されている。この  $\gg$  という記号は「絶対的に大きい」という意味の不等号であって、一般に

$$P_i \gg P_j$$

とは、 $P_j$  にどのような大きな自然数  $n$  を掛けても

$$P_i \leq nP_j$$

になることはないという関係をいう。

さて、ここで次の例題を使って、付順方式の考え方を説明しよう。

### [例題2]

例題1において、売上高目標 ( $G_1$ ) を粗利益目標 ( $G_2$ ) に加えて同時に考えてみよう。ここで、製品Aの販売単価を160万円、製品Bのそれを120万円とする。テクニカルな制約条件は例題1と同じとする。

$G_1$ の要求水準を  $g_1^*$ 、 $G_2$ の要求水準を  $g_2^*$  とすると、(2)~(5)式に次の2つの目標条件式を追加したものが制約条件になる。

$G_1$  (売上高目標) :

$$160x_1 + 120x_2 + d_1^- - d_1^+ = g_1^* \quad (9)$$

$G_2$  (粗利益目標) :

$$60x_1 + 20x_2 + d_2^- - d_2^+ = g_2^* \quad (10)$$

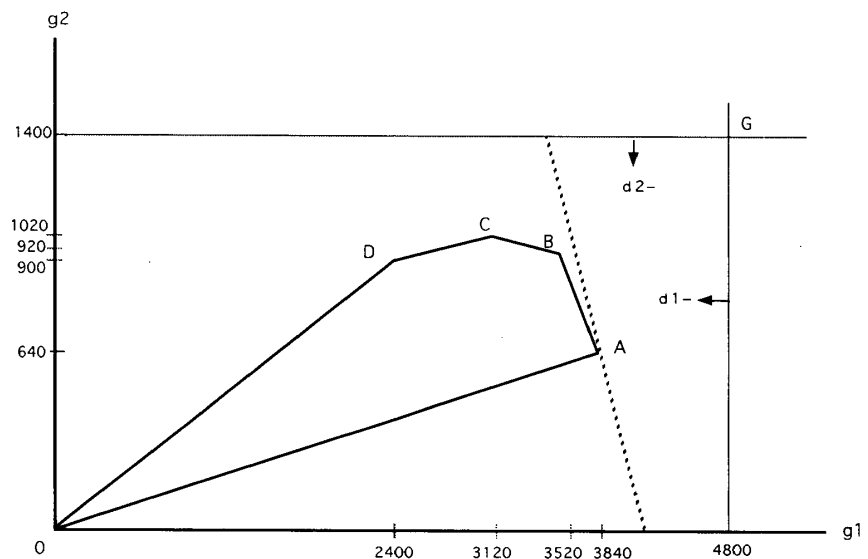


図2  $g$  平面での図解 (付順タイプ)

ここで、 $d_1^-$ 、 $d_1^+$ 、 $d_2^-$ 、 $d_2^+$ は偏差変数である。

$g_1^*=4800$ 万円、 $g_2^*=1400$ 万円とし、 $G_1$ を第1順位の目標、 $G_2$ を第2順位の目標とし、それぞれ不足分をできるだけ小さくしたいものとする、リグレット関数は

$$R = P_1 d_1^- + P_2 d_2^-$$

となり、これを最小化することによって最適解が得られる。すなわち、まず $P_1$ を係数とする $d_1^-$ を最小にした上で、次に $P_2$ を係数とする $d_2^-$ を最小にするという考え方である。

決定変数 $x_1$ 、 $x_2$ を直交軸にとった $x$ 平面でこの問題の最適解を求めることもできるが、この例題のように決定変数の数が2つで、目標の数も2つである場合には、2つの目標の達成水準 $g_1$ 、 $g_2$ を直交軸にとった図2のような $g$ 平面上で考察することができる。 $x$ 平面における実行可能領域の各端点の座標を計算し、それらを $g$ 平面での座標になおしてプロットして結んだ図形 $ABCD$ の内部が実行可能領域である。

この問題の最適解は、 $g_1^*=4800$ からの不足分を最小にする点 $A(x_1=0, x_2=32)$ である。すなわち、図2のように、 $g_1^*=4800$ を基準にして $R = d_1^-$ の等リグレット線を描いていき、実行可能解と最初にぶつかる点として求められる。このとき、点Aの目標達成値は、 $G_1$ が3840万円、 $G_2$ が640万円であり、リグレット関数の値は $R = 960P_1 + 760P_2$ となる。各偏差変数の値は、 $d_1^- = 960$ 、 $d_1^+ = 0$ 、 $d_2^- = 760$ 、 $d_2^+ = 0$ である。この例のように、付順タイプの場合は、第1順位の目標が不達成の場合は、第2順位の目標を達成することは無意味なので、無視されてしまう。

また、 $G_1$ と $G_2$ の順位を入れ替えると、リグレット関数は

$$R = P_1 d_2^- + P_2 d_1^-$$

となり、最適解は $g_2^*=1400$ からの不足分を最小にする図2の点 $C(x_1=15, x_2=6)$ である。点Cの目標達成値は $G_1$ が3120万円、 $G_2$ が1020万円で、リグレット関数の値は $R = 380P_1 + 1680P_2$ となる。各偏差変数の値は、 $d_1^- = 1680$ 、 $d_1^+ = 0$ 、 $d_2^- = 380$ 、 $d_2^+ = 0$ である。

加重方式は各目標の不達成度に重み付けを行い、その加重和を最小にするやり方である。加重係数は同一順位の目標間に通約性を与

える役割を果たす。加重係数の値は、ある偏差変数が1単位変化したときの残念度の減少分がほかの偏差変数の何単位分の変化に相当するかということを考慮して決定する。しかし、目標の尺度が異なるような場合には、加重係数の決定が困難なことが多い。

例題2において、 $G_1$ と $G_2$ は同じ順位にあるが、 $d_1^-$ と $d_2^-$ に対する加重係数の比が2:1であるとする、リグレット関数は

$$R = 2d_1^- + d_2^-$$

となる。

この問題の最適解は、図3の点Gからみたりグレット関数を最小にする実行可能領域の点である。点Gを基準にして、 $R = 2d_1^- + d_2^-$ の等リグレット線を描いていき、実行可能領域と最初にぶつかる点が最適解で、点 $A(x_1=0, x_2=32)$ が求められる。点Aの $g$ 平面での座標は、 $g_1=3840$ 、 $g_2=640$ であるので、リグレット関数の値は $R = 2680$ である。

この解の要求水準に対する達成の度は $G_1$ が $3840/4800 = 80\%$ 、 $G_2$ が $640/1400 = 45\%$ で目標達成のバランスはあまりよくない。目標の達成度のバランスのよい解（この例では、点Bや点Cのような解）を求めるためには、連載の第2回で紹介する“目標ベクトル法”[3]のL字型モデルを適用すればよい（なお、この例では、 $G_2$ 、 $G_1$ の順位で付順方式を適用すれば、点Cという解を得ることができるが、これは偶然であり、一般に付順方式で達成度のバランスのよい解が求められるという保証はない）。

なお、 $d_1^-$ に対する加重係数を $w_1^- (\geq 0)$ 、 $d_1^+$ に対する加重係数を $w_1^+ (\geq 0)$ とすると、ある順位の目標間で

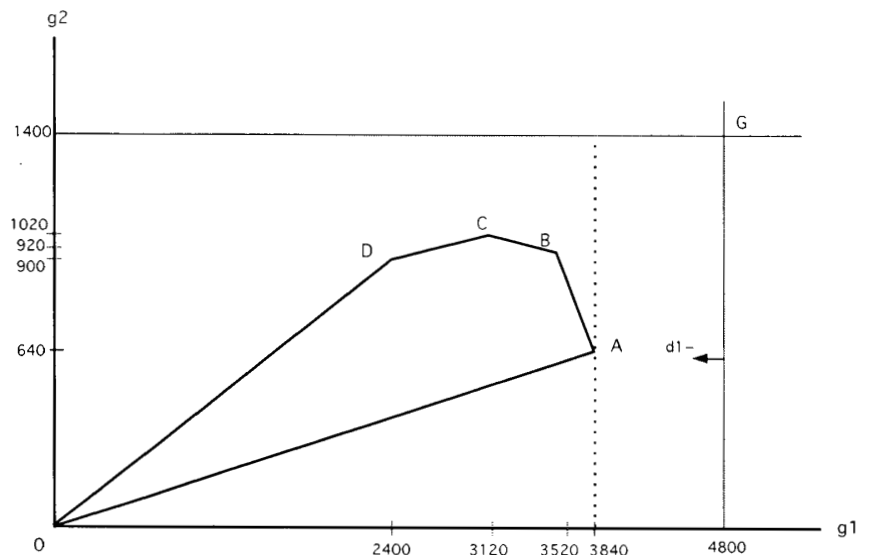


図3  $g$ 平面での図解（加重タイプ）

の偏差変数の加重和は

$$W_t = \Sigma (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+)$$

となる。ここで、 $I_t (t=1, 2, \dots, T)$  は  $t$  番目の順位  
の目標集合である。

付順方式、加重方式、および加重と付順の両方式を  
取り入れた目標計画法の一般的な定式化は以下のよう  
になる。

<目的関数 (リグレット関数)>

(1) 付順方式の場合

$$\text{最小化： } R = \Sigma P_t (\Sigma (d_i^- + d_i^+))$$

(2) 加重方式の場合

$$\text{最小化： } R = \Sigma (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+)$$

(3) 付順と加重の両方式が混在した場合

$$\text{最小化： } R = \Sigma P_t (\Sigma (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+))$$

<制約条件>

(目標条件式)

$$\Sigma c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i^* \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

(テクニカルな制約条件式)

$$\Sigma b_{jk} x_j \leq h_k \quad (k=1, 2, \dots, q)$$

(非負条件式)

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

$$d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

ここで、 $I_t$  は  $t$  番目の優先順位クラスの目標条件  
式の添字の集合である ( $t=1, 2, \dots, T$ )。もし、 $m$  個  
の異なる優先順位クラスがあり、 $g_i^*$  が  $i$  番目のクラ  
スに属する場合 (すなわち、 $T=m$ )、付順と加重が混  
在したタイプの目的関数 (リグレット関数) は次のよう  
に簡単に表わすことができる。

$$R = \Sigma P_i (w_i^- d_i^- + w_i^+ d_i^+)$$

### 3. 目標計画法のシンプレックス解法

目標計画法で定式化された問題は、決定変数と目標  
の数がそれぞれ 2 つの場合には、図を用いて解を求め  
ることができた。しかし、決定変数や目標の数が 3 つ  
以上だったり、複雑なリグレット関数をもつ問題の場  
合には、図から最適解を求めるのは困難である。

目標計画問題の解は、線形計画法の最適解法として  
知られているシンプレックス法を適用することによっ  
て求めることができる。この場合、線形計画法との主  
な相違は、シンプレックス判定基準の欄を目標に対す

る順位係数の数 ( $T$  個) だけ準備するということであ  
る。詳細な解法の手順は文献 [3] を参照されたい。

### 4. 目標計画法の最近の動向

目標計画法の理論面での展開としては、目標計画法  
を進展させる形で「目標ベクトル法」と名づけた方法  
論が開発されており [3]、この方法は次回に紹介する。  
さらに、比率目標を扱った研究、0-1 変数計画問題、  
整数計画問題を扱った研究や、目的関数の係数と目標  
値が区間数で与えられた場合の研究などが示されてい  
るが、目標計画法に関する最近の研究を展望すると、  
理論面の展開よりも適用面に重点が置かれている。こ  
れは、目標計画法の理論的な発展が一段落し、一応の  
体系化がなされたためと考えることができる。

事例は数多く報告されていて、企業の生産計画、財  
務計画、設備投資計画、人員計画、配送計画、広告媒  
体計画、マーケット戦略計画、資産選択計画などへの  
適用事例が内外の文献にみられる。一方、公共機関や  
自治体などのノンプロフィットな事業体においても、  
公共予算配分計画、都市計画、水資源利用計画、経済  
政策分析、環境保全計画、保健衛生計画、地域開発計  
画、大学の予算編成・人員計画、公立学校の通学先配  
分計画などの適用事例がみられる。

事例に興味がある方は、European Journal of  
Operational Research, OMEGA, Journal of the  
Operational Research Society, Management Sci-  
ence などの雑誌に比較的多く掲載されるので、注意さ  
れているとよい。

#### 参考文献

- [1] Charnes, A. and W. W. Cooper, "Management Models and Industrial Applications of Linear Programming, Vol. 1, Wiley, New York (1961)
- [2] Ijiri, Y., Management Goals and Accounting for Control, North-Holland, Amsterdam (1965) (井尻雄士:「計数管理の基礎」, 岩波書店 (1970))
- [3] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和:「経営の多目標計画」, 森北出版 (1987)
- [4] 坂和正敏:「線形システムの最適化<一目的から多目的へ>」, 森北出版 (1984)