教養講座

多様化時代の数理計画法　第2回

目標ベクトル法，多目的線形計画法，フレキシブル計画法

山口　俊和

1．はじめに

第1回でとり上げた目標計画法は，複数の目標に要求水準を設定し，各目標に順位係数あるいは加重係数を与え，リグレット関数を最小化する方法である．ところが，実際の経営計画では，各目標に明確な優先順位をつけるのは困難で，むしろいっせいに各目標を増大（または減少）させたいと望む場合も多く，そのような場合には付順方式は不適当である．また，そうした問題に加重方式を適用することを考えると，加重係数をそもそもどのように決めるかという問題が生じることが多い．また，もし加重係数が求まっても，各目標の達成度の割合が加重係数の比に近づくという保証はなく，しばしば偏りのあるバランスの悪い解が結果的に得られる．

そこで，目標計画法を発展させる形で“目標ベクトル法”と名づけた方法が開発された［3］．これは，各目標に十分レベルと必要レベルという2つの水準を設定して，複数の目標をバランスよく達成させる解を求めることをめざしたものである．

ところで，目標計画法や目標ベクトル法のようにあらかじめ意思決定者に目標値やリグレット関数のタイプ（これらを選好情報という）を要求するアプローチのほかに，選好性の仮定をおいて解を求めたり，対話的に選好情報を要求して解を求める多目的線形計画法（multi-objective linear programming）も数多く開発されている．これについては，本稿では紙面の都合で簡単に紹介するにとどめる．

一方，意思決定者が目標値を設定する際のあいまいさを“ファジイ集合”の概念で表現して，数理計画問題に定式化したファジィ数理計画法も数多く開発されている．詳細は第4回の連載にゆずるが，ここではZimmermannのフレキシブル計画法［10］［11］を紹介する．さらに，これが目標ベクトル法と対応づけられていることも示す．

やまぐち　としかず　東京理科大学　工学部経営工学科
〒162 新宿区神楽坂1-3

2．目標ベクトル法

目標ベクトル法（goal vector approach）は，目標空間上で複数目標の望ましい達成方向を示す“目標ベクトル”という概念を導入し，このベクトルと関連づけた“L字型リグレット関数”を基本モデルとする．L字型リグレット関数は調整済リグレットのミニマックス化をはかるもので，複数の目標をバランスよく増大させるという問題に適しており，通常のシンプレックス法でその最適解が求められる．

目標ベクトル法は，意思決定者が各目標について「少なくともこれ以上は是非達成したい」という“必要レベル（minimum required level）”と，「これだけ達成できれば十分満足できる」という“十分レベル（sufficient level）”とを設定する．意思決定者にとって，この設定作業の負担は少ない．これらを利用して，目標ベクトルを定義し，それに関連づけたリグレット関数を最小化する問題に定式化する．最適解はシンプレックス法によって得られるが，まずg平面を利用して解を求めてみよう．

連載第1回の［例題2］において，売上高目標（G_1）の必要レベル$g_1{}^0$を1800万円，十分レベル$g_1{}^s$を4000万円とし，粗利益目標（G_2）については必要レベル$g_2{}^0$を600万円，十分レベル$g_2{}^s$を1600万円としたとしよう．

必要レベルと十分レベルの値によって目標空間上に2つの点

$$G^0=(g_1{}^0,\ g_2{}^0)=(1800,\ 600)$$
$$G^s=(g_1{}^s,\ g_2{}^s)=(4000,\ 1600)$$

が定義される．次に，この2つの点を結んだベクトルを定義し，これを目標ベクトル(G)と呼ぶ．このベク

トルは，複数の目標を達成するための望ましい方向を表わしており，その方向は

$$\lambda_1 = g_1{}^s - g_1{}^0 = 4000 - 1800 = 2200$$

$$\lambda_2 = g_2{}^s - g_2{}^0 = 1600 - 600 = 1000$$

なる λ_1，λ_2によって示される．

目標ベクトル上では，点G^0から点G^sの方向に近づくほどリグレットは小さくなる．目標空間上の各点のリグレットをこのベクトルと関係づけることによって，リグレット関数を定義する．

各目標の十分レベルに対する不達成値を$d_i^- = g_i^s - g_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$であらわすと，リグレット関数は以下の3つのタイプが考えられている．

(1) 加重型モデル

$\sum_{i=1}^{m} d_i^-/\lambda_i$の最小化をはかるタイプ

(2) L字型モデル

$\{d_i-/\lambda_i\}$ の最大値を最小化することをめざすタイプ．

(3) オープンL型モデル

(1)と(2)の中間のタイプ．

加重型モデルは目標計画法の加重方式に対応しているので，最適解はシンプレックス法で求めることができる．目標ベクトル法の加重型モデルの利点は，目標ベクトルの方向を利用して加重係数を容易に決定できるということである．

以下では，L字型モデルの最適解の求め方について述べるが，オープンL型モデルについては，文献 [3] を参照されたい．なお，L字型と呼ばれるのは，後述のように2目標の等リグレット線の形状がL字になるからである．

まず目標平面を利用してL字型モデルの最適解を求めてみよう．g平面での実行可能領域および目標ベクトルは図1のようになっている．点G^sから目標ベクトルにそってL字型の等リグレット線をおろしてきて，最初に実行可能領域と接する点(C)が最適解になることがわかる．点Cのx平面での値は，$x_1=15$，$x_2=6$で，目標G_1の達成値は3120万円，目標G_2の達成値は1020万円である．

この解の十分レベルに対する達成の割合はG_1が78%，G_2が=64%で，目標達成のバランスが比較的よい解になっている．

なお，この例では最適解は実行可能領域の端点として求められたが，$g_1{}^0$，$g_2{}^0$の値はそのままで，$g_1{}^s$を4800万円，$g_2{}^s$を1400万円とすると，最適解は$x_1=13.35$，$x_2=9.29$となり，辺BCと目標ベクトルが交差する点として求められる．

次にこの問題を数学的に解いてみよう．目標ベクトルは，$G=(2200,\ 1000)$ である．達成水準が十分レベルよりも不足する分をd_1^-，d_2^-，超過する分をd_1^+，d_2^+とすると，

$$G_1：160x_1 + 120x_2 + d_1^- - d_1^+ = 4000 \tag{1}$$

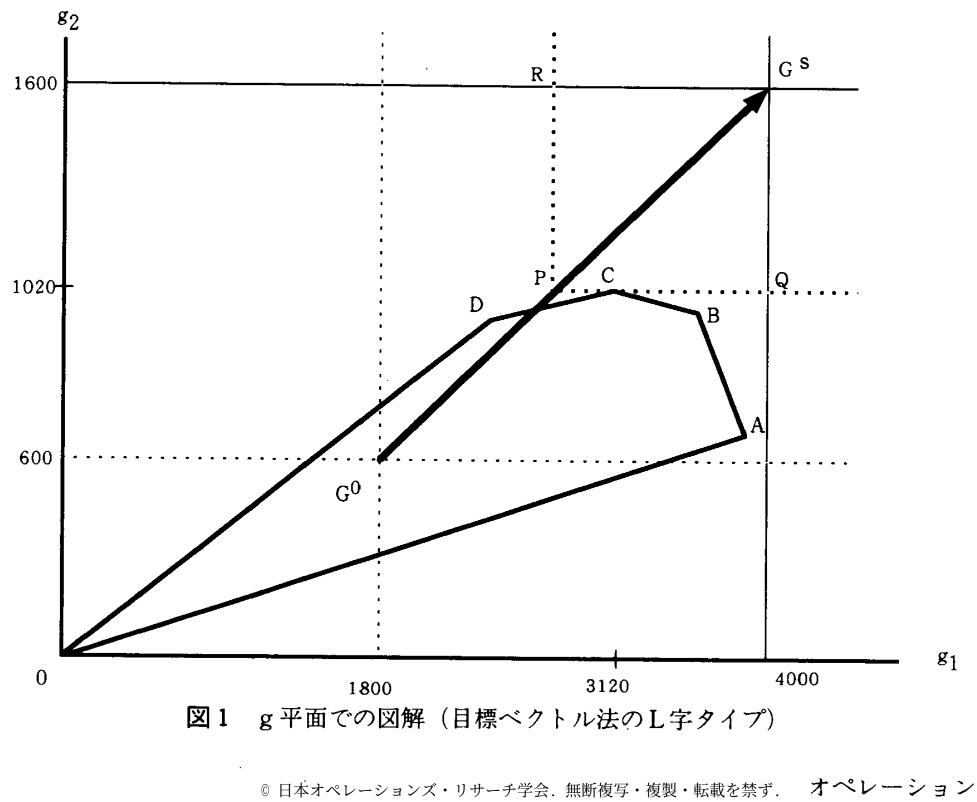

図1　g平面での図解（目標ベクトル法のL字タイプ）

$$G_2:\ 60x_1+\ 20x_2+d_2^- - d_2^+ = 1600 \tag{2}$$

である．L字型モデルでは，リグレットは

$$R=\max\ \{d_1^-/\lambda_1,\ d_2^-/\lambda_2\}$$

で表される．これを最小化するには，実際には以下のようにすればよい．

達成水準と十分レベルとの差を新しくそれぞれ2つの非負の補助変数の組，y_1とz_1，y_2とz_2(y_1，y_2，z_1，$z_2 \geqq 0$)の差として，(1)，(2)式を次のように次のように書き直す．

$$G_1:160x_1+120x_2+y_1-z_1=4000 \tag{3}$$

$$G_2:\ 60x_1+\ 20x_2+y_2-z_2=1600 \tag{4}$$

このとき，偏差変数はy_i，z_i($i=1$，2)を用いると

$$d_i^- = y_i - z_i(y_i > z_i\text{のとき})$$

$$d_i^+ = z_i - y_i(z_i > y_i\text{のとき})$$

で表わされる．この関係を点Cが最適解として得られる図1の場合で示すと，これは$y_1>z_1$，$z_2=0$のケースで，$PQ=y_1$，$PC=z_1$，$CQ=d_1^-$，$PR=d_2^-=y_2$である．

y_1，y_2と$\lambda_1=2200$，$\lambda_2=1000$には次のような関係がある．

$$y_1/2200=y_2/1000$$

したがって，

$$y_2=(5/11)y_1 \tag{5}$$

である．

リグレットの大きさを目標ベクトルの長さに対応させて表わすと，次のようになる．

$$R=\sqrt{(y_1)^2+(y_2)^2}$$
$$=(146/11)\cdot y_1 \tag{6}$$

となる．このことから，L字型モデルの最適解を求めるには，次のような最小化問題を解けばよい．

$$\text{最小化}:R=y_1 \tag{7}$$

制約条件：

$$G_1:160x_1+120x_2+y_1-z_1=4000 \tag{8}$$

$$G_1:160x_1+120x_2 \geqq 1800 \tag{9}$$

$$G_2:60x_1+20x_2+y_2-z_2=1600 \tag{10}$$

$$G_2:60x_1+20x_2 \geqq 600 \tag{11}$$

$$y_1\text{と}y_2\text{の関係}:y_1-(11/5)y_2=0 \tag{12}$$

$$\text{工程1の制約}:16x_1+10x_2 \leqq 320 \tag{13}$$

$$\text{工程2の制約}:20x_1+10x_2 \leqq 360 \tag{14}$$

$$\text{外注部品制約}:10x_1 \qquad \leqq 150 \tag{15}$$

$$\text{非負条件}:x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2 \geqq 0 \tag{16}$$

この問題はシンプレックス法で解くことができ，最適解は，図1からも得られたように，$x_1=15$，$x_2=6$，$y_1=1276$，$y_2=580$，$z_1=396$，$z_2=0$となる．

3．多目的線形計画法

次のような複数の線形目的関数と線形制約条件式を持つ問題を多目的線形計画問題と呼ぶ．

$$\text{最大化}:g_i(\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j(i=1,2,\cdots,m) \tag{17}$$

$$\text{制約条件}:\sum_{j=1}^{n} b_{kj}x_j \leqq h_k(k=1,2,\cdots,q) \tag{19}$$

$$x_j \geqq 0\ (j=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

(18)，(19)式を満足する実行可能解$\boldsymbol{x}^*$に対して，$g_i(\boldsymbol{x}) \geqq g_i(\boldsymbol{x}^*)(i=1,2,\cdots,m)$で，しかもある$j$について$g_j(\boldsymbol{x})>g_j(\boldsymbol{x}^*)$となるような実行可能解$\boldsymbol{x}$が存在しないとき，$\boldsymbol{x}^*$をパレート最適解（Pareto optimal solution）という．文献によっては，非劣解，非支配解，有効解などとも呼ぶ．これは，“他の目標の達成度を減少させることなしには，もはやどの目標の達成度も増大させ得ない状態の解”である．

前節の目標ベクトル法で扱った例題を多目的線形計画問題としてみれば，図1において，辺AB，辺BC上の実行可能解がパレート最適解である．

一般的に、多目的計画法はパレート最適解の中から満足できる妥協的な解を得ようとするもので、目標計画法などは，あらかじめ意思決定者から要求水準やリグレット関数などの選好情報を要求して解を求める方法に属する．

意思決定者の選好情報を明示的に要求せずに，選好性に関する一定の仮定をおいて最適解を求める解法としては，意思決定者の理想とする目標空間上の点からのp次距離の最小解を求めるものがある．

また，解を探索する過程で，逐次的に選好情報を要求し，それを利用して最適解を求める対話型の解法も数多く開発されている．これは意思決定者がコンピュータとの対話の過程で，解の集合についての情報を得るに従い，各目標の要求水準や重み，優先順位といったものを逐次修正しながら，最も満足できる解を探し出そうとする方法である．

Geoffrionら[4]の方法がその典型的な方法であるが意思決定者が答える代替率や加重の信頼性がそのまま解の信頼性に関連するので，意思決定者が選好判断に自信がある場合でなければ有効ではない．このほか，BenayounらのSTEM[1]，SteuerらのFocus-in法[7]，Wierzbickiの参考点法[9]などがよく知られている．

4．フレキシブル計画法

経営目標の設定は，たとえば「利益をだいたい1億円以上にしたい」というように，しばしばあいまいな表現によって行なわれることが多い．目標設定にあいまいさを含むような計画問題に，Zadehが定義したファジイ集合の概念をとりいれたフレキシブル計画法（flexible programming）がZimmermann［6］［10］［11］によって示されている．なお，フレキシブル計画法では，上述のようなファジィ目標と，「工程1の上限はだいたい320時間以下である」というようなファジィ制約も同様に扱えるという特徴があるが，本稿では，後述のように数値例をg平面に表現して最適解の様子を調べてみるので，問題の制約条件はファジィ制約ではなく，通常の制約のまま扱うことにする．したがって，以下の説明もファジィ目標を中心に行う．

全体集合Xにおけるファジィ集合Aは

$$\mu_A : X \to [0,\ 1]$$

なるメンバシップ関数によって特性づけられた集合である．$\mu_A(\boldsymbol{x})$の値が1に近いほどxのAに属する度合が大きく，0に近ければxのAに属する度合が小さい．

たとえば，目標G_iの達成水準を“だいたいg_i^U以上にしたい”という場合，達成水準$g_i(x)$がg_i^U以上ならばメンバシップ関数の値は1をとり，それ以下ならば1よりも小さい（ただし，0よりは大きい）値をとり，g_i^L以下ならば0をとるようなメンバシップ関数によって特性づけるものとする．

ファジィ目標を$G_i(i=1,2,\cdots,m)$，G_iのメンバシップ関数を$\mu_i(\boldsymbol{x})$とすると，m個のメンバシップ関数を

$$\mu_D(\boldsymbol{x}) = \min_i \{\mu_1(\boldsymbol{x}),\ \mu_2(\boldsymbol{x}),\ \cdots,\ \mu_m(\boldsymbol{x})\}$$

という1つの総合的なメンバシップ関数に統合する方式がよく知られており，これを最小オペレータ（minimum operator）と呼ぶ．

BellmanとZadehによる最大化決定は，$\mu_D(\boldsymbol{x})$の値を最大化するようなxを選ぶことであり，

$$\mu_D(\boldsymbol{x}^*) = \max_{x \in X} \mu_D(\boldsymbol{x})$$

となるx^*を求めることである．ここで，Xは実行可能領域を示すものとする．

Zimmermann［11］は上述のような複数のファジイ目標を持つ問題を定式化している．第1回連載の［例題2］をもとにしてその考え方を説明してみよう．

［例題2］の目標関数は次のようであった．

$$G_1 : g_1(\boldsymbol{x}) = 160x_1 + 120x_2 \tag{20}$$

$$G_2 : g_2(\boldsymbol{x}) = 60x_1 + 20x_2 \tag{21}$$

また，制約条件は次のようであった．

$$T_1 : 16x_1 + 10x_2 \leqq 320 \tag{22}$$

$$T_2 : 20x_1 + 10x_2 \leqq 360 \tag{23}$$

$$T_3 : 10x_1 \leqq 150 \tag{24}$$

$$T_4 : x_1,\ x_2 \geqq 0 \tag{25}$$

Zimmermannは(22)～(25)式のもとで(20)式と(21)式をそれぞれ個別に最大化する解を求めておき，それをもとに前述のg_i^Uとg_i^Lを決める方法を提案している．いま，(20)式を最大にする解は$x_1=0$，$x_2=32$であり，目標の達成値は，G_1が3840万円，G_2が640万円である．また，(21)式を最大にする解は$x_1=15$，$x_2=6$で，目標の達成値はG_1が3120万円，G_2が1020万円である．一般にm個の目標がある場合には，m個の解と対応する目標の値が得られる．目標G_iについて得られたm個の目標値の最大値をg_i^Uとし，最小値をg_i^Lとする．この例では，

$$g_1^U = 3840,\quad g_1^L = 3120$$

$$g_2^U = 1020,\quad g_2^L = 640$$

である．

目標G_1のメンバシップ関数として線形関数型を適用すると，次のようになる．

$$\mu_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & ;\ g_1(\boldsymbol{x}) \leqq 3120 \\ ((160x_1+120x_2)-3120)/720 & \\ & ;\ 3120 \leqq g_1(\boldsymbol{x}) \leqq 3840 \\ 1 & ;\ g_1(\boldsymbol{x}) \geqq 3840 \end{cases} \tag{26}$$

この関数形を示すと，**図2**のようになる．

同様に，目標G_2にも線形関数型メンバシップ関数を適用すると，次のようになる．

$$\mu_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & ;\ g_2(\boldsymbol{x}) \leqq 640 \\ ((60x_1+20x_2)-640)/380 & \\ & ;\ 640 \leqq g_2(\boldsymbol{x}) \leqq 1020 \\ 1 & ;\ g_2(\boldsymbol{x}) \geqq 1020 \end{cases} \tag{27}$$

ファジィ最大化決定に基づいた定式化によると，こ

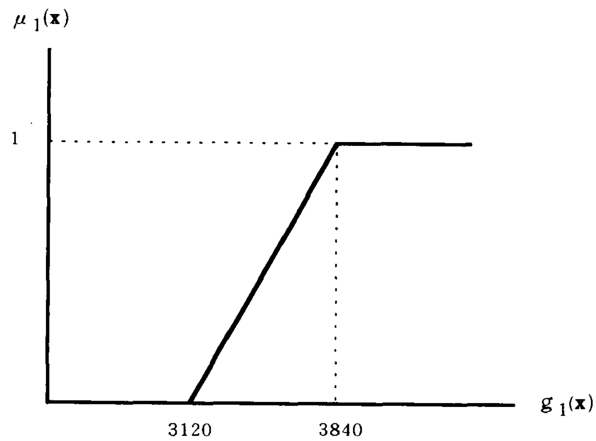

図2　線形関数型メンバシップ関数

の問題は次のような最大化問題に変換することができる．

最大化：$Z=\lambda$ (28)

制約条件：

$\lambda \leqq (160x_1+120x_2-3120)/720$ (29)

$\lambda \leqq (60x_1+20x_2-640)/380$ (30)

$16x_1+10x_2 \leqq 320$ (31)

$20x_1+10x_2 \leqq 360$ (32)

$10x_1 \leqq 150$ (33)

$x_1,\ x_2,\ \lambda \geqq 0$ (34)

この問題の最適解をシンプレックス法で求めると，$x_1=8.465$，$x_2=18.456$であり，そのときの目標G_1の達成値は3569.1万円，目標G2の達成値は877.0万円である．この解はパレート最適解である．また，目的関数の値は$\lambda=0.624$となる．

5．目標ベクトル法とフレキシブル計画法の関連

ファジィ目標に線形関数型メンバシップ関数を適用し，最小オペレータを用いたフレキシブル計画法において，g_i^Uを目標ベクトル法での十分レベルg_i^Sに，またg_i^Lを必要レベルg_1^0に対応させると，目標ベクトル法のL字型モデルと同じ解が得られることがわかる [8]．図3にg平面上での状況を示すと，点G^Lと点G^Uを結んだ目標ベクトルに対して，点G^LからL字型の等満足度線を右上方向に伸ばしていき，それが最大になる点すなわち，点Eがフレキシブル計画法の最適解になっている．

目標ベクトル法はリグレットの最小化問題であるので，点G^Uからの等リグレット線を考えたが，フレキシブル計画法はメンバシップ関数の最大化問題であるので，点G^Lからの等満足度線を考えることになる．

6．最近の動向

2回の連載において，主として多目標計画問題の取り扱い方について紹介した．

複数の目的関数を持つ数理計画法の研究は線形のケースから非線形のケースに移っている．また，0-1変数を扱った研究もみられる．対話型の解法やその比較研究は数多く行われているが，万能な解法はないので，利用者の状況や対象とする問題の性質をうまく生かした解法の開発が望まれるだけでなく，既存の解法の中ではどれが有効なものかを判定できるようなガイドマップが必要になってきている．解法や事例に興味がある方は，European Journal of Operational Research, Journal of the Operational Research Spciety, Mathematical Programming, Management Scienceなどの雑誌に注意されているとよい．

ところで，フレキシブル計画法の部分でも述べたように，実際の経営計画では，目標水準を設定する場合などで，意思決定者の主観的判断に関するあいまいさが生じることが多い．また各種経営資源（資金，設備，人員，原材料，スペースなど）の利用についても，さまざまな不確実性がともなう．フレキシブル計画法は，可能性計画法における最もシンプルな手法であるが，ここ数年の多目的数理計画法の分野では，ファジィ概念などの不確実性の導入が精力的に行われている．研究の対象となる問題領域も分数計画を含む非線形計画問題，0-1整数計画問題に拡張され，対話型モデルも開

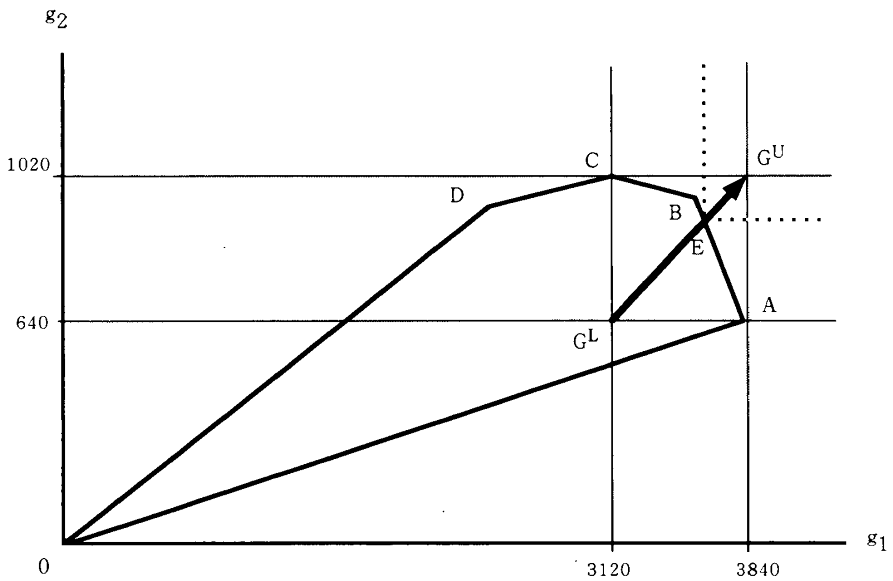

図3　g面での図解（フレキシブル計画法）

発されている.

次回以降の連載では不確実性に対するさまざまなアプローチを紹介する.

参考文献

[1] Benayoun, R., de Montgolfier, J., Tergny, J. and Larichev, O : "LinearProgramming with Multiple Objective Functions : Step Method(STEM)", Mathematical Programming, Vol. 1, No. 3, pp. 366-375 (1971)

[2] 福川忠昭, 山口俊和 : "多目的数理計画法とその周辺分野の現状と課題", 日本経営工学会誌, Vol. .41, No. 4B, pp. B208-B216 (1990)

[3] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和 : 「経営の多目標計画」, 森北出版 (1987)

[4] Geoffrion, A. M., Dyer, J. S. and Feinberg, A. : "An Interactive Approach for Multi-Criterion Optimization with an Application to the Operation of an Academic Department", Management Science, Vol. 19, No. 4, pp. 357-368 (1972)

[5] 坂和正敏 : 「線形システムの最適化<一目的から多目的へ>」, 森北出版 (1984)

[6] 坂和正敏, 石井博昭, 西崎一郎 : 「ソフト最適化」, 朝倉書店 (1995)

[7] Steuer, R. E. and Schuler, A. T, : "An Interactive Multiple Objective Linear Programming Approach to a Problem in Forest Management", Operations Research, Vol. 26, No. 2, pp. 254-269 (1978)

[8] 山口俊和 : "ファジィ目標計画問題に対する一考察", オペレーションズ・リサーチ誌, Vol. 34, No. 6, pp. 257-268 (1989)

[9] Wierzbicki, A. P. : "The Use of Reference Objective in Multiobjective Optimization", in Fandel, G. and Gal, T (eds.) *Multiple Criteria Decision Making : Theory and Application,* Springer-Verlag, New York, pp. 468-486 (1980)

[10] Zimmermann, H. J. : "Description and Optimization of Fuzzy Systems", International Journal of General Systems, Vol. 2, pp. 209-215 (1976)

[11] Zimmermann, H, J. : "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, pp. 45-55 (1978)