

ORにおけるエントロピー

國澤清典



第一部 カニバリズム

1.1 まえおき

昭和41年から昭和43年にかけて日科技連 OR チームを組織して専売公社の事務近代化のプロジェクトに参加したことがある。その成果は日科技連より報告書として作成された。作成部数が僅少だったので、散逸してしまったのもあるし、とにかく、長年月が経過しているので、残念ながら記憶も定かでない。記憶に残っているものを拾いあげると、輸送計画(渡辺 浩, 前田活郎, 反町洋一, 前島健治, 他), 販売支所統廃合(森村英典, 藤井光昭, 反町洋一, 他), たばこ長期需要予測(國澤清典, (故)林 成光, 他)等々である。ともあれ、生産、製造、輸送、在庫、予測にわたった公社全般のプロジェクトであり、公社側から柴崎茂一専務改善室長他多数の方々協力して下さった。これらどれをとっても公社の長い伝統があり、興味もあるし、困難な問題が山積していた。以下述べることは、このプロジェクトからみれば脇道にそれたこぼれ話にすぎない。

私がたばこ各銘柄の予測を担当しているうちに興味を感じたのは銘柄間のカニバリズム、つまり食い合い現象であった。とにかく専売事業であるので、顧客は逃げるわけでもなく、銘柄間のカニバリズムがたえずおきていた。当時公社より販売されていた銘柄数は20種類以上もあった。ここに参考のために列挙してみよう。

主要銘柄：ハイライト、ひびき、わかば、いこい、しんせい、ピース

規制銘柄：トリオ、パット、朝日、ききょう、しらぎく、みのり

弱小銘柄：オリンピマス、MF、東京64、ハーモニー、アリラン、富士、光、みどり、沖繩、パー

ル、AAA

中間銘柄：ホープ

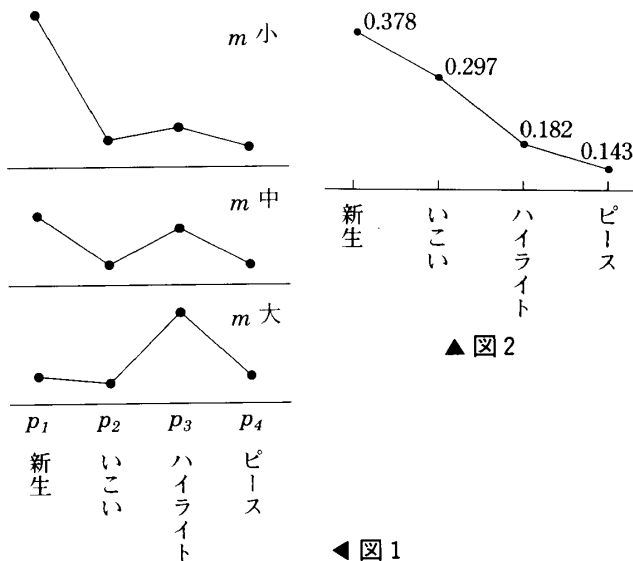
等々であった。これらの銘柄が互いの食い合いの結果、上記の主要銘柄6種類にしばられ、さらにこの主要銘柄群のなかでも、ひびき、わかばが脱落し、私がかかわった当時は主要銘柄は新生(20円)、いこい(25円)、ハイライト(35円)、ピース(40円)(価格はいずれも10本当り)の4銘柄であった。したがって、これら4銘柄のカニバリズムに焦点をしばって考えることにした。

1.2 たばこ市場空間

当時人気はハイライトにあった。とにかく、フィルター付きのたばことして最初に登場したのはハイライトであった。低ニコチン、低タールへの期待もあり、市場人気は高く、製造が需要に及びつかない状態が当初は続いていた。公社には全国で500余の販売支所があり、18万の小売店はこれらの支所によって製品の配達、販売の管理をうけていた。大きい支所は2400の小売店を管内にもち、小さな支所では60の小売店をもっているわけで、規模においてもアンバランスがあり、上記の主要4銘柄の販売比率もまたアンバランスであり、それぞれの支所をとりまく環境によって支配され、特色のある状態を示していた。4銘柄についての販売比率の折線グラフはもちろん、支所によってまちまちであるが、次のような特長をもっていた。4銘柄の販売比率の折線グラフをリクライニングの操作のできる椅子に腰をかけた人の姿にたとえることができる。足下はピース、膝はハイライト、腰はいこい、頭は新生である。ここで、販売支所毎の顧客のたばこ10本当りの平均購買価格をパラメータ m にとると、 m は $20 \leq m \leq 40$ である。都会は消費指数が高く、地方では低いので、都会の支所の m は高く、都会より離れて地方に行

くに従って m は低くなる傾向をもっている。このためにハイライト、ピース等は都会向きの銘柄だったが、新生、いこいは地方に行くに従ってよく売れていた。この状態を表したのが図1である。図1の上段は m が小さい地方であり、正常に椅子に腰を下している。中都市では m が中位の大きさととなり、椅子の背が後方に若干倒された中段の姿となる。さらに都会より大きくかけ離れた田舎の地方では、一層背は後方に倒され、膝は高く頭が低くなって図1の下段の姿になってゆく。

ここで、たばこの市場なるものの概念を導入する。まず4銘柄の基準となる販売比率を定める。顧客の価格本位的購買方法、すなわち平均購買価格 m をできるだけ低くし、同時に購買時のエントロピーを最大にする(1因子情報路的)方法(文献1)によって、4銘柄の販売比率を求めると図2のようになる。この比



▲ 図2

率を基準にとり、各支所の販売比率 $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ ($p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, p_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$) との乖離度を Kullback-Leibler の距離で求め、 $D(p)$ とする。すなわち

$$D(p) = p_1 \log \frac{p_1}{0.378} + p_2 \log \frac{p_2}{0.297} + p_3 \log \frac{p_3}{0.182} + p_4 \log \frac{p_4}{0.143}$$

である。これは価格本位的な買い方との乖離度を表しているのだから、銘柄に対する嗜好度のようなものを表していると考えられる。ここで m ($20 \leq m \leq 40$) を横軸にとり、乖離度 $D = D(p)$ を縦軸にとると、各支所の販売比率 $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ に対して (m, D) が定まり、逆に (m, D) に対して各支所の $p = (p_1, p_2,$

$p_3, p_4)$ が定まる。したがって各年度の支所の販売比率を (m, D) 空間内にプロットできる。これがたばこ市場空間である。

ここで注意しておきたいことは、 (m, D) 空間は閉じた空間となることである。下部は m ($20 \leq m \leq 40$) を固定して $D(p)$ を最小ならしめるような $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ を求め、 (m, D) を (m, D) 空間内に画くとき、 m を変動させると下に凸な鍋底形の曲線となることが知られている。上部は新生、いこい、ハイライト、ピースを主峯とする連峯が画かれ、この連峯によって限界曲線がつけられることは容易に想像がつく。ここに主峯というのは、たとえば新生の主峯を例にとると、 $p = (1, 0, 0, 0)$ に対し、 $D(p) = \log \frac{1}{0.378} = 1.40^{\text{bit}}$ であるから、 (m, D) 空間で、 $(20, 1.40)$ なる座標をもっている。他も同様である。主峯以外の連峯の値は m を固定し、 $D(p)$ を最大ならしめることによって求まる。

1.3 カニバリズム

昭和41年頃から昭和43年頃はハイライトによるカニバリズム戦争がおきていた。これを各支所毎に各年度の購買比率を (m, D) 空間上にプロットし、その推移を見ることにした。 (m, D) 空間上のマクロ的な観察の結果、極めて整然たる動きをしていることに気づいた。まずそのために、ハイライトの主峯を中心として等高線をつくった。これはたとえば、ハイライトの販売比率 $p_3 = 0.4$ と指定し、 $p = (p_1, p_2, 0.4, p_4)$ で p_1, p_2, p_4 を変動させると10本あたりの平均価格は

$$20p_1 + 25p_2 + 35 \times 0.4 + 40p_4 = m$$

であるから、 m の変動範囲は

$$26 \leq m \leq 38$$

となる。この範囲で m を固定して、 $D(p)$ を最大ならしめた $D(p)$ の値が、ハイライトの販売比率 $p_3 = 0.4$ の m に対する等高線の値となる。 m を $26 \leq m \leq 38$ で変動させると、 $p_3 = 0.4$ に対する等高線がつけられる。このようにして p_3 を0.05から0.05刻みで等高線をつくった。

次に各販売支所の年度毎の (m, D) を (m, D) 空間にプロットすると、上記のハイライトの等高線を登頂していることがうかがえた、何はともあれ、各支所の動向はハイライトの主峯に向ってよじ登っている。もちろんこれはいつまでつづくのかわからない。実際

この傾向が長期につづく、公社はハイライトの製造に主流を奪われ、ハイライトをつくるための原料の葉たばこが不足することになる。そこでハイライトを食うための新しいカニバリズム戦争をおこさねばならなくなる。事実公社はその後ピースのフィルター付きの製品や、フィルター付きのホープを登場させている。

1.4 シミュレーション

前節で述べたように各支所の (m, D) を年度毎に結び、ハイライトの等高線をよじ登っていることを知ったので、次のようなシミュレーションをつくってみた。まず、 (m, D) 空間の境界上に高さ10cmの壁を立て、さらに上部を密封し、箱をつくった。次に新生、いこい、ハイライト、ピースの主峯に穴をあけた。穴の口径は新生、いこい、ピースについては、需要の減退量に比例し、ハイライトについては増加量に比例するようにした。そしてハイライトの主峯のみから静かに空気を抜いた。箱の中の空気の流れに注目すると、各支所の年度毎の移動状態を知る上において参考になった。実際は (m, D) 空間の主要な個所に、風によって自由に動く旗をたて、旗の動く方向を連ねて風の流線とし、その流線の位置する個所の (m, D) 空間の座標を読みとって予測値とした。

以上のような記事を読んだ読者は、筆者が空想を書いているのではないかと思うかもしれないが、この模型は実際に大日本印刷(株)によって製作され、重役の面前で説明した記憶がある。しかし現在においてもJT(株)に保管されているか否かは定かでない。

現在のたばこの国内市場では、国内産、外国産の銘柄が入り交じってのカニバリズムが展開されている。また新聞紙上を賑わしている日米半導体戦争、ビールの各社、銘柄間のカニバリズム等々、数えれば、数えきれないほどのカニバリズムを見聞している。カニバリズムのORこそ、OR研究者にとってORの伝統精神をくすぐる性質をもっていて、不服のない研究対象であると思う。

第2部 ORのモデル選択

2.1 まえおき

OR学会誌「オペレーションズ・リサーチ」96年7月号に特集として「統計モデル選択」の興味ある記事が掲載された。この特集を企画された方は当然ORモデ

ルの選択規準はどうかと問いかけられたことと思う。以下述べることは、その提案に対する答にはなっていないかもしれないが、その一端をかすめたものと思われる。

ところでORはその分野が大きすぎ、統計のようなストカスチックモデルとは限定されない。したがって統計モデルのように、精細な規準では測定できそうにない。しかしコンプレキシティ理論が進展してきている現在、ORモデルの規準も早晚登場するにちがいない。

以下ここで述べるのは、ORでもストカスチックモデルの一部である占拠率モデルである。

2.2 占拠率モデル

まず占拠率モデルを説明しておいた方が良いと思う。ここにA社、B社の同一商品の異なった銘柄によって、閉じた市場でカニバリズム戦争がおきているとする。A社、B社の占拠率はそれぞれ m_1, m_2 として与えられている。これは両社の表面に表れた数字であり、当然 $m_1 + m_2 = 1$ である。問題は市場の内部構造である。この占拠率モデルとしてHerniterのモデル(文献2)がある。彼は固定層と非固定層に分けて市場を樹枝状に表現して、そのエントロピーを求め、これを最大ならしめるような固定層と非固定層の比率を求めた。彼は非固定層でA銘柄とB銘柄をあらゆる u ($0 < u < 1$)に對し、 u 対 $1-u$ で選択する確率 $f(u)$ を想定した。ここに

$$\int_0^1 f(u) du = 1$$

である。したがって樹枝状のエントロピーは

$$H = - \sum_{i=1}^3 p_i \log p_i - p_3 \int_0^1 f(u) \log f(u) du - p_3 \int_0^1 f(u) (u \log u + (1-u) \log (1-u)) du$$

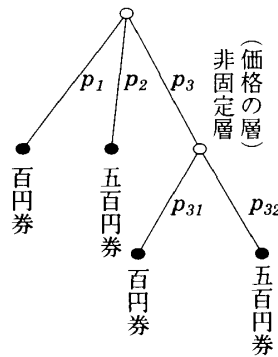
となる。これを制約条件

$$p_1 + p_3 \int_0^1 u f(u) du = m_1$$

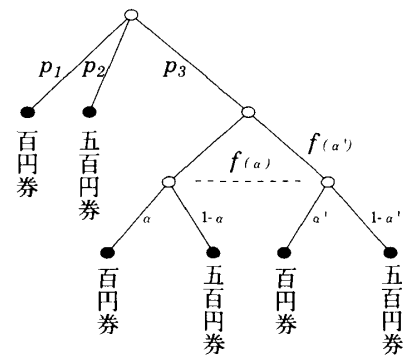
$$p_2 + p_3 \int_0^1 (1-u) f(u) du = m_2$$

のもとで H を最大化して、 $p_1, p_2, f(u)$ を求めるとよい。ここに p_1, p_2 はA社、B社のそれぞれの固定層の比率であり、 p_3 は非固定層の比率である。これは一つの

選択規準である。Herniter の理論の欠点は銘柄数が大きくなると非固定層の内部の層が幾何級数的に増加して計算が困難となることである。事実彼は3銘柄までしか計算してないが、計算結果は満足なものでない。さらに彼の理論が現実離れをしている点も指摘できる。彼は非固定層つまり浮動層で無限の可能な比率 u ($0 < u < 1$) でA社, B社を選択し、しかもその確率分布を与えているが、このような確率分布は事前情報で事前確率が与えられるとした方が自然である。また現実ではA社, B社の選択比率も価格差, 品質差, 嗜好差, 宣伝差等々のパラメータによって支配され、これらによって定まる選択比 u とそのウェイト $f(u)$ を求めることが基本となると思われる。この場合 $f(u)$ を事前確率としてその形状を与えておくことは統計モデルの場合と同様である。



図A



図B

図3

以下具体例について説明してみよう。商品市場の例ではないが、よい例と思われるので引用してみる。いまから39年前の57年の話になるが、岡沢宏氏(住友化学株)がよいデータ(文献1)を提供して下さった。大阪堂島にあった住友ビルの食堂で食事をするには、必ず回数券を購入しなければならなかった。回数券には100円券と500円券があり、その売上比率は100円券が80%、500券が20%であった。500円券は10円券が50枚、ちなみに100円券は10円券が10枚という具合に500円券には割引はなかった。この場合の100円券と500円券の市場を考えて、その内部構造に関するモデル選択を考えてみることにする。

2.3 占拠率モデルの選択基準

上記の住友ビルの食堂の回数券市場モデルをまず作らねばならない。この場合、100円券、500円券という価格差は回数券の購入者にとっては意識して、ある時は100円券、ある時は500円券と選択する非固定層、それに反していつも100円券、またいつも500円券のみを購入する固定層にわけられる。ここで、パラメータとしての価格の効果を無視するわけにはいかない。図3のような樹枝図を考えて、そのエントロピーを考える。この場合、非固定層で100円券と500円券を選択する比率 u ($0 < u < 1$) に対する確率 $f(u)$ をどのように定め

るか事前確率として、100円と500円の価格差に対する認識が非常に強いと考えて $f(u) = 1$ とする。つまり、ある選択比率 u が定まって、確率1でそれがとられているとする。もし $f(u)$ が一般の確率分布ならば、

$$H = - \sum_{i=1}^3 p_i \log p_i - p_3 \int_0^1 f(u) \log f(u) du - p_3 \int_0^1 f(u) \left[\frac{u \log u + (1-u) \log(1-u)}{u+5(1-u)} \right] du$$

となる。ここに右辺の第3項

$$\frac{u \log u + (1-u) \log(1-u)}{u+5(1-u)}$$

は価格差を考慮した結果導入したエントロピーで、単位価格当りのエントロピーである。しかし、 $f(u) = 1$ なる u が存在することを仮定したから、上式のエントロピーは

$$H_1 = - \sum_{i=1}^3 p_i \log p_i - p_3 \frac{u \log u + (1-u) \log(1-u)}{u+5(1-u)}$$

と変形される。これを最大にするような p_1, p_2, p_3, u が求まるとよい。ここで1因子情報路の理論(文献1)から、

$$- \frac{u \log u + (1-u) \log(1-u)}{u+5(1-u)} \leq \log w \quad (0 < u < 1)$$

なる不等式が成立する。ここに、 w は $w^{-1} + w^{-5} = 1$ の正根である。等号の成立するのは $u = w^{-1} = 0.75$, $1-u = w^{-5} = 0.25$ の場合であり、またそのときに限る。したがって、

$$- \sum_{i=1}^3 p_i \log p_i + p_3 \log w$$

を、制約条件

$$p_1 + p_3 \times 0.75 = 0.8$$

$$p_2 + p_3 \times 0.25 = 0.2$$

のもとで最大にするような p_1, p_2, p_3 を求めるとよい。

これが、この場合の選択規準となる。

2.4 占拠率モデルの一般的な場合の選択規準

上では簡単な場合について選択規準を述べたが、考え方を延長すれば一般的な占拠率モデルの選択規準が得られる。価格差のように明らかに計量できるものに対しては、単位価格当りのエントロピー、計量できがたいパラメータ、たとえば宣伝効果などはその効果によって定まる銘柄の選択比率を市場調査などで調べることになると、この場合のエントロピーも定まってくる。したがってこれらのパラメータのウェイトを f_1, f_2, \dots ($f_1 + f_2 + \dots = 1$) とすると、占拠率モデル(簡単のため2銘柄とする)は

$$H = - \sum_{i=1}^3 p_i \log p_i - p_3 \sum_j f_j \log f_j - p_3 \sum_j f_j \cdot H_j$$

となる。ここに H_j は第 j 番目のパラメータでの銘柄選択におけるエントロピーである。これらは調査や計算で明らかになる。まず、 p_1, p_2, p_3 を固定したままで

f_1, f_2, \dots を動かして H を最大ならしめる値を求める。これは p_1, p_2, p_3 に関係しない値である。次にこの求めた f_j をつかって制約条件

$$p_1 + p_3 \sum_j f_j \cdot u_j = m_1$$

$$p_2 + p_3 \sum_j f_j (1 - u_j) = m_2$$

を満足しながら H を最大ならしめるように p_1, p_2, p_3 を求める。これが選択規準である。 f_1, f_2, \dots は離散的であったが、ある場合には連続的な分布にする必要も事前情報からあるかもしれない。しかしこの程度であれば銘柄数が増加しても計算ができる。

文 献

- (1) 国沢清典：エントロピーモデル，日科技連出版社，1975.
- (2) Herniter, J. D. : An entropy model of brand purchase behavior, Journ. of Market Res., Vol. X, 1973, pp. 361-375.



研究部会報告

●イノベーション●

・第5回

日 時：8月3日(土) 14:00~17:00

出席者：8名

場 所：中央区新富 ワーカーズ・サポートセンター
 テーマ：「イノベーション(アイデア・デザイン・創造・更新)」

イノベーションには極めて高度の研究・技術・技能・知識などに依るものもありますが、その一方ごく平易な一寸したアイデアや思い付き等による簡単なものでありながら大変に効果や貢献の大きなものもあります。

この平易なイノベーションも大切に致しましょう。

・第6回

日 時：9月7日(土) 14:00~17:00

出席者：11名

場 所：中央区新富 ワーカーズ・サポートセンター

テーマ：「イノベーション(創新のデザインと実現)」

イノベーションを行うには何か契機となるモノゴトとか、問題の主な要素とかシステムが手掛かりになります。モノゴトをチェックしたり評価する場合、「楽しく、豊かに、健やかに、美しく、仲良く、より良く、新しく、生き活きと」はキーワードに使えるそうです。

会 合 記 録

9月10日(火)	研究普及委員会	14名
9月11日(水)	機関誌編集委員会	15名
9月12日(木)	庶務幹事会	4名
9月13日(金)	40周年記念事業企画推進委員会	18名
9月19日(木)	理事会	16名

第3回理事会議題 (8-9-19)

1. 平成8年度第2回理事会議事録の件
2. 入退会承認の件
3. 平成8年度上半期収支決算報告の件
4. 第14回学生論文賞推薦の件
5. 平成8年度春季研究発表会収支決算報告の件
6. 平成8年度第1回ORセミナー終了及び収支決算報告の件
7. 第12回経営工学研連シンポジウム収支決算の件
8. 平成9年度春季研究発表会開催の件