解説

平均値の意味と構造 II

柳井　浩

前回は，われわれが日常普通に用いている“平均値”というものの特性をふまえ，これを一般化した定義を考え，さらにその物理的な解釈を試みた．今回は，これにもとづいて，平均値を“設計”する，———すなわち，自分の目的に適った平均値を構成する方法について述べてみたい．

4　平均法の設計とその類別

前節の解釈に共通していることは，(一般には) 相異なる値xとyが定める物理量$f(x,y)$があって，これを，同じ値だけで実現する“その値”z:

$$f(x,y)=f(z,z) \tag{39}$$

を平均値としようということである．いいかえれば，物理量$f(x,y)$に関する，xとyの相当量がzである．しかし，次の例が示すように，任意に$f(x,y)$を選んでも第2節の定義を満たす“平均値”が作れるわけではない．

例4.1　　上記の物理量として

$$f(x,y)=e^x+e^y \tag{40}$$

を選んでも第2節の定義を満たす“平均値”は作れない．(39) 式に従って

$$e^z+e^z=e^x+x^y \tag{41}$$

として，zに関して解き

$$z=\ln(\frac{e^x+x^y}{2}) \tag{42}$$

としても，右辺の関数がxおよびyに関する一次の同次式にならないからである．□

次の定理は，関数$f(x,y)$が第2節の定義による平均値が得られるための十分条件を与えている．

やない　ひろし　慶應義塾大学理工学部管理工学科
〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

定　理　$x,y\geq 0$おいて定義された連続微分可能な関数

$$f(x,y) \tag{43}$$

が，下記の3つの条件a),b)(a'),b'))およびc)を満たすとき，関数

$$\phi(x,y)=g^{-1}(f(x,y)) \tag{44}$$

は平均値関数である．ここに，g^{-1}は

$$g(u)=f(u,u) \tag{45}$$

によって定義される関数$g(u)$の逆関数である．

a)　$grad\ f\geq 0$　(a'), $grad\ f\leq 0$)　(46)

b)　$div\ f>0$　(b'), $div\ f<0$)　(47)

c)　関数$f(x,y)$は同次関数である：

$$f(\alpha x,\alpha y)=\alpha^p f(x,y)\quad p\neq 0 \tag{48}$$

証明略 ([1] 参照) □

この定理を用いて，“ある平均値”を設計するには，その意図に従って条件a),b)およびc)を満たす関数$f(x,y)$を設定すればよいことになる．そこでこのような関数$f(x,y)$を**生成関数**とよび，そのいくつかのタイプに対して便宜上の命名をして各種平均法の位置づけの便を計ろう．

- **対称型**　　すべてのx,yについて

$$f(x,y)=f(y,x) \tag{49}$$

が成立するとき，この生成関数を対称型ということにしよう．ただちにわかるように，対称型の関数から生成された平均値の等平均値線は45°線を軸として対称な曲線になる．

例4.2　最小値　　引っ張りによる鎖の破断は，鎖を構成する輪のうちの一番弱いものの破断によって起こる，したがって，破断加重がxおよびyの2つの輪をつないで作られる鎖の破断加重は

$$f(x,y)=\min(x,y) \tag{50}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

となる．これを生成関数として“平均”破断加重zを構成すれば

$$z = \min(x, y) \tag{51}$$

が得られる． □

本稿でこれまでに示した生成関数の例は，殆ど対称型であるが，次の例が示すように対称型でない生成関数から生成される平均法も存在する．

例4.3　重みづけ平均

$$f(x,y) = ax + by \quad a, b > 0 \;\; a \neq b \tag{52}$$

という関数は明らかに非対称であるが，定理の条件を満たしているから，生成関数になりうる．また，これから生成される平均法

$$\begin{aligned} z &= \frac{ax+by}{a+b} \\ &= \lambda x + (1-\lambda)y \quad (\lambda = \frac{a}{a+b}) \end{aligned} \tag{53}$$

はいわゆる重みづけ平均である．そしてこの生成関数が，aおよびbという異なる重さの錘が支点から，それぞれxおよびyという距離にあるときの1次のモーメントという物理量に対応しているのは明らかであろう．また，等平均値線は$\frac{-\lambda}{(1-\lambda)}$という勾配をもつ直線群になる．(図3および12参照) □

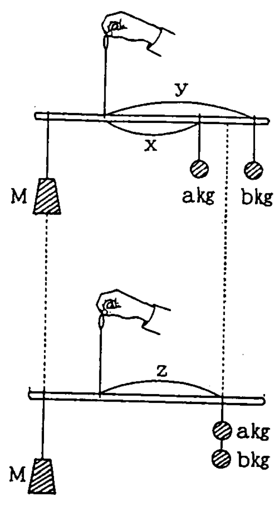

図　12　重みづけ平均

例4.4　均等流列

次の期から，2期間にわたってそれぞれxおよびyという現金収入が得られるとき，これらを利子率iで現在価値になおし，これが，2期間にわたるzという均等な現金収入(均等流列)の現在価値に等しくなるものとする．このとき，値zは

$$\frac{z}{1+i} + \frac{z}{(1+i)^2} = \frac{x}{1+i} + \frac{y}{(1+i)^2} \tag{54}$$

という関係から計算されるが，これは現在価値を作る

$$f(x,y) = \frac{x}{1+i} + \frac{y}{(1+i)^2} \tag{55}$$

という生成関数にもとづいて作られる“重みづけ平均”と考えることが出来る． □

● **分離型**　　生成関数$f(x,y)$がxだけの関数とyだけの関数の和の形，すなわち，

$$f(x,y) = h(x) + k(y) \tag{56}$$

という形に書けるとき，これを分離型と呼ぶ．

● **巾乗型**　　生成関数が

$$f(x,y) = x^p + y^p \tag{57}$$

という形に書けるとき，これを巾乗型という．巾乗型の生成関数は，対称型であり分離型である．実際に用いられている平均法のいくつかがこのタイプの関数から生成される．中には，今後世間でも“平均値”として認められそうな候補もある．次の例にその2－3を示しておく．

例4.5 巾乗型生成関数による平均

1^0 **最小値** ($p = -\infty$)

$$z = \min(x, y) \tag{58}$$

2^0 **引力平均** ($p = -2$)

$$\frac{2}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \tag{59}$$

意味：引力の平均位置，交通量に関する引力モデルにもとづいて；人口が等しいの2都市までの，別のある都市からの距離が，xおよびyであるとき，交通量という視点から見た平均距離．

3^0 **調和平均** ($p = -1$)

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \tag{60}$$

意味：所要時間，速度の平均等

4^0 **平方根調和平均** ($p = -\frac{1}{2}$)

$$\frac{2}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{61}$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

意味：いま，半径が x および y の2つの大きなロールを平面状の床の上に互いに接するように置く．その隙間を，そこにぴったりと収まるような小さなロールの半径 r で測ることにすれば，

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \qquad (62)$$

である．そこで，

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \qquad (63)$$

とおいて，2つの大きなロールの半径の平均値を“同じ大きさの隙間”を作る半径の相等しい大きなロールの半径 z と考えれば，この“平均値”は(61)式であたえられる．

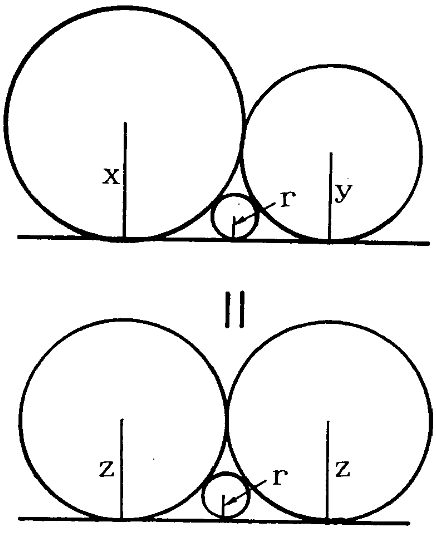

図 13 ロールの隙間

5^0 **平方根平均** ($p=\frac{1}{2}$)

$$2\sqrt{z}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \qquad (64)$$

意味：いくつかの小団体からなる連合体の議決を，各小団体の構成人数の平方根に比例する投票権にもとづいて行う方式；この場合の投票権から見た平均構成人数．[2]

6^0 **算術平均** ($p=1$)

$$2z=x+y \qquad (65)$$

意味：1次のモーメントの平均等

7^0 **遠心力平均** ($p=2$)

$$2z^2=x^2+y^2 \qquad (66)$$

意味：2次のモーメントの平均等

8^0 **最大値** ($p=\infty$)

$$z=\max(x,y) \qquad (67)$$

意味：高さが，x および y の2つの山が近くにあれば，航空機の最低飛行可能高度，つまり，航空機にとっての“平均”高さは x および y の最大値になる．□

図14には，これらの巾乗型生成関数に対応する等平均値線を重ねて示しておいた．

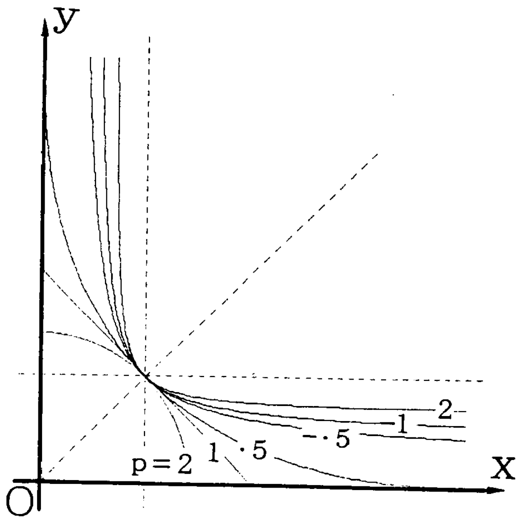

図 14 巾乗型生成関数に対応する等平均値線

● **非分離型**　　分離型でない生成関数から生成される平均法もある．

例4.6 幾何平均　関数

$$f(x,y)=xy \qquad (68)$$

は明らかに定理の条件を満たしており，

$$z=\sqrt{xy} \qquad (69)$$

すなわち，幾何平均を与える．□

例4.7　関数

$$f(x,y)=x^2y \qquad (70)$$

も明らかに定理の条件を満たしている関数であり，

$$z=\sqrt[3]{x^2y} \qquad (71)$$

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

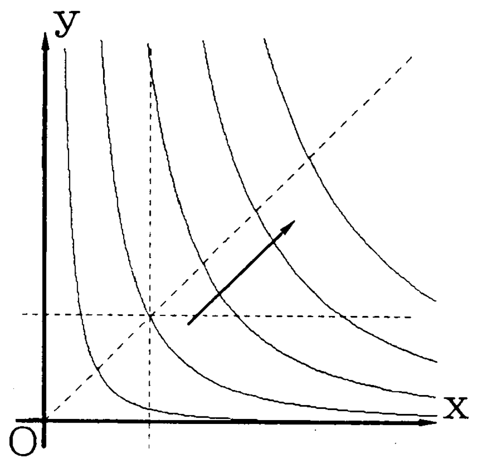

図 15 例4.6の等平均値線

という平均値を与える．この生成関数は，一辺がxの正方形を底面とする，高さyの直方体の体積に対応している．つまり，この“平均値”は，このような直方体と体積の等しい立方体の一辺の長さという意味をもつ．(図16参照)

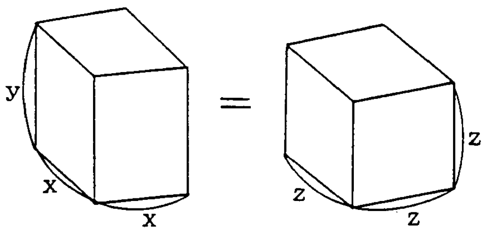

図 16 等価な体積

この値はまた，図17のように，豚を潰して，表面積が最小になるような円筒形（直径＝高さ）の缶詰にする場合の大きさと考えてもよい． □

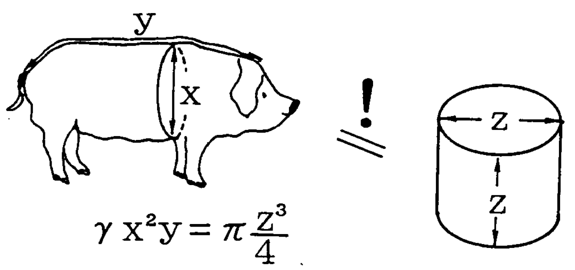

図 17 豚の大きさの指標

以上，本節では，生成関数の概念を導入し，これを類別して来た．しかし，生成関数というものは，第3節で見たように，“解釈”にかかわる．しかし，前述の如く“解釈”は一意的ではないのが普通である．それ故，異なる生成関数から同一の“平均法”が得られることもある．

例4.8

$$f(x,y) = (x+y)^2 \tag{72}$$

という生成関数は非分離型であるが，

$$g(z) = f(z,z) = (2z)^2 \tag{73}$$

$$g^{-1}(u) = \frac{\sqrt{u}}{2} \tag{74}$$

したがって，

$$z = \frac{x+y}{2} \tag{75}$$

すなわち，算術平均になるが，この関数が算術平均を生成する唯一の生成関数ではないことは例4.5に見た通りである． □

5 目的別平均法リストの作成

「“母平均”というものは，そもそも“神によって”定められているのである．ところが，我々が観測するデータは，その母平均が“小悪魔”共によってかき乱されたものである．その母平均を推定するのが平均という方法である．だから，いろいろな“平均法”はこの“小悪魔共”との知恵比べなのだ.」というのが大方の統計学者の考え方のようである．

これに対して本稿では，これとは違った視点に立って，指標として一般化された意味での平均値の形式的定義と，その物理的な意味との関連を考察してきた．これをまとめて大ざっぱにいえば，

「データの集合は，全体としてある1つの“効果”をもたらす筈である．同じ個数のデータで，これらがどれも等しい値であり，全体として同じ“効果”をもたらす“相当量”で，尺度変換によって不変のものを平均値として定義することが出来る．平均値というものは，そのような特性を持つ指標である.」

ということになる．この“効果”を表すのが生成関数になるわけだが，これは言い換えれば，我々が設定するモデルである．しかし，モデルの設定は，ある種の合理性が要求されるとはいえ，基本的には設定者の“価値観”によるものである．

力学のような“無機”現象に関しては，この価値観が云々されることは非常に少ないが，人間や社会に関わる“有機”現象の場合には，これが，少なからぬ意

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

味をもつ筈である．意識されると意識されないのにかかわらず，現代の我々の思考の基層にニュートン力学的世界観とでもよぶべきものが横たわっているとすれば，もう一度その妥当性を問い直す必要もあろう．そして，問題によっては，用いる平均法の選択の妥当性を明示することが求められよう．

また，実用的見地からすれば，平均法選定のマニュアル化，すなわち，平均法の標準的な使用目的別のリストの作成が求められる．しかし，これには解釈の多様性や，社会通念も絡んで来るし，多くの人々の了解と納得を要する．それゆえ，さしあたって本稿の任とすることは出来ないが，イメージをはっきりとさせるために，そんなリストの一例を示しておこう．内容についての異論を承知の上での例示である．

例5.1　「英語と国語」の試験の“平均点”

a) 米英人との仕事と，日本人との仕事が別々にあり，その量は半々である．そのような仕事に携わる人の採用の判断材料には－－算術平均

b) 英語から日本語への翻訳の仕事への適否の判定には－－幾何平均

(正答率が，英語と国語それぞれの正答率の積になるというモデル)

c) 日本人相手の仕事も，米英人相手の仕事にもポストがある．どちらでも良いから，力のある人を採用したい場合の判定には－－最大値

d) 人前に出すので，とにかく無教養な人は困るというときの判定には－－最小値

e) 学習の進捗状況の判断－－調和平均

(成績を物覚えの速度と考えるモデル)　□

多くの場面で役立つよう，このようなリストを多種用意するには，まず応用上の目的を整理分類することが必要になるが，これを網羅的に行うには多くの困難が予想される．現実は多岐にわたるからである．したがって，限定された分野から始めなければなるまい．

このようにして抽出された各々の使用目的に対する平均法の選択は，その適・不適によって行われるが，その一つのアプローチが前節の生成関数の意味づけであり，もう一つが等平均値線の形状によるものである．生成関数による原則的な意味づけだけでは及ばない実用上の微妙な要請を満たすために，等平均値線の形状を第2節に述べられた合成法や，パラメターの調整等によって修正することが必要になろう．

実際，第2節で述べたように，平均法は$\phi(x,y)=1$という一本の等平均値線の形だけで完全に定まってしまう．そこで，湾曲のきついものはどのような場合に適するか?緩いものはどうか?曲線の凹凸はどうか?両軸と交わるものはどうか?等々の議論が可能である．経験的，感覚的，主観的かつ技巧的な議論になるが，複数の人達の意見を総合して,多くの人々に受け入れられる“適切な”平均法を選ぶという作業が必要になる．

しかしどのように努力しても，このようにして作成されたリストに，“限定された分野の目安”を超えた普遍性と無矛盾性を追求するのは困難であろう．限定されたものであっても，実際家にとっては有用であろうから，それを覚悟でなら，リストの作成も意味のないことではなかろう．

参考文献

[1] 柳井　浩「平均値の構造と設計」*Technical Report No.95010, Dept. of Administration Engineering, Faculty of Science and Technology, Keio Univ.* , 1995.

[2] 柳井　浩「平方根方式」「オペレーションズ・リサーチ」1992年2月号，　pp.104-105.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．