相補性問題と変分不等式問題に対するメリット関数

福島 雅夫, 山下 信雄

1. はじめに

本稿では非線形相補性問題 (**Nonlinear Complementarity Problem, NCP**) と変分不等式問題 (**Variational Inequality Problem, VIP**) を取り上げる. NCP や VIP と聞いても一般の読者にはなじみが薄いかもしれない. しかし, 最適化問題, 経済均衡問題, 交通流均衡問題など OR に関連の深い問題には NCP や VIP に定式化できるものが少なくない. (均衡モデルの定式化に関する簡単な解説は [9] を, 様々な応用についての詳細は [4] を参照.)

VIP や NCP に対してはこれまで様々な研究が行われている. とくに LCP に対しては, Lemke 法 [3] や内点法 [17] など, 実用的, かつ理論的に優れた方法が提案されている. 一般の NCP や VIP に対しても, 逐次線形化法, 射影法などが提案されているが [11], 最近, NCP や VIP を等価な制約なしあるいは制約つき最適化問題や方程式系に再定式化して解く方法が注目を集め, 活発な研究が行われている [8]. 本稿では, 著者たちの最近の研究を中心に, そのようなアプローチに関する研究の流れを概観する.

2. NCP と VIP

NCP や VIP を数学的に定式化すると以下のように表せる. NCP は次式をみたすベクトル $x \in R^n$ を求める問題である.

$$[\mathrm{NCP}] \quad \langle x, F(x) \rangle = 0,\ x \in R^n_+,\ F(x) \in R^n_+$$

F は R^n から R^n への連続関数, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は R^n 上の内積, $R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$ である. F がアフィン関数のとき, この問題は線形相補性問題 (**Linear Complementarity Problem, LCP**) と呼ばれる. NCP に関連した問題として, VIP がある. VIP は次式をみたすベクトル $x \in S$ を求める問題である.

$$[\mathrm{VIP}] \quad \langle F(x), x - y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in S$$

ここで, $S \subseteq R^n$ は閉凸集合である. VIP において, とくに $S = R^n_+$ とすれば NCP と等価になるので, VIP は NCP を含んでいる. また, 数理計画問題の 1 次の最適性条件は通常 VIP の形で表されるので, 最適化問題は VIP の特別な場合と考えることができる.

3. メリット関数とは

NCP や VIP を, それを等価な制約なしあるいは制約つき最適化問題に再定式化したとき, その最適化問題の目的関数となる関数を**メリット関数**と呼ぶ. メリット関数は以下の性質をもつことが望ましい.

- ◇ メリット関数は微分可能である.
- ◇ メリット関数の停留点が問題の解となる.
- ◇ メリット関数は問題のエラーバウンドとなる.
- ◇ メリット関数のレベル集合が有界となる.

メリット関数が微分可能であることは, アルゴリズムの構成上非常に重要な性質である. また, 最適化アルゴリズムによって得られる解は一般に問題の停留点または局所的最適解である. したがって, 適当な条件のもとで停留点が大域的最適解となることが保証されていることが望ましい. エラーバウンドとは, 与えられた点と問題の解集合との距離をある定数倍で上からおさえることができる関数のことであり, アルゴリズムの大域的, 局所的収束率を解析する上で重要な役割を果たす. また, メリット関数のレベル集合が有界となれば, 降下法によって生成される点列が集積点をもつことが保証される.

▷ 最適化問題に対しては, 目的関数や (制約つき問題の場合は) ペナルティ関数を自然なメリット関数として用いることができますが, NCP や VIP にはそのような関数が最初から備わっている訳ではありません. しかし, NCP や VIP を実際に解こうとすれば, 解を定量的に評価するための関数が不可欠です. したがって, 上に述べたような好まし

ふくしま まさお, やました のぶお　京都大学工学研究科
〒606 京都市左京区吉田本町

い性質をもつ関数を構成し，さらにそのような関数をうまく利用した効率的な手法を開発することは，実際的観点からも非常に重要な研究課題です [4, 9]．（福島）◁

4. 種々のメリット関数

NCP や VIP を構成する関数 F のヤコビ行列 $\nabla F(x)$ が対称ならば，任意の $x^0 \in R^n$ を用いて，実数値関数

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(x^0 + t(x - x^0)), x - x^0 \rangle dt$$

が定義でき，この関数は微分可能なメリット関数となることが知られている [11]．しかし，一般の NCP や VIP では，F のヤコビ行列が対称となるとは限らない．そのため，$\nabla F(x)$ が非対称な問題に対する様々なメリット関数が提案されてきた [8]．

VIP に対する最初のメリット関数は Auslender [2] が提案した次の**ギャップ関数**と呼ばれる関数である．

$$g(x) = \sup_{y \in S} \langle F(x), x - y \rangle$$

定義から容易にわかるように，関数 g を制約集合 S 上で最小化する問題は，VIP と等価になる．この関数は後で述べる多くのメリット関数の基礎となるが，いくつかの欠点をもっている．まず，ギャップ関数 g は一般に微分不可能である．また，S が有界な集合でないとき，$g(x)$ は必ずしも有界な値をとるとは限らない．このため，$S = R^n_+$ の場合に対応する NCP に直接適用することは困難である．

▷ ギャップ関数という名前は 1982 年の Hearn の論文 [12] で初めて使われました．そこでは凸計画問題の最適性条件に対して上記の関数 g を定義しており，それ以前の研究で，より一般的である Auslender [2] は引用されていません．文献 [2] は仏語のせいか，それほど広く知られていませんが，これ以外にも興味深い結果がいろいろ書かれており，1976 年に出た本であることを考えると，非常に先見性豊かな書物ということができます．（福島）◁

VIP と等価な制約なし最小化問題を構成するメリット関数として，次の**標準残差関数**がある．

$$r(x) = \|x - [x - F(x)]_S\|^2$$

ここで，$[\cdot]_S$ は集合 S への直交射影を表す．この関数は F が強単調でリプシッツ連続のとき，VIP に対するエラーバウンドとなることが知られている．しかしながら，この標準残差関数 r は微分可能ではない．

福島 [7] は，ギャップ関数 g の微分可能性に関する欠点を改良した次の**正則化ギャップ関数** f_α を提案している．なお，この関数は，Auchmuty [1] によって，同時期に独立に提案されている．

$$f_\alpha(x) = \sup_{y \in S} \left\{ \langle F(x), x - y \rangle - \tfrac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 \right\}$$

ここで，α は正の定数である．このメリット関数を用いた次の制約つき最小化問題は VIP と等価になる．

$$\min\ f_\alpha(x) \quad \text{s.t.}\ x \in S \tag{1}$$

正則化ギャップ関数は，ギャップ関数に比べて多くの長所を備えている．とくに，F が微分可能であれば，f_α も微分可能であり，任意の集合 S に対して関数値は必ず有限となる．さらに，(1) の停留点 x^* は，$\nabla F(x^*)$ が正定値であれば，VIP の解であることが保証されている [7]．また，F が強単調であれば，f_α は S 上で VIP のエラーバウンドになる [23]．正則化ギャップ関数を用いたニュートン法 [23] や正則化ギャップ関数の拡張 [24, 25] も提案されている．

▷ 正則化ギャップ関数を思いついたのは，Auslender [2] を読んでいたときでした．そこでは集合 S が“強凸”集合であればギャップ関数 g は微分可能になることが指摘されていました．しかし，経済均衡問題や交通流均衡問題など実際の応用では S は凸多面体になる場合が多く，“強凸”性は成立しません．そこで思いついたのが，集合のかわりに関数の方が“強凸”になるようにしてやっても同様の性質が導けるのではないかということで，それがギャップ関数の定義式に 2 次の項を付け加えるアイデアです．そのように定義された関数 f_α はギャップ関数にはない様々な良い性質をもつことが確かめられたため，論文にまとめ，Mathematical Programming に投稿したのが 1989 年のことです．2 年余りしてその論文 [7] が出版された後のある日 J.-S. Pang から「こんな論文が出ているが知っているか」と送らてきたのが Auchmuty の論文 [1] です．その論文は少なくとも数理計画の世界で VIP を研究している人たちの間ではほとんど知られていなかったものですが，なんと正則化ギャップ関数と実質的に同じメリット関数が提案されていました．また，それが 1989 年に出版されていることにも驚きましたが，論文投稿の日付を見ると [7] よりわずか一週間余りですが遅かったのです．それを見て安堵するとともに，研究は時間との勝負でもあることを改めて実感しました．（福島）◁

これまでに紹介したメリット関数を用いた最適化問題は，微分不可能な制約なし問題であるか，または，微分可能な制約つき問題であり，微分可能な制約なし最小化問題を構成できるメリット関数があるかどうかは，未解決問題として残されていた．この問題の一つの解答として，山下・福島 [31] は正則化ギャップ関数をさらに正則化した関数を提案した．しかし，このメリット関数は関数値の評価に要する計算量が大きいという問題があった．それに対して，最近，Peng [21] は，2 つの正則化ギャップ関数の差で定義される関数を用いれば，微分可能で制約なし最小化問題を構成できることを示した．山下・田地・福島 [34] はこの結果をさらに発展させることにより，次の関数 $g_{\alpha\beta}$ が VIP に対するメリット関数として様々な好ましい性質をもつこ

とを示した.

$$g_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x) - f_\beta(x)$$

ここで, $0 < \alpha < \beta$ であり, $\alpha = \frac{1}{\beta}$ の特別な場合が Peng [21] が考察した関数に対応している. 関数 $g_{\alpha\beta}$ を**D-ギャップ関数**と呼ぶ. Dは "difference" を表している. この関数は, 後で紹介するNCPに対するメリット関数である陰ラグランジュ関数の VIP への拡張になっており, 陰ラグランジュ関数の多くの性質を引き継いでいる. 例えば, 関数 $g_{\alpha\beta}$ の停留点 x^* は $\nabla F(x^*)$ が正定値であればVIPの解となり, また, F が強単調でリプシッツ連続のとき, $g_{\alpha\beta}$ はVIPのエラーバウンドとなる [34]. D-ギャップ関数を目的関数とする最小化問題の解法として, 一般化ニュートン法を拡張した手法が提案されている [15, 22].

▷ 正則化ギャップ関数の後, NCP に対しては後で紹介する陰ラグランジュ関数や2乗 Fischer-Burmeister 関数など, もとの問題と等価な微分可能制約なし最適化問題を構成するメリット関数が次々と知られてきましたが, VIP に対してはそのようなメリット関数はなかなか見つかりませんでした. その最初の試みとして, 私たちは二重の正則化を施したギャップ関数を考えてみましたが [31], そうして得られたメリット関数はとくにエラーバウンドに関して非常に好ましい理論的性質をもつものの, 実際の計算に用いるには特殊な場合を除いてそれほど便利とはいえませんでした. そうこうしているうちに, 中国を訪問したとき北京の中国科学院で講演をする機会がありました. その講演後, 一人の若者がこれを読んでほしいといって自分の論文をもってきました. その論文 (Peng [21]) を読むと, そこに私たちが探していたものが書かれているではありませんか. ただ, Peng の発想は NCP に対する陰ラグランジュ関数を拡張するというところからきており, 議論が複雑で, あまり読みやすいものではありませんでした. その後, よく考えてみると, 話はもっと簡単で, 値の異なるパラメータをもつ2つの正則化ギャップ関数の差を考えるだけで同様のメリット関数が定義できることがわかり, その関数の様々な性質も明らかになりました [34]. 私たちはこの関数を D-ギャップ関数と名付けましたが, これは VIP に対する微分可能かつ無制約の最適化問題を構成できるメリット関数として現在知られている最良のものと考えられます. (福島) ◁

これまで述べてきたVIPに対するいくつかのメリット関数の性質をまとめると表1のようになる. ここで, "停留点" はそのメリット関数の停留点 x がVIPの解になるための $\nabla F(x)$ の条件を表し, "エラーバウンド" はそのメリット関数がエラーバウンドになるための Fの条件を表している. また, "Lip." は F がリプシッツ連続であることを表している.

次にNCPに対するメリット関数を紹介しよう. まず, NCP が次のように成分ごとに分解した形で表されることに注意する.

表 1: VIP に対するメリット関数

メリット関数	微分	制約	停留点	エラーバウンド
ギャップ	不可	S	——	————
標準残差	不可	なし	——	Lip., 強単調
正則化ギャップ	可能	S	正定値	S上で強単調
D-ギャップ	可能	なし	正定値	Lip., 強単調

$$x_i F_i(x) = 0, \;\; x_i \geq 0, \;\; F_i(x) \geq 0, \;\; i = 1, 2, \cdots, n$$

この NCP 特有の構造を利用して, VIP とは異なるメリット関数を構成することができる.

次の性質をみたす関数 $\psi : R^2 \to R$ を**NCP 関数**と呼ぶ [6].

$$\psi(a,b) = 0 \iff ab = 0, \; a \geq 0, \; b \geq 0$$

任意の a, b に対して $\psi(a,b) \geq 0$ であるような非負の NCP 関数を用いれば, NCP に対するメリット関数 Ψ を次のように構成することができる.

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, F_i(x))$$

NCP 関数の定義より明らかに, 関数 Ψ を目的関数とする制約なし最小化問題はNCP と等価である. 制約つき最小化問題を構成するための制約つきNCP 関数については [29] で考察されている. ここでは, 非負の NCP 関数の例として, 次の4つを紹介しよう.

(i) $\psi_{NR}(a,b) = \min\{a, b\}^2$
(ii) $\psi_{MS}(a,b) = ab + \frac{1}{2\alpha}(\max\{0, a - \alpha b\}^2 - a^2 + \max\{0, b - \alpha a\}^2 - b^2)$, ($\alpha > 1$ は定数)
(iii) $\psi_{FB}(a,b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a - b)^2$
(iv) $\psi_A(a,b) = \frac{1}{4}\max\{0, ab\}^4 + \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a - b)^2$

これらの関数のうち ψ_{NR} は微分不可能であるが, その他は微分可能である. よって, 関数 ψ_{MS}, ψ_{FB}, ψ_A を用いて構成したメリット関数は, F が微分可能であれば微分可能となる. 以下では, これらの関数で構成される各メリット関数の性質について述べる.

関数 ψ_{NR} を用いたメリット関数は, VIP に対する**標準残差関数** r を特殊化したものに他ならない.

関数 ψ_{MS} を用いれば次の**陰ラグランジュ関数** M_α を構成することができる.

$$M_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{MS}(x_i, F_i(x))$$

Mangasarian と Solodov [20] は, NCP と等価な制約つき最小化問題

$$\min \; \langle x, F(x) \rangle \quad \text{s.t.} \; x \geq 0, \; F(x) \geq 0$$

の拡張ラグランジュ関数を変形することによって，陰ラグランジュ関数を導き出した．この関数を目的関数とする制約なし最小化問題は NCP と等価であり，微分可能性などの好ましい性質を有している．とくに，M_αの停留点 x は $\nabla F(x)$ が正定値であれば NCP の解であることが保証される [30]．また，NCP に対する陰ラグランジュ関数は，一般化相補性問題や VIP にも拡張されている [28, 21]．

▷ 奈良先端大の修士課程に入学したばかりの山下に Mangasarian-Solodov [20] の原稿を読んでみてはどうかといって渡しておいたところ，しばらくして，論文中で今後の課題とされていた“関数 M_α の停留点が解になるための条件”がわかったという報告がありました．早速検討したところ，正しいことが確認されましたので，論文 [30] にまとめ，Mangasarian が Associate Editor をしている JOTA に投稿しました．これについても，別の研究者が同様の結果を得て Mangasarian に送りましたが，僅かの差で私たちに先を越されたいう話があります．また，陰ラグランジュ関数が VIP に対する正則化ギャップ関数と関連があることは文献 [20] で指摘されていますが，その後の Tseng と私たちの論文 [28] でもより明確な形で議論しています．しかし，その当時は，私たちにも陰ラグランジュ関数は相補性問題の構造に依存する関数という認識があったため，VIP に拡張するまでには至りませんでした．その後，Peng [21] による D-ギャップ関数の発見によって陰ラグランジュ関数が VIP に直接拡張できることが明らかにされたのです．（福島）◁

関数 ψ_{FB} を用いて構成される次の関数が，最近，注目を集めている 2 乗 **Fischer-Burmeister (F-B)** 関数である [5]．

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_{FB}(x_i, F_i)$$

この関数の長所のひとつは，θ の停留点 x が NCP の解となる十分条件が $\nabla F(x)$ が半正定値であることであり，これは正則化ギャップ関数や陰ラグランジュ関数の停留点が解となる条件よりも弱い．そのため，2 乗 F-B 関数は，陰ラグランジュ関数よりも応用範囲が広い．例えば，2 次計画問題を LCP に定式化すると，その LCP においては関数 F のヤコビ行列 $\nabla F(x)$ は半正定値となるので，関数 θ の停留点に関する上記の条件が満たされる．2 乗 F-B 関数の一般化相補性問題への拡張や [14]，2 乗 F-B 関数の最小化に対する一般化ニュートン法も提案されている [13, 32]．

▷ 2 変数関数 $\phi(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - a - b$ は Fischer の論文 [5] において初めて示されました．Fischer によれば，この関数は 1985 年頃に彼の同僚である Burmeister という人と何かの問題について議論していたときに，Burmeister が発見したものだということです．このことから，関数 ϕ は Fischer-Burmeister 関数あるいは単に Fischer 関数と呼ばれています．上にも述べたように，この関数は NCP を取り扱うのに大変つごうがよいので，これを利用したニュートン型の解法もいろいろ提案されています．それらの方法はある意味で内点法に似た振る舞いをするのですが，内点法のように $a > 0, b > 0$ を満たす必要はないという点が大きく異なっています．Fischer-Burmeister 関数については Fischer によるサーベイ論文 [6] があります．（福島）◁

メリット関数 r, M_α, θ に対して次の不等式をみたす正の定数 c_1, c_2, c_3, c_4 が存在する [26, 18]．

$$c_1 r(x) \le M_\alpha(x) \le c_2 r(x) \quad \text{for all } x \in R^n$$
$$c_3 r(x) \le \theta(x) \le c_4 r(x) \quad \text{for all } x \in R^n$$

したがって，これらのメリット関数のひとつがエラーバウンド性またはレベル集合の有界性をもてば，他のメリット関数もエラーバウンド性またはレベル集合の有界性をもつことがわかる．これまでに知られているところでは，これらのメリット関数がエラーバウンドになるための十分条件は F が強単調かつリプシッツ連続であることであり，レベル集合が有界となるための十分条件は F が強単調であることである．

NCP 関数 ψ_A を用いたメリット関数は，

$$\theta_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{4} \max\{0, x_i F_i(x)\}^4 + \theta(x)$$

となり，2 乗 F-B 関数の多くの性質を引き継いでいる [33]．例えば，θ_A の停留点 x は，$\nabla F(x)$ が半正定値であれば NCP の解となる．さらに，関数 θ_A はいくつかの好ましい性質をもっている．まず，θ_A がエラーバウンドとなるための十分条件は F が強単調であることであり，F のリプシッツ連続性は必要としない．また，レベル集合が有界となるための十分条件は，F が単調関数で NCP が狭義実行可能，すなわち $x > 0, F(x) > 0$ となる点が存在することである．なお，関数 θ に似た関数のクラスが [16] で考察されている．

最後に，メリット関数 $M_\alpha, \theta, \theta_A$ の性質を表 2 にまとめる．ここで，“停留点”はメリット関数の停留点 x が NCP の解になるための $\nabla F(x)$ の条件を表し，“エラーバウンド”はメリット関数がエラーバウンドになるための F の条件を，“レベル集合”はメリット関数のレベル集合が有界になるための条件を表している．また，“狭実”は NCP が狭義実行可能であることを表している．

5. 今後の研究指針

前節で紹介したように，これまでに VIP や NCP に対する様々なメリット関数が提案され，それらの関数

[1] 表 2 の“正定値”，“半正定値”はそれぞれ“P 行列”，“P_0 行列”というより弱い条件でおきかえることができる．

表 2: NCP に対するメリット関数

	停留点	エラーバウンド	レベル集合
M_α	正定値[1]	強単調, Lip.	強単調
θ	半正定値[1]	強単調, Lip.	強単調
θ_A	半正定値[1]	強単調	単調, 狭実

の性質が示されてきた. 研究のポイントは, 適用可能な問題のクラスが広く, さらに関数値や勾配の計算量が少なくてすむといった好ましい性質をできるだけ多くもつメリット関数を構成し, その理論的性質を解明するとともに, 効率的なアルゴリズムを開発することにあった. このような観点から見れば, まだ次のような未解決な問題が残されており, それらを調べることが今後の研究課題となる.

□ 標準残差関数は F の強単調性の仮定だけでエラーバウンドになるか?

現在, 標準残差関数のエラーバウンド性の証明には, F の強単調性とリプシッツ連続性が必要とされている. しかし, リプシッツ連続性を満たさず, かつエラーバウンドとならない具体例は知られていない.

□ VIP において, F が単調関数のとき, 停留点が解となるようなメリット関数は存在するか?

NCP に対しては, 2乗 F-B 関数がそのような性質をもっている. しかし, 2乗 F-B 関数は NCP の特性である成分ごとの分離可能性に依存しており, VIP に拡張することができない. VIP に対して, このような性質をもつメリット関数を構成できるであろうか.

□ F が単調関数であるとき, 凸関数となるメリット関数は存在するか?

陰ラグランジュ関数など, NCP に対するメリット関数のいくつかは, F が強単調なアフィン関数という条件のもとで, 凸関数となることが知られている. その条件よりも緩い, 例えば F が単調関数という条件のもとで, 凸関数となるメリット関数を構成できるであろうか.

さらに, 今後の研究指針として, NCP や VIP に対する等価な再定式化の方法を, 均衡条件を制約にもつ数理計画問題 (MPEC) や半正定値相補性問題 (SDCP) に活用することが挙げられる.

制約条件が線形相補性条件を含む MPEC [19] に対しては, LCP の再定式化の手法を応用した反復解法が提案されているが [10], このような研究はまだ始まったばかりであり, 多くの研究課題が残されている.

SDCP は, S を対称行列の集合としたとき, 次の条件をみたす $x \in S$ を求める問題である.

$$[\text{SDCP}] \quad \langle x, F(x) \rangle = 0,\ x \in K,\ F(x) \in K$$

ここで, $K \subset S$ は半正定値対称行列の集合であり, F は S から S への関数である. また, S の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は

$$\langle x, y \rangle := \text{trace}\{x^T y\}$$

で定義される. 最近, NCP に対する陰ラグランジュ関数や 標準残差関数, 2乗 F-B 関数が SDCP に拡張できることが示されている [27]. しかし, それらのメリット関数の性質はまだ十分に解明されておらず, 興味深い研究課題として残されている.

▷ 研究においては, 独自のアイデアを暖め発展させていくと同時に, 他の人たちがどのようなことを考え, どのような成果を発表しているかという情報を早く入手し, それによって自分のアイデアの客観的な評価をすることも大切なことです. しかし, 論文誌に論文が掲載されるまでには, 投稿してから少なくとも1年から2年かかることも珍しくありませんから, 論文が正式に出版されたときには, すでに新鮮さはかなり失われていると考えられます. そこで, 論文の原稿の段階でそれを手に入れる必要がありますが, 昔は著者に直接ハードコピーを郵送してもらうしか方法がありませんでした. しかし, 最近は多くの研究者が WWW のホームページをもっていて, そこから新しい論文をダウンロードできるようにしています. あるいは, 新しい論文のリストを公開していて, 請求してきた人に論文を送るようにしている人もいます. 例えば, 本稿の参考文献にあげた私たちの最近の論文の ps ファイルは http://www.kuamp.kyoto-u.ac.jp/labs/optima/member/staff/fuku/recent-work.html から自由にダウンロードしていただくことができます. また, 本稿のテーマである NCP や VIP に関連する事柄については Complementarity Problem NET (http://www.cs.wisc.edu/cpnet/), より広く最適化・数理計画関係については Network Enabled Optimization System (NEOS) (http://www.mcs.anl.gov/home/otc/index.html) などを通して情報を検索することができます. (福島) ◁

最後になりましたが, 本稿の執筆を勧めていただいた水野真治先生と原稿を読んで適切なコメントを頂戴したお二人の編集委員に感謝します.

参考文献

[1] Auchmuty, G., "Variational principles for variational inequalities," *Numer. Funct. Anal. Opt.* **10** (1989), pp. 863–874.

[2] Auslender, A., *Optimisation: Méthodes Numériques*, Masson, Paris, 1976.

[3] Cottle, R.W., Pang, J.-S. and Stone, R.E., *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, New York, NY, 1992.

[4] Ferris, M.C. and Pang, J.-S., "Engineering and economic applications of complementarity problems," *SIAM Review*, to appear.

[5] Fischer, A., "A special Newton-type optimization method," *Optimization* **24** (1992), pp. 269–284.

[6] Fischer, A., "An NCP-function and its use for the solution of complementarity problems," *Recent Advances in Nonsmooth Optimization*, D.-Z. Du, L. Qi and R.S. Womersley (eds.), World Scientific Publishers, 1995, pp. 88–105.

[7] Fukushima, M., "Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems," *Math. Prog.* **53** (1992), pp. 99–110.

[8] Fukushima, M., "Merit functions for variational inequality and complementarity problems," *Nonlinear Optimization and Applications*, G. Di Pillo and F. Giannessi (eds.), Plenum Press, New York, 1996, pp. 155–170.

[9] 福島雅夫, "均衡モデル：相補性問題への招待", オペレーションズ・リサーチ **41** (1996), pp. 331–336.

[10] Fukushima, M., Luo, Z.-Q. and Pang, J.S., "A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints," *Comp. Opt. Appl.*, to appear.

[11] Harker, P.T. and Pang, J.-S., "Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications," *Math. Prog.* **48** (1990), pp. 161–220.

[12] Hearn, D.W., "The gap function of a convex program," *Oper. Res. Lett.* **1**, pp. 67–71.

[13] Jiang, H., Fukushima, M., Qi, L. and Sun, D., "A trust region method for solving generalized complementarity problems," *SIAM J. Opt.*, to appear.

[14] Kanzow, C. and Fukushima, M., "Equivalence of the generalized complementarity problem to differentiable unconstrained minimization," *J. Opt. Theory Appl.* **90** (1996), pp. 581–603.

[15] Kanzow, C. and Fukushima, M., " Theoretical and numerical investigation of the D-gap function for box constrained variational inequalities," *Math. Prog.*, submitted.

[16] Kanzow, C., Yamashita, N. and Fukushima, M., "New NCP-functions and their properties," *J. Opt. Theory Appl.*, to appear.

[17] Kojima, M., Megiddo, N., Noma, T. and Yoshise, A., *A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[18] Luo, Z.-Q., Mangasarian, O.L., Ren, J. and Solodov, M.V., "New error bounds for the linear complementarity problem," *Math. Oper. Res.* **19** (1994), pp. 880–892.

[19] Luo, Z,-Q., Pang, J.-S. and Ralph, D., *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.

[20] Mangasarian, O.L. and Solodov, M.V., "Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization," *Math. Prog.* **62** (1993), pp. 277–297.

[21] Peng, J.M., "Equivalence of variational inequality problems to unconstrained optimization," *Math. Prog.*, to appear.

[22] Sun, D., Fukushima, M. and Qi, L., "A computable generalized Hessian of the D-gap function and Newton-type methods for variational inequality problems," *Complementarity and Variational Problems: State of the Art*, M.C. Ferris and J.-S. Pang (eds.), SIAM, Philadelphia, 1997, pp. 452–472.

[23] Taji, K., Fukushima, M. and Ibaraki, T., "A globally convergent Newton method for solving strongly monotone variational inequalities," *Math. Prog.* **58** (1993), pp. 369–383.

[24] Taji, K. and Fukushima, M., "A globally convergent Newton method for solving variational inequality problems with inequality constraints," *Recent Advances in Nonsmooth Optimization*, D.-Z. Du, L. Qi and R.S. Womersley (eds.), World Scientific Publishers, 1995, pp. 405–417.

[25] Taji, K. and Fukushima, M., "A new merit function and a successive quadratic programming algorithm for variational inequality problems," *SIAM J. Opt.* **6** (1996), pp. 704–713.

[26] Tseng, P., "Growth behavior of a class of merit functions for the nonlinear complementarity problem," *J. Opt. Theory Appl.* **89** (1996), pp. 17–37.

[27] Tseng, P., "Merit functions for semi-definite complementarity problems", Working paper, Department of Mathematics, University of Washington, Seattle, WA, 1996.

[28] Tseng, P., Yamashita, N. and Fukushima, M., "Equivalence of complementarity problems to differentiable minimization: A unified approach," *SIAM J. Opt.* **6** (1996), pp. 446–460.

[29] Yamashita, N., "Some properties of the restricted NCP-functions for the nonlinear complementarity problem", Working paper, Dept. of Appl. Math. and Phys., Kyoto University, Kyoto, Japan, 1996.

[30] Yamashita, N. and Fukushima, M., "On stationary points of the implicit Lagrangian for nonlinear complementarity problems," *J. Opt. Theory Appl.* **84** (1995), pp. 653–663.

[31] Yamashita, N. and Fukushima, M., "Equivalent unconstrained minimization and global error bounds for variational inequality problems," *SIAM J. Control Opt.* **35** (1997), pp.273–284.

[32] Yamashita, N. and Fukushima, M., "Modified Newton methods for solving semismooth reformulations of monotone complementarity problems," *Math. Prog.* **76** (1997), pp. 469–491.

[33] 山下信雄, 福島雅夫, 非線形相補性問題に対する新しいメリット関数, 1996 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会秋期研究発表会アブストラクト集, 1996, pp. 124–125.

[34] Yamashita, N., Taji, K. and Fukushima, M., "Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems," *J. Opt. Theory Appl.*, to appear.