論文・事例研究

数理モデルを用いた鉱山の開発計画

―最適な可採埋蔵量の算定法―

今井　忠男

1.　はじめに

1.1　研究の背景

資源としての鉱石の定義には「鉱石とは、どの程度の元素濃度があれば経済的に価値があるのか」あるいは「その鉱石は、技術的にどの程度採掘可能か」という問題が生じてくる。この問題に関して、鉱業の分野では「可採埋蔵量」という概念を用いて議論している。可採とは採掘可能の意味で、とくに可採埋蔵量とは、技術的にも経済的にも採掘可能な鉱石の量という意味である。鉱業では、この可採埋蔵量が鉱床あるいは鉱山の評価の1つとして用いられるため、鉱山の開発時あるいは売却時には、その鉱山の可採埋蔵量の算定は慎重かつ厳密に行われる。

さて、可採埋蔵量とは、「鉱床の全鉱量のうち採掘すると経営上不利益となる鉱石を除いた鉱量である」と定義し直すことができる。ただし、技術的に採掘が困難な地質条件、例えば「地表から深過ぎる」とか「深海底」などについては、埋蔵量は推定できても可採埋蔵量は無いと考えることとする。そこで、具体的に「経営上不利益となる鉱石」を定義するなら、採掘すると逆に鉱山の収益が低下するような品位（金属濃度）の鉱石であるといえる。鉱山学では、この品位の限界値をとくにカットオフ品位という。例えば、ある品位の鉱石から抽出した金属価格がこの鉱石を生産したコストより安くなってしまえば、鉱山経営は成り立たない。とくに、鉱石から金属を抽出するときの歩留まりを実収率といい、この値は鉱石の種類によって違いはあるが、現在の技術でも50 % 前後である。つまり、ある品位の鉱石から抽出できる金属量は、鉱量にその品位と実収率を乗じた値として算定できる。したがって、簡単には、処理する鉱石の品位にかかわらず実収率を一定と仮定すれば、経営的にちょうどPay する品位をその鉱床のカットオフ品位と定義できる。また、このようなカットオフ品位を用いても鉱床の可採埋蔵量を算定することは可能である。

しかしながら、上述の議論の問題点は、鉱石の品位に関係なく等しい実収率で鉱石から金属を抽出できると仮定している点にある。技術的には全くそのようにはいかない。どのような技術を駆使しても、品位が低くなると実収率は低下することは、熱力学の理論からも避けられない。まして、実際は、品位にかかわらず技術的に一定の工程で鉱石を処理するため、処理する鉱石の品位によって、実収率は大きく左右されると推測できる。実際には、この実収率の影響を考慮した可採埋蔵量の算定法が望まれる。

1.2　鉱山システムの問題点

一般的に鉱山の操業においては、鉱石を品位別に採掘→運搬→貯鉱→選鉱するようなシステムにはなっていない。例えば、金鉱床のような細い脈状の鉱床ならば、鉱石を品位別に採掘することは技術的にも困難であるし、仮に品位別に採掘できたとしても鉱山内の鉱石運搬ラインはたいていは1系統しかなく、貯鉱場も品位別に貯鉱するだけのスペースを持たない鉱山がほとんどである。つまり、現状の鉱山では、鉱石品位といえば採掘した鉱石の平均品位となり、実際にもこの平均品位の鉱石から金属を抽出している。

いま、実収率は鉱石の品位にしたがって増加する関数と仮定し、鉱石の平均品位とそこからの抽出金属量について次のような推論を試みる。例えば、高品位の鉱石に低品位の鉱石を大量に混入させた場合、平均品位は低下し実収率も低下する。このため、別々に鉱石を処理した場合より、結果的に金属抽出量が減少することが予想できる。また、実収率関数の型によっては、少量ならば低品位の鉱石を高品位の鉱石に混入させた方が良い結果を得る場合もあるかもしれない。このように、鉱石をまとめて品位を平均化して処理する場合、実収率を固定して算定したカットオフ品位では、必ずしも経営的に最適ではないと考えられる。

いまい　ただお　秋田大学　鉱山学部
〒010 秋田市　手形学園町1-1
e-mail : imai@ipc.akita-u.ac.jp
受付　95.9.7　　採択　97.3.19

1．3　研究の目的

従来からの可採埋蔵量の算定法[1][2]は、初期の投資額から鉱山設備を仮定し、鉱石の生産能力とコストとの関係から、鉱山の現価を最大化させるような方法で行われている。しかし、このような方式で算定される可採埋蔵量は、開発者側の都合が第一義となり、一般的な鉱山開発計画では使えないという問題がある。そこで、本論文では、鉱床本来の価値を評価し、ひいては、一般的な鉱山開発における有用なデータとなる可採埋蔵量の算定法を提案し、鉱山の開発計画について論じた。

本論の課題は、具体的には、金属の実収率を品位の関数として仮定した場合のカットオフ品位および可採埋蔵量の数理モデル化にある。もちろん技術的な課題としては、実収率を高め、かつ品位によらず一定の値とすることが望ましい。また、この技術の向上によって鉱床の可採埋蔵量が増加することにもつながるが、ここでは現状の技術を念頭において議論を進める。とくに、開発計画が進んでいない鉱床について、探査データを基に品位分布のモデル化をおこなった。また、現状の選鉱・精練技術から実収率関数を求め、可採埋蔵量の数理モデルを提案し、鉱山の開発計画の検討をおこなった。

以下の章では、一般的な鉱山の操業に合わせて、選鉱する鉱石の品位を採掘した鉱石の平均品位とする場合および鉱石を品位別に採掘→選鉱するシステムを仮定した場合について両者を比較検討する。この結果から、操業上の改善などについても議論した。

2．鉱山開発の数理モデル化

2．1　可採埋蔵量と品位分布モデル

はじめに用語の定義をおこなう。鉱石の元素濃度は鉱石の品位gであらわす。また、鉱床の全鉱量D_0を仮定し、全鉱量の平均品位をG_0とする。この全鉱量のうち、採掘すると経営上不利益となる品位の鉱石を除いた鉱量を可採埋蔵量Dと定義する。また、可採埋蔵量の平均品位をGとする。

いま、鉱床の品位は一様ではないので品位gに関する確率密度関数を$f(g)$でモデル化すると、可採埋蔵量はカットオフ品位γの関数として次式で定義できる。

$$D(\gamma) = D_0 \int_{\gamma} f(g)dg \qquad (1)$$

また、この$D(\gamma)$に含まれる金属量を$M(\gamma)$とすると、平均品位Gもγの関数となり次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} G(\gamma) &= M(\gamma)/D(\gamma) \\ &= \int_{\gamma} g \cdot f(g)dg \Big/ \int_{\gamma} f(g)dg \end{aligned} \qquad (2)$$

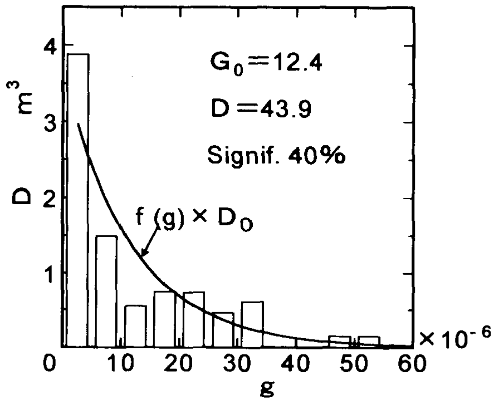

図1　金鉱床における品位gと鉱量Dとの関係

鉱床を評価する上で、最も重要なパラメータは可採埋蔵量の中に含まれる総金属量$M(\gamma)$である。実際には、$M(\gamma)$は$f(g)$、γ、D_0によって算定できるため、鉱床の評価においてはこれらの値の算定が重要となる。

これより、鉱床の品位分布$f(g)$を求める。図1の棒グラフは、文献［3］の金鉱脈平面図から品位分布を品位の階差を5×10^{-6}として算定したものである。ただし鉱量は、深さを単位長さ当たりとして計算した。また、図中の実線は、次式の指数分布関数を当てはめたものである。

$$f(g) = \frac{1}{G_0} e^{-g/G_0} \qquad (3)$$

図中では、上式の当てはめについてχ^2検定を行った。その結果、自由度 11 で$\chi^2_{10} = 10.8$となり、有意水準40 % 程度で有意であることがわかった。このことから、鉱床における品位と鉱量との関係を指数分布関数でモデル化することは十分妥当であるといえる。ただし、$g>0$であり、最少の品位でも、地殻の元素濃度の平均値より十分大きいとする。

この結果は、鉱床学的にも次のように考察できる。鉱床の形成は、基本的には地下に存する熱水中の鉱物イオンの拡散現象によるため、その濃度分布は拡散方程式の解とほぼ一致することが知られている。とくに、この方程式の解は指数関数によって良い近似も得られることから、鉱床の品位分布が指数関数的であることは、物理化学的現象からも妥当なことといえる。

2．2　利潤関数と実収率関数

鉱床から得られる収入は、採掘した鉱石から抽出できる金属の量で決まる。前章の議論によって、鉱石からの金属の実収率ϕは、鉱石の品位によって影響を受けることがわかっている。また、実際の鉱山では、採掘した鉱石はすべてまとめて選鉱されるため、実収率に関係する

品位は、可採埋蔵量の平均品位で代表させてよいとする。したがって、実収率ϕは平均品位$G(\gamma)$の関数$\phi(G(\gamma))$となる。つまり、変数変換すると実収率はγの関数$\phi(\gamma)$で表わすことができる。

これより、鉱床から得られる総利潤は、次に示す総利潤関数で表すことができる。

$$P(\gamma)=D(\gamma)G(\gamma)\phi(\gamma)\mathrm{P_r}-D(\gamma)\mathrm{C_o}$$
$$=\mathrm{C_o}D(\gamma)\{G(\gamma)\phi(\gamma)\beta-1\} \qquad (4)$$
$$[\beta=\mathrm{P_r}/\mathrm{C_o}]$$

ただし、$\mathrm{P_r}$は単位質量あたりの金属価格および$\mathrm{C_o}$は単位質量あたりの鉱石を採掘から精錬するまでの生産コストである。この場合、生産量は、生産設備の最大生産量を仮定したため、生産量に比例し設備費も増加する。したがって、生産コストの中に設備費を含めた。

次に、それぞれの関数を具体的に求める。可採埋蔵量は、式(1)に品位関数として式(3)を代入することで次式が得られる。

$$D(\gamma)=D_0e^{-\gamma/G_0} \qquad (5)$$

また、この平均品位は、同様に式(2)に式(3)を代入して次のように求まる。

$$G(\gamma)=\gamma+G_0 \qquad (6)$$

ただし、G_0は$e^{-1/G_0}\approx 0$の範囲内とする。

さて、実際のデータを基に実収率ϕを平均品位Gの関数$\phi(G)$として求め、そののちGをγに変換し$\phi(\gamma)$を求めることとする。いま、金属の実収率を鉱石の平均品位の関数として、以下のような1次関数でモデル化を行った。

$$\phi(G)=a_\ell G+b_\ell \qquad (7)$$
$$\phi(\gamma)=a_\ell(\gamma+G_0)+b_\ell \qquad (8)$$

なお、a_ℓ, b_ℓは選鉱・精錬の技術によって決まる定数である。図2のプロット点は、各種金属における鉱石の平均品位と実収率との関係について文献[4]から引用したものである。また、実線は、それぞれのデータについて式(6)の実収率関数をあてはめたものである。図より、得られたデータの範囲内では、1次関数によるモデル化は妥当であると考えられる。ただし、実収率関数としてこのモデルが有効な領域は限られているが、鉱床の品位が常識的な範囲では十分有効であるといえる。

また、鉱山の操業が、品位別に鉱石を処理できるようなシステムに変更された場合、実収率に関係する品位は、鉱石をまとめた平均品位ではなく鉱石の個別の品位gそのものとなる。したがって、この場合の実収率関数は式(7)より次式となる。

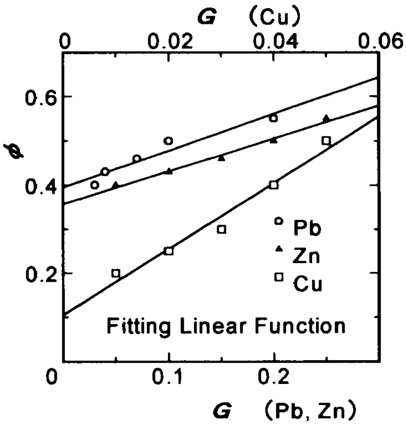

図2 鉱石の平均品位Gと金属の実収率ϕとの関係 (Pb, Zn, Cu)

$$\phi_s(g)=a_\ell g+b_\ell \qquad (9)$$

以下では、実収率関数として上式を用いた場合についても検討する。

2.3 最適なカットオフ品位

前節の議論から、最適なカットオフ品位γ_{opt}の定義は次式となる。

$$\gamma_{opt}=\max_{0<\gamma<1}[P(\gamma)] \qquad (10)$$

ここで、鉱石をまとめて処理するシステムでは、総利潤関数は前節で求めた具体的な関数を代入して次式となる。

$$P(\gamma)=D_0\cdot\mathrm{C_o}\cdot e^{-\gamma/G_0}$$
$$\times\left[\beta(\gamma+G_0)\{a_\ell(\gamma+G_0)+b_\ell\}-1\right] \qquad (11)$$

これより、総利潤関数を最大化させる最適カットオフ品位γ_{opt}は、$P'(\gamma)=0$ の条件を満足させるカットオフ品位として求めることができる。

$$a_\ell\beta\gamma^2+b_\ell\beta\gamma-a_\ell\beta G_0{}^2-1=0 \qquad (12)$$

条件からγ_{opt}は以下の式となる。

$$\gamma_{opt}=\frac{-b_\ell+\sqrt{b_\ell{}^2+4a_\ell{}^2G_0{}^2+4a_\ell/\beta}}{2a_\ell} \qquad (13)$$

また、$\beta=\infty$の場合を考えると上式は次式となる。

$$\gamma_{\min}=\frac{-b_\ell+\sqrt{b_\ell{}^2+4a_\ell{}^2G_0{}^2}}{2a_\ell} \qquad (14)$$

この$\gamma_{\min}$とは、生産コストを無視して金属生産量を最大化させるカットオフ品位値である。この値以下の鉱石まで採掘すると、大幅に平均品位が減少して実収率の低下を招き、その結果、金属生産量そのものが減少してしまうこととなる。

さて、平均品位に対し実収率が大きく変化しない鉱石の場合、実収率を一定として考えてみる。式(11)を$\phi_c=$ constant として、同様に最適カットオフ品位値γ_{opt0}を求めると以下のようになる。

$$\gamma_{opt\,0}=\frac{1}{\beta\phi_c}=\frac{C_o}{P_r\phi_c} \tag{15}$$

上式は次式のように書き換えられる。

$$\gamma_{opt\,0}\cdot\phi_c\cdot P_r = C_o$$

これより、右辺は単位量あたりの鉱石の生産コスト、左辺は単位量あたりの鉱石から抽出できる金属量の価格である。つまり$\gamma_{opt\,0}$は、経営上ちょうどPayできる鉱石の品位値である。これは、従来からいわれているカットオフ品位の定義と一致する。

次に、品位別に鉱石を処理する鉱山システムを仮定した場合、鉱石から抽出できる金属量$m_s(\gamma)$は次式で示すことができる。

$$m_s(\gamma)=D_0\int_{\gamma}^{1} g\cdot f(g)\phi_s(g)\,dg \tag{16}$$

結局、上式から総利潤は以下のようなγの関数となり、この式から利潤を最大にするようなカットオフ品位を求めることができる。

$$\begin{aligned} P_s(\gamma) &= m_s(\gamma)P_r - D(\gamma)C_o \\ &= D_0C_o\beta\int_{\gamma}^{1} g\cdot f(g)\phi_s(g)\,dg - D(\gamma)C_o \end{aligned} \tag{17}$$

前記と同様に$P'_s(\gamma)=0$となるような、最適なカットオフ品位$\gamma_{opt\,s}$を求める。ここでは、上式から次式を導出した。ただし、$e^{-\gamma/G_0} >> e^{-1/G_0}$とする。

$$a_\ell\beta\gamma^2+b_\ell\beta\gamma-1=0 \tag{18}$$

したがって、求める$\gamma_{opt\,s}$は次のようである。

$$\gamma_{opt\,s}=\frac{-b_\ell+\sqrt{b_\ell^2+4a_\ell/\beta}}{2a_\ell} \tag{19}$$

上式では、品位の分別を細分化した場合を仮定しているが、現実には、技術的にもコスト的にも不可能なシステムである。実際に品位別の鉱石処理をおこなうには、2～3段階程度の分別が現実的である。例えば、2段階に鉱石を分別する方式を考えると、高品位の鉱石グループの平均品位G_Uは式(6)より次式となる。

$$G_U=(n+1)G_0 \tag{20}$$

ここで、nは任意の実数で、nG_0を分別の基準品位とした。同様に低品位の鉱石グループの平均品位G_Lは次のようになる。

$$\begin{aligned} G_L &= \int_0^{nG_0} g\cdot f(g)\,dg \Big/ \int_0^{nG_0} f(g)\,dg \\ &= G_0\left(1-\frac{n}{e^n-1}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

この場合、カットオフ品位は低品位グループのみに設定することになる。ただし、分別基準品位とカットオフ品位の2つのパラメータがあるため、簡単に最適パラメータを得ることはできない。したがって、次章では簡単な数値計算によって、このシステムの有効性を検討する。

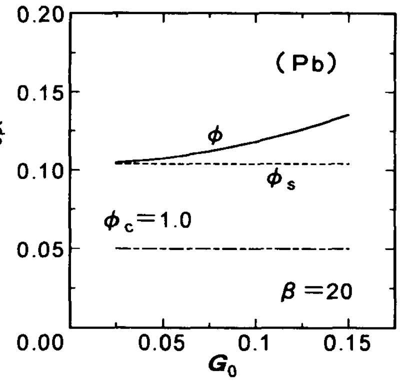

図3 最適カットオフ品位γ_{opt}と平均品位G_0との関係(Pb)

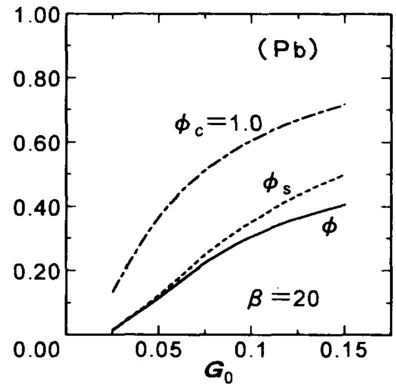

図4 可採鉱量比D/D_0と平均品位G_0との関係(Pb)

3. 数理モデルの検討

3.1 鉱床の平均品位の影響

本章では、これまで提案した数理モデルについて鉛鉱石を例にとり、モデルの有効性について検討する。ただし、鉛鉱石の実収率関数のパラメータは以下の値とした。

$$a_\ell=0.829,\quad b_\ell=0.395$$

なお、現在の鉛価格は5～10万円/t程度であり、鉱石の採掘・選鉱・精練コストは国内で0.5～1万円/t程度であるから、鉛鉱床におけるβの範囲は常識的には次のようである。

$$10<\beta<100,\ \left[0.01<1/\beta<0.1\right]$$

また、鉛鉱床の一般的な平均品位は5～20%程度である。以下の議論は、上記のパラメータの有効な範囲内で検討した。

図3は、式(13)、式(15)および式(19)について鉱床の平均品位をパラメータとして示したものである。ただし、$\beta=20$とした。ここで、ϕ、ϕ_sおよびϕ_cは、鉱石をまとめて処理した場合、品位別に鉱石を処理した場合および鉱石の品位に関わらず実収率を一定とした場合である。図より、品位別に鉱石を処理した場合と実収率を一定と仮定した場合には、カットオフ品位は一定とな

るが、鉱石をまとめて処理する一般的な場合では、鉱床の平均品位の増加と共にカットオフ品位も大きくなる。このことは、1．2節の議論からも妥当な結論といえる。

また、図4は、式（5）に式（13）、式（15）および式（19）をそれぞれ代入し、それぞれの場合の可採埋蔵量について鉱床の平均品位をパラメータとして示したものである。ただし、$\beta=20$とした。図より、全鉱量に対する可採埋蔵量の割合は、どの場合においても鉱床の平均品位が大きくなるに従い増加することがわかる。とくに、鉱床の平均品位が低い領域では、平均品位が大きくなるに従い急激に可採埋蔵量は増加することがわかる。このことから、探査によって鉱床の平均品位を算定する場合、品位の低い鉱床では平均品位の算定をより厳密に行わないと鉱床の正確な評価は難しいといえる。

3．2　経済パラメータの影響

図5は、式（13）、式（15）および式（19）について$1/\beta$をパラメータとして示したものである。ただし、$G_0=0.1$とした。図より、それぞれの場合とも最適なカットオフ品位と$1/\beta$は、ほぼ1次関数的関係にある。したがって、βが小さくなるに従いγ_{opt}は大きくなることがわかる。また、γ_{opt}と$1/\beta$との関係は、実収率を一定とした場合に比較し、実収率に線形な関数を仮定した方が変化が大きいことがわかる。このことから、実収率に線形な関数を仮定した場合のカットオフ値は、コストと価格の関係に比較的影響を受け易いことがわかる。

また、図6は、式（5）に式（13）、式（15）および式（19）をそれぞれ代入し、それぞれの場合の可採埋蔵量について$1/\beta$をパラメータとして示したものである。ただし、$G_0=0.1$とした。ここでは、それぞれの場合とも$1/\beta$が大きくなるに従い可採埋蔵量比は急激に減少している。すなわち、可採埋蔵量は、コストと価格の関係に敏感に影響を受けることがわかる。

以上の考察は、これまでの経験的な鉱山の経営に対して適当な議論であることから、ここで提案したモデルは有効であると考えることができる。

3．3　品位別鉱石処理システムの検討

ここでは、鉱石を品位別に処理するシステムの有利さについて検討する。式（13）および式（19）は、それぞれ鉱石を品位にかかわらずまとめて処理した場合と品位別に処理した場合のカットオフ品位である。両式を比較すると、鉱石を品位によらずまとめて処理した場合のカットオフ品位の方が$2a_lG_0$だけ大きいことがわかる。

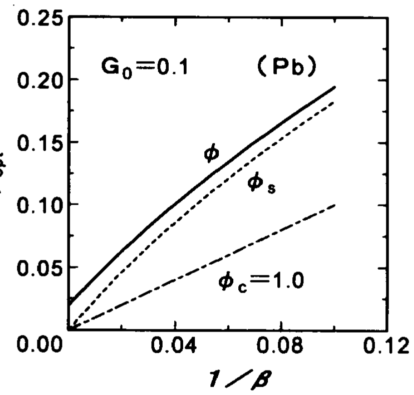

図5　$1/\beta$と最適カットオフ値との関係 (Pb)

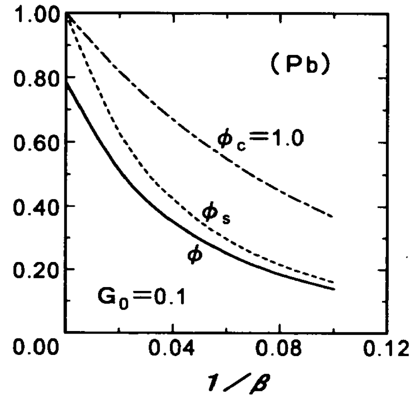

図6　$1/\beta$と最適可採量との関係 (Pb)

つまり、式（18）から可採埋蔵量は、カットオフ品位が大きくなるに従い指数関数的に減少するのだから、当然、鉱石を品位別に処理するシステムを持つ鉱山の方が、可採埋蔵量は多く総収益も多いと考えられる。例えば、カットオフ品位においては両者は$2a_lG_0$の差を生じるのだから、a_lが大きい場合、すなわち実収率関数が品位によって大きく変化するような種類の鉱石では、可採埋蔵量の算定に大きな違いが現れることになる。また、図4に示す通り、鉱床の平均品位G_0が高い場合にも、可採埋蔵量の算定に違いが大きく現れることになる。とくに、平均品位の高い鉱床で可採埋蔵量の算定が大きく違ってしまうと、鉱山の実収入に大きな差が生じることになり、鉱山評価および経営上大きな問題となる。

また、鉱石の2段階分別方式について、次のような簡単な数値による検討をする。いま、鉛鉱石が$\beta=20$および$G_0=0.1$の場合において、鉱石をまとめて処理する場合、品位別に細分別する場合および2段階分別した場合についてそれぞれのカットオフ品位γ_{opt}、γ_{opts}およびγ_{optL}を以下のように求めた。

$$\left\{\gamma_{opt}=0.118,\quad \gamma_{opts}=0.104,\quad \gamma_{optL}=0.111\right\}$$

ここで、2段階の分別の基準値は$2G_0(n=2)$とし、カッ

トオフ品位は低品位グループにのみ用いるとする。さて、上値より、２段階分別法によって分別しない場合に比較し、カットオフ品位が0.007増加することになる。以下では、高品位グループの実収率増大による増収を無視し、カットオフ品位の低下による増収だけを取り上げて検討する。いま、鉛の単価および生産コストがそれぞれ10万円/t、5千円/t（$\beta=20$）とすると、カットオフ品位の増加によって、７百円/tの増収になる。つまり、２段階分別方式によるコストが７百円/t以下すなわち生産コストの増加が14%以下であればこの方式は有効であるといえる。実際には、高品位グループの増収を考慮すると、全体ではより増収となることから、この方式は一般的に十分有効なシステムとなりえると推論できる。

4. おわりに

本論文では、従来の鉱物資源の可採埋蔵量の算定法について問題点を提起し、これまでになかった数理モデルを提案した。本論が提案している数理モデルは、個別の鉱山の開発事情は考慮せず、鉱床を客観的に評価する一般化したシステムである。とくにこのモデルは、未開発の鉱床の評価や地殻資源の総量の把握に役立つと考える。

また、鉱山の操業方法についても議論し、鉱石を品位別に処理するシステムは、品位の違う鉱石をまとめて処理するシステムより金属生産量は多くなることがわかった。とくに、２段階分別法は、技術的にも簡単で、経営的にも十分有効なシステムであるといえる。

引用文献

[1] Lillico,T.M: How to maximize return on capital when planning open pit mines, World Mining, Vol.20, No.6, pp.26-31, (1973)

[2] Lane, K.F.:Choosing the optimum cut-off grade Q. Colorado Sch. Min., Vol.59, No.4, pp.811-829, (1964)

[3] 菅原公平：鉱山の評価，丸善㈱，pp.24-25，(1957)

[4] 小山一郎・緒方乙丸：日本の鉱山，内田老鶴圃，p.293，(1989)