General Purpose Heuristic Algorithms for Combinatorial Problems via CSP (Constraint Satisfaction Problem)

野々部　宏司

(京都大学大学院工学研究科修士課程数理工学専攻　現所属：同大学院工学研究科博士後期課程数理工学専攻)

指導教官：茨木　俊秀教授

1. はじめに

現実社会には解決すべき様々な問題があり，その中には配置問題や割当て問題，スケジューリング問題など，組合せ問題として定式化できる問題が少なくない．しかし，これらの多くはNP困難であり，特に大規模な問題を厳密に解くことは実用上不可能であると考えられる．本研究では，幅広い組合せ問題に対して，良質の近似解を実用的な時間で求めることのできる“汎用近似アルゴリズム”の開発を目指す．そのために，まず高い定式化能力を持つ制約充足問題(Constraint Satisfaction Problem, CSP)[2] に着目し，解くべき問題を一旦 CSP に定式化した後，CSP のアルゴリズムを適用するという方針をとる．ここで，この CSP アルゴリズムの枠組みとしては，個々の問題に対する深い数学的知識をあまり必要としない，メタ戦略が適していると考えられる．本研究では，その中でも特にタブー探索 [1] をとりあげ，CSP に対するタブー探索の適用を行った．

開発にあたっては，幾つかの工夫を加えることによって，適用範囲の拡大を図ると共に，アルゴリズムの有効性を高めるよう試みた．また，得られたアルゴリズムを用いて，グラフの彩色問題等のベンチマーク問題，及び時間割問題等の現実問題に対する計算実験を行い，その有用性を確かめた．

2. 制約充足問題 (CSP)

CSP は，それぞれ有限離散領域 D_i を持つ n 個の変数 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ と，m 個の制約 $C_l(X_{l_1},X_{l_2},\cdots,X_{l_{t_l}})$ $(l=1,2,\cdots,m)$ で定義され，全ての制約を満たすように，各変数 X_i に1つの値 $j\in D_i$ を割当てる問題である．全ての制約を満たすような値の割当てを実行可能解と呼ぶ．ここで，各制約 C_l は変数 $X_{l_1},X_{l_2},\cdots,X_{l_{t_l}}$ に対する t_l-項制約であるが，その表現方法は一意ではなく，不等式や論理式，あるいは値の組の集合といった様々な方法を問題に応じて適当に用いることができる．

変数 X_i とその値 j $(\in D_i)$ の組それぞれに対して，値変数 x_{ij} を

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{変数 } X_i \text{ が値 } j \text{ をとる},\\ 0, & \text{その他},\end{cases}$$

と定義し，割当てを $\sum_{i=1}^{n}|D_i|$ 次元の 0-1 ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_{ij}\mid i=1,2,\cdots,n, j\in D_i)$ で表す．このとき，全ての変数 X_i に対してそれぞれ値を唯1つ割当てるということから，

$$\sum_{j\in D_i}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{1}$$

が成立しなくてはならない．

3. アルゴリズムの基本的枠組み

本研究では，CSP アルゴリズムの基本的枠組みとしてタブー探索を用いる．タブー探索は局所探索法を基本としたメタ戦略の一つであり，多くの組合せ問題に対してその有効性が示されている．ここでは，タブー探索中，式(1)を満たす割当てから成る探索空間 $\mathcal{X}$ を考える．また，$\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$ の近傍 $N(\boldsymbol{x})$ を，ある1つの変数 X_i の値 j を他の値 j' に変えることによってできる割当ての全てとする．ここで，各制約 C_l に対して，それが満たされるならば0，満たされないならば正の値をとるようなペナルティ関数 $p_l(\boldsymbol{x})$ を適当に定義し，全体としてのペナルティ関数 $p(\boldsymbol{x})=\sum_l p_l(\boldsymbol{x})$ を考えることで，CSP を最小化問題

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & p(\boldsymbol{x})\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in\mathcal{X},\end{array} \tag{2}$$

として扱う．すなわち，ペナルティ関数値が0であるような解 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$ が存在することと，CSP が実行可能解を持つことは同値である．

タブー探索では，局所探索において改悪解への移動を許しているので，解のサイクリングを防ぐため，通常，解の移動のある属性をタブーリストと呼ばれるリストに記憶しておき，一定期間 (tabu tenure と呼ばれる) その逆向きの移動を禁止するという方法がとられる．ここでは

表 1: 高等学校の時間割問題に対する計算結果 ($n=793$, $|D|=34$, 最適値 $=1$).

	固定				自動調節
	$t=5$	$t=10$	$t=20$	$t=30$	
最適解の数	19/30	25/30	24/30	10/30	26/30
平均暫定値	3.2	2.1	1.3	2.0	1.3
最悪暫定値	20	25	3	4	4

タブーリストに保持する属性として, 値が 0 から 1 に変わった値変数 x_{ij} と値が割当て直された変数 X_i の 2 つの場合について考えた. 一般に, 小規模な問題例に対しては前者が, 大規模な問題例に対しては後者が適していることが計算実験により示された.

この他, 過剰な禁止を防ぐ為の aspiration criteria の導入, 長期メモリによる多様化, 計算時間削減のための近傍の削減, 欲張り法による初期解の生成を加えている.

4. アルゴリズムの改良

汎用アルゴリズムとしての性能向上のため, 前節で述べた基本的なタブー探索に加え, 以下の工夫を行った.

(i) Tabu tenure の自動調節. プログラムパラメータ tabu tenure は探索に多大な影響を及ぼすものであり, 慎重にその値を決定しなくてはならない. 汎用アルゴリズムを目指す上で, このパラメータ調節手間の軽減は重要な課題である. そこで本研究では, 探索中, 探索状況に応じて tabu tenure を自動調節する方法を提案し, 大きな効果をあげた.

(ii) 目的関数の組み込み. 現実の応用では, 与えられた制約の下に, ある目的関数 $f(x)$ を最小化するといった組合せ最適化問題がよく現れる. 本研究では, この種の問題を扱うことができるように目的関数 $f(x)$ の導入を行った.

(iii) 近傍の拡張. ある 2 つの変数 X_i, X_j の値を交換するという操作 (swap 操作) に基づいて近傍の拡張を行い, 探索能力の向上を図った.

5. 計算実験

前節で述べた 3 つの手法それぞれについて, 計算実験によりその有用性を確かめた. ここでは表 1 に tabu tenure の自動調節機能の効果を示す結果の一例を示す. これは高等学校の時間割問題 (26962 値変数, 12747 線形不等式制約) に対する計算結果であり, 最適値は 1 である. tabu tenure t を 5, 10, 20, 30 に固定した場合と, 探索中, 自動調節した場合それぞれに対して, 初期解を変えて 30 回探索を行った. 1 回の探索はワークステーション Sun Ultra 2 の 300 秒と決めた. 表 1 には, 30 回中最適解が求まった回数, 平均暫定値, 及び最悪暫定値が記されている. t を自動調節した場合, 優れた結果を示していることが分かる. また, 他の近似解法との比較のため, グラフの彩色問題, 集合カバー問題, 一般化割当て問題に対して計算実験を行った. その結果, 多少計算時間がかかるものの, 多くの問題例に対して, 同程度以上の解を得ることができた. さらに, 上述の時間割問題, 看護婦スケジューリング問題 (3750 値変数, 9731 線形不等式制約) といった現実の大規模問題例に対しても実用的な解を得ることができた.

6. まとめ

本研究では, 組合せ問題に対する汎用近似アルゴリズムを目指して, CSP に対するタブー探索の適用を行った. その際に, プログラムパラメータの自動調節等を行い, アルゴリズムの改善を図ると共に, 計算実験によりその有用性を示した. 今後の課題としては, 数理計画法等, 他の手法の利用, 絶対制約及び考慮制約の取り扱い, ユーザ・インターフェースの構築などが挙げられる.

参考文献

[1] Glover, F., "Tabu search - Part I", *ORSA Journal on Computing* 1 (1989) 190-206.

[2] Tsang, E., *Foundations of constraint satisfaction*, Academic Press, London, 1993.