

チャンネル割当問題の解法

宮本 裕一郎

(東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻 現所属：(株)システム計画研究所)

指導教官 松井知己 助教授

1. はじめに

本論文では組合せ最適化問題としてのチャンネル割当問題を紹介し、整数線形計画法を用いた厳密解法、5-近似解法、発見的解法を提案する。その主な成果はアルゴリズムの提案と計算実験であるが、本稿では紙面の都合上、要約にとどめる。

2. 問題設定

近年、携帯電話の普及にともない、大規模なチャンネル割当問題を解く必要が生じてきた。

チャンネル割当問題とはすでに配置されている携帯電話の基地局に対して、電波の干渉を考慮するという条件の下で、チャンネルを割り当てる問題である。ちなみに、携帯電話の基地局は現在関東平野に約10,000個ある。本研究では、電波の干渉を離散化して表現した問題を扱う。すなわち、基地局を頂点とし、干渉の存在する基地局間を枝で結んだグラフを用いて問題を表す。またチャンネルの割当は、グラフの頂点に自然数を割り当てることで表現する。この問題を組合せ最適化問題としてモデル化した問題が以下の問題である。
入力：単純無向グラフ G と自然数の枝重み。

目的： G の頂点に割り当てられた自然数の最大値の最小化。

制約：グラフ G の各頂点に自然数を割り当てる。ただし重み k の辺で隣接する頂点对に割り当てる自然数対はその差が k 以上でなければならない。

この問題をチャンネル割当問題と呼ぶ。図1はチャンネル割当問題の例である。太い線は重み2の辺を、細い線は重み1の辺を表している。数字は割り当てられたチャンネルである。本論文では枝重みとして1または2の2種類を持つ問題のみを扱うが本論文で得られた結果の多くは一般の重みを持つ問題に拡張できる。

チャンネル割当問題は頂点彩色問題を特殊な場合として含む。よってチャンネル割当問題はNP-困難である。本論文では、厳密解法、近似解法、発見的解法のそれぞれを提案する。

3. 厳密解法

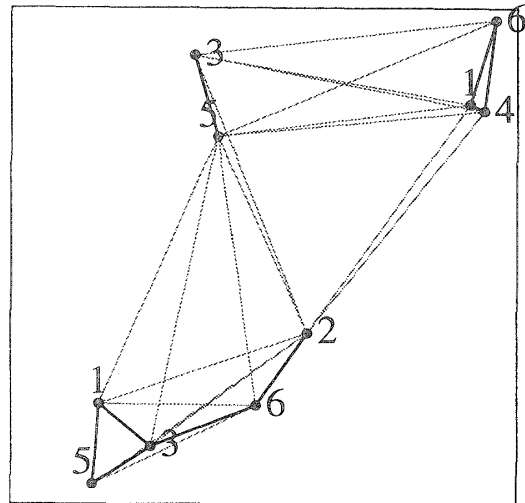


図1 チャンネル割当問題の例

本節では厳密解法を一から構築するのではなく、チャンネル割当問題を整数線形計画法に定式化し既存のパッケージソフトウェアを用いて解を求める。チャンネル割当問題は以下の整数線形計画問題に定式化される。目的関数値の上界を u 、下界を l とする。

$$\begin{aligned} \min. \quad & l + \sum_{j=l}^u y_j, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=l}^u x_{ij} = 1, \\ & \sum \{x_{ij} \mid i \in S\} \leq 1 \quad (\forall j \in C, S \in Q_1), \\ & \sum \{x_{ij} + x_{i+1j} \mid i \in S\} \leq 1 \quad (j \in C, S \in Q_2), \\ & x_{ij} \leq y_j \quad (\forall i \in V, \forall j \in C), \\ & 1 \geq y_{i+1} \geq \dots \geq y_u, \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in V, \forall j \in C). \end{aligned}$$

ただし $C = \{1, \dots, 2n\}$ であり、 Q_1, Q_2 は各々グラフ (V, E_1) と (V, E_2) の極大クリークの族である。 $E_1(E_2)$ は G 中の重み1(2)の枝集合を表している。 V は G の頂点集合を表している。上記の整数線形計画問題を既存のパッケージソフトウェア(lp_solve 2.0)を用いて解いた。

上記のように極大クリークによる不等式などを導入することで、頂点数10の問題例を0.1秒程度で解くことが可能になったが、頂点数25の問題例を解くには約1時間を要した。

4. 近似解法

本論文では、近似解法として以下の頂点除去法を提

案し、特定の枝重み付きグラフに対して5-近似解法であることを証明した。

頂点除去法

与えられたグラフにおいて、頂点 v に接続する重み1の辺の数を $d_1(v)$ 、重み2の辺の数を $d_2(v)$ とする。 $d_1(v)+3d_2(v)$ が最大となる頂点 v をグラフから除去する。得られたグラフにおいて $d_1(v)+3d_2(v)$ を再び計算しそれが最大となる頂点を再び計算しそれをグラフから除去する。以上の操作をグラフが空になるまで繰り返す。元のグラフに戻し、頂点が除去された逆順に、すなわち最後に除去された頂点を最初にチャンネル割当する。このとき、制約条件を満たす範囲で最小のチャンネルを割り当てる。

頂点数500~10000個の問題例に対する計算実験の結果、頂点除去法による解の目的関数値は、最適値の1.2倍程度でおさえられていることが分かった。

5. 発見的解法

本論文における発見的解法の章では、「構築法」と「改善法」それぞれを複数提案し、計算実験によって、その良い組み合わせ方について考察を行なった。頂点除去法は構築法の1つである。もう1つの構築法の提

案を行ったが本稿では省略する。また本論文では局所探索を用いた改善法を2つ提案した。

改善法1

概要の説明にとどめる。すでに可能解が得られているとする。チャンネルに頂点を割り当ててみるとみなす。一番大きなチャンネルに割り当てられている頂点を、ランダムに選んだ別のチャンネルに割り当てる。チャンネル制約を満たさなくなる頂点が出現したらそれらをまとめて別のチャンネルに割り当てる。これを繰り返せば、運がよければ、すべての頂点がチャンネル制約を満たす割当を得られる。このとき割当に使うチャンネルが1つ少なくなる。これを繰り返す。

改善法2

すでに可能解が得られているとする。チャンネルに頂点を割り当ててみるとみなす。チャンネルの区間をランダムに選ぶ。選ばれた区間に割り当てられているチャンネルをひっくり返す（区間内で逆順に割り当てる）。運がよければ区間の端とその隣に割り当てられている頂点を同じチャンネルに割り当てることができると。このとき割当に使うチャンネルが1つ（あるいは2つ）少なくなる。これを繰り返す。

学会に届いた OR の本

最近、出版社より学会宛に下記の本が届いています。ご興味をお持ちになり、「書評をしてみたい」とお考えの読者諸兄におかれましては、どうぞご連絡ください。郵便またはFaxにて、(1)氏名、(2)連絡先住所、電話番号、(e-mailアドレス) (3)所属、(4)専門分野、(5)ご希望の書籍名1冊、をご連絡くだされば、書籍をお送りいたします（基本的に先着順）。その本にOR誌の読者に紹介すべき所見がある、とご判断なさった場合

は、その書評をお寄せください。お読みになったうえで、1カ月以内に書評をお寄せくださった方には、その本を進呈いたします。なにとぞご協力をよろしくお願いいたします。加えて、読者諸氏による書評の投稿も歓迎いたします。みなさんがお手元にお持ちの本の中から、OR学会誌に相応しいものについて書評をお寄せください。

連絡先：OR学会事務局

Fax：03(3815)3352

OR 献本リスト

| 著者 | 書名 | 出版社 | ISDN |
|---------------------------------|---|-----------------------|---------------|
| Belenky, A. S. | Operations Research in Transportation Systems: Ideas and Schemes of Optimization Methods for Strategic Planning and Operations Management | Kluwer | 0-7923-5157-6 |
| Outrata, J.Kocvara, M. Zowe, J. | Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints: Theory, Applications, and Numerical Results | Kluwer | 0-7923-5170-3 |
| David J. Hand Saul D. Jacka | Statistics in Finance | Edward Arnold Limited | 0-340-67719-8 |
| 著者 | 書名 | 出版社 | 値段 |
| 梅田富雄 | 経営システム工学 研究の進め方 | 培風館 | ¥ 2,900 |
| 時永祥三 | Excel による経営データ処理 | 九州大学出版会 | ¥ 1,800 |
| 菊池康也 | 企業物流 地位向上の条件 | 税務経理協会 | ¥ 2,500 |