論文・研究レポート

区間効率値によるDEAモデル

円谷　友英，前田　豊，田中　英夫

1.　はじめに

包絡分析法 (Data Envelopment Analysis: DEA) [1,2]は，多入力多出力システムにおける効率性の評価手法であり，各事業体に対してウェイト変数による仮想出力値の仮想入力値に対する比の相対的な最大値として効率値を定式化している．しかし，従来のDEAでは効率的であると判断される事業体の中には優秀というよりもむしろ特異的であるものが存在する．また，入出力の次元数が大きくなるに従い，効率的であると判断される事業体の数が非常に増加する傾向がある．この方法に対して，事業体を最も不利に評価するという立場でIDEA[3,4]が提案されている．しかし，IDEAとDEAとの定式化の方法が異なるために，非効率値と効率値との関係が不明確である．このことは，(非) 効率値を求めるための計画問題の目的関数や制約条件が異なることから生じる．そこで，本研究では，DEA効率値の本質的な部分を分析し，目的関数と制約条件をともにDEAの基本モデルと同じ形式にし，最小化問題を定式化することにより，効率値の下界値を求め，効率値を区間値として解析する手法を提案する．さらにデータの変動を考慮して，データ自体が区間値となる場合を定式化する．

2.　DEAとIDEA

2.1　DEA

DEAは入力に対する出力の比を効率値として，分析対象である事業体(DMU:Decision Making Unit)にもっとも有利な立場からウェイト付けし，その効率性を他のすべてのDMUの入出力データから相対的に評価する手法である．多入力多出力を取り扱うため，ウェイト付けされた入力の和を仮想入力，ウェイト付けされた出力の和を仮想出力とみなして，ウェイトベクトルを変数とし，分析対象であるDMUの(仮想出力)/(仮想入力)を他のDMUについての同様の比が1以下となるという制約のもとで最大化する．ここで，DMUの数をnと仮定する．m次元入力データ$X \in \Re^{m\times n}$とk次元出力データ$Y \in \Re^{k\times n}$をもとに$DMU_o(o \in \{1,\ldots,n\})$の効率性を測定するCCRモデルはDEAの基本モデルであり，次のように定式化される．

$< FP_o >$

$$\left.\begin{array}{lll} \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} & \\ \text{s.t.} & \dfrac{\boldsymbol{u}^tY}{\boldsymbol{v}^tX} & \leq \boldsymbol{1} \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{v} \in \Re^m$，$\boldsymbol{u} \in \Re^k$は，それぞれ入力ベクトルに対する入力ウェイトベクトル，出力ベクトルに対する出力ウェイトベクトルを表している．この分数計画問題は目的関数の分母を1に制限することにより，次の線形計画問題に変形できる．

$< CCR_o >$

$$\left.\begin{array}{lrl} \max\limits_{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o & = 1 \\ & -\boldsymbol{v}^tX+\boldsymbol{u}^tY & \leq 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

上の線型計画問題の最適目的関数値が1のとき，そのDMUは効率的であるといい，それ以外のとき効率的でないという．また，(1)式と(2)式は同じ最適解を導くが，(1)式では最適解を導くウェイト変数$\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*$は，$(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=k(\boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}')$という形式で得られる．ここで，$k$は0でない実数値である．つまり，このようなウェイト変数は無限に存在するが，(2)式では，$\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o=1$という条件があるために，基本的にはウェイト変数が1

えんたに　ともえ　大阪府立大学工学部
〒599-8531 堺市学園町 1-1
まえだ　ゆたか　大阪府立大学工学部
〒599-8531 堺市学園町 1-1
たなか　ひでお　大阪府立大学工学部
〒599-8531 堺市学園町 1-1
受付 98.8.31　採択 99.5.11

つに固定される．このモデルでは次の生産可能集合が仮定されている．

$$P=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}\geq X\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y}\leq Y\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}\} \tag{3}$$

これは，データ空間上で，入力がより大きくて出力がより小さいDMUは生産可能となることを表している．

2.2 IDEA

DEAがDMU_oに対して最も有利にウェイト付け評価を行うのと対照的に，IDEA(Inverted DEA)は最も不利にウェイト付け評価を行うように定式化された計画問題である．DEAが（仮想出力/仮想入力）を最大化するのに対して，山田ら[3]は（仮想入力/仮想出力）を最大化するようにIDEAの目的関数を設定し，次のように定式化した．

$<I-FP_o>$

$$\left.\begin{array}{lll}\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} & \\ \text{s.t.} & \dfrac{\boldsymbol{v}^tX}{\boldsymbol{u}^tY} & \leq\mathbf{1} \\ & \boldsymbol{u} & \geq\mathbf{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq\mathbf{0}\end{array}\right\} \tag{4}$$

この分数計画問題もCCRモデルと同様に目的関数の分母が1になるように制約に加えることで，線形計画問題に変形され，最適値が容易に求められる．

$<I-CCR_o>$

$$\left.\begin{array}{lrl}\max\limits_{\boldsymbol{v}} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o & \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o & =1 \\ & \boldsymbol{v}^tX-\boldsymbol{u}^tY & \leq\mathbf{0} \\ & \boldsymbol{u} & \geq\mathbf{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq\mathbf{0}\end{array}\right\} \tag{5}$$

この最適目的関数値が1となるDMUを非効率的と呼び，それ以外のDMUは非効率的でないといわれる．このモデルでは，(4)式の１番目の制約式より，(入力/出力)が1で押さえられているので，(3)式のような入力がより大きくて，出力がより小さいDMUが生産可能集合とはならない．このモデルでは，DEAの生産可能集合である(3)式に次の制約式を加えて，合意形成領域を定義している[4]．

$$P_I=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{x}\leq X\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{y}\geq Y\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}\} \tag{6}$$

ここで，合意形成領域P_Hは，

$$P_H=P\cap P_I$$

となり，(2)式による効率値と(5)式による非効率値との積を合意形成上の全体効率と定義した[4]．すなわち，合意形成上の全体効率は，

全体効率値 $=$ DEA効率値 $\times$ $IDEA$非効率値

となる．

ここで，1入力2出力のデータを用いて，DEAとIDEAについて説明する．データは表1のように与えられているとする．視覚的に比較しやすいようにすべてのDMUの入力は1に基準化されている．表2にDEAによる効率値とIDEAによる非効率値を示す．図1に横軸に出力1/入力を，縦軸に出力2/入力をとり表1のデータを示し，DEAの効率フロンティアとIDEAの非効率フロンティアを示す．実線の下側がDEAの生産可能集合であり，実線と破線により囲まれる領域がIDEAの合意形成領域となる．

表 1: データ1

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
入力 $\boldsymbol{x}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
出力1 $\boldsymbol{y}_1$	1	2	2	2	3	4	4	5	6	7
出力2 $\boldsymbol{y}_2$	8	7	6	4	5	4	2	3	2	1

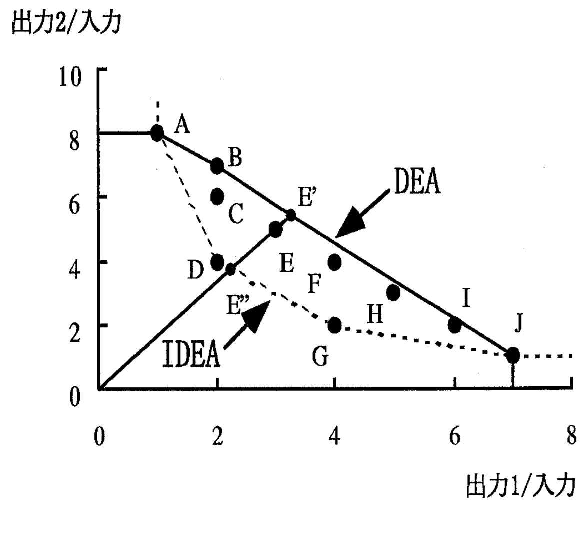

図 1: DEAとIDEAによる効率値

図1において，Eの効率値は(OE/OE')，非効率値は(OE"/OE)により求めることができ，合意的効率値は(OE/OE')×(OE"/OE)により求まる．この数値例で

表 2: 効率値と非効率値

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
DEA 効率値	1.000	1.000	0.894	0.681	0.915	0.936	0.723	0.957	0.979	1.000
IDEA 非効率値	1.000	0.800	0.857	1.000	0.750	0.750	1.000	0.750	0.833	1.000

は，DEAより，{A,B,J}が効率的で，それ以外は効率的でないと判断される．IDEAにより，{A,D,G,J}が非効率的であると判断され，それ以外は非効率的でないと判断される．{A,B,J,G,D}は入出力空間でDMUの凸包を形成している．結果として，{A,J}は効率的であり非効率的であると評価される．DEAでは，図1に示されるように，あるウェイトを係数とする評価関数である線形関数を生産可能集合の外側からO点の向きに移動させ，最初に交わるDMUを効率的と判断する手法である．この方法では，すべてのDMUの凸包の上側の部分が効率的フロンティアとして抽出されることになる．これに対してIDEAでは，同じようにウェイトを係数とする評価関数である線形関数をO点から合意形成領域の向きに移動させて，最初に合意形成領域と交わるDMUを非効率的と判断しようとする方法である．この方法ではすべてのDMUの凸包の下側の部分が抽出されることになる．つまり，DEAとIDEAでは違う方向から評価関数を近づけることにより，DMUの凸包の一部を1という値に対応させる方法である．

3. 区間効率値モデル

3.1 区間DEA

IDEAでは，有利な立場で評価するDEAとは異なる方向から評価関数を近づけることにより，DMUにとって不利な立場の評価を行っている．そこで，同じ方向から評価関数を近づけることにより，有利な立場と不利な立場からの評価を行うことを考える．評価関数をDEAの場合と同じ向き（例えば図1では，生産可能集合の外側からO点に向かって）に近づけ，その傾きの変化し得るすべての範囲で効率値を求めると，それが効率値のとり得る範囲となる．CCRモデル(1)式では，与えられたデータを基にして効率値を求めることは，入出力ウェイトを変数として（仮想出力/仮想入力）の値を最大化することであった．これに対し同じ立場で最も不利な観点から(1)式の目的関数の最小値を直接求めると，出力ウェイトベクトル$\boldsymbol{u}$が0ベクトルで入力ウェイトベクトル$\boldsymbol{v}$が0ベクトル以外の任意のベクトルであるときに（仮想出力/仮想入力）の最小値が0となってしまう．従って目的関数，制約式をまったく変更しないで最小効率値を求めることはできない．そこで，DEAが相対的な効率値評価方法という意味から，すべてのDMUに対する（仮想出力/仮想入力）の最大値を基準にして，DMU_oの（仮想出力/仮想入力）を測り，DMU_oにとって最も有利な評価という観点からその比を最大化するというようにDEAを解釈する．これが，CCRモデルの本来の効率値の意味であると考えることができるので，(1)式の原問題を以下のように考える．

$$\left.\begin{array}{rrl} \theta_o{}^* = & \displaystyle\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\displaystyle\max_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

目的関数の分母を1とし，制約条件に加えると，(7)式は以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{rrl} \theta_o{}^* = & \displaystyle\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} & \\ \text{s.t.} & \displaystyle\max_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

(8)式を(1)式と比べると，明らかに(8)式の制約条件のほうが(1)式より強いものとなっている．しかし，ここで(8)式を解くために次の定理を用いる．

定理1　(1)式の計画問題と(8)式の計画問題は同値である．

証明　(1)式の解をθ_1，(8)式の解をθ_2とする．(1)式の制約式により限定されるウェイト空間の境界部分が(8)式の制約式によるウェイト空間であるので，(8)式の制約条件が満たされると(1)式の制約条件が満たされる．よって，$\theta_1 \geq \theta_2$が成り立つ．ここで，$\theta_1 > \theta_2$とすると，$\theta_1 \neq \theta_2$となるθ_1を導くウェイト$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1$

に対して，$\dfrac{u_1{}^t y_j}{v_1{}^t x_j} = 1$となる$j$が存在するとするとウェイト$u_1, v_1$は$\theta_2$を導くウェイトでもあることになり，$\theta_1 = \theta_2$となってしまうので，すべての$j$について$\dfrac{u_1{}^t y_j}{v_1{}^t x_j} < 1$となる．つまり，$\max_j \dfrac{u^t y_j}{v^t x_j} = \dfrac{u_1{}^t y^*}{v_1{}^t x^*} = 1-\varepsilon$（ただし，$\varepsilon > 0$）となる$\varepsilon$が存在する．しかし，この$(x^*, y^*)$に対して$u_1{}' = u_1/(1-\varepsilon)$となるようなウェイトベクトル$(u_1{}', v_1)$に対する効率値を$\theta'$とすると，$\theta' = \max_j \dfrac{u_1{}'^t y_j}{v_1{}^t x_j} = 1$となり，$DMU_o$の効率値$\theta' = \dfrac{u_1{}'^t y_o}{v_1{}^t x_o} = \dfrac{u_1{}^t y_o}{v_1{}^t x_o}/(1-\varepsilon) > \theta_1$となる．これは，$\theta_1$の最適性に矛盾する．従って，$\theta_1 > \theta_2$とはならないので，$\theta_1 = \theta_2$となる．

定理1より，(1)式と(8)式は同じ解を持つので，効率値の上界は，(2)式を解くことで得られる．ここで，(1)式と(7)式の相違点について考察する．(1)式と(7)式は等しい目的関数値θ^*をもつが，得られる入出力ウェイトu, vは異なり得る．(1)式からは，最適解に対しての入出力ウェイトu, vに関しての比$(u_1 : \cdots : u_k : v_1 : \cdots : v_m)$が得られるが，(7)式では出力ウェイト$u$に関しての比$(u_1 : \cdots : u_k)$と入力ウェイト$v$に関しての比$(v_1 : \cdots : v_m)$が別々に得られるのである．従って，(1)式で限定されるウェイト空間は(7)式より小さくなっているといえる．(7)式に$\max_j \dfrac{u^t y_j}{v^t x_j} = 1$という制約を加え(8)式に変形すると，最適解に対しての入出力ウェイトu, vに関しての比$(u_1 : \cdots : u_k : v_1 : \cdots : v_m)$が得られる．結局，最適解を導くウェイト変数を$u^*, v^*$と表すと，

(2)式の$u^*, v^* \subseteq$ (1)式と(8)式の$u^*, v^* \subseteq$ (7)式のu^*, v^*

となる．

次に，効率値の下界は，(7)式の最小化問題を考えることで以下のように定式化される．

$$\left.\begin{aligned} \theta_{o*} = \ & \min_{u,v} \ \frac{\dfrac{u^t y_o}{v^t x_o}}{\max_j \dfrac{u^t y_j}{v^t x_j}} \\ \text{s.t.} \ & u \ \geq 0 \\ & v \ \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

目的関数の分母を1とすると，(9)式は以下のようになる．

$$\left.\begin{aligned} \theta_{o*} = \ & \min_{u,v} \frac{u^t y_o}{v^t x_o} \\ \text{s.t.} \ & \max_j \frac{u^t y_j}{v^t x_j} = 1 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

(10)式は，線型計画問題に変形することができないので，最小化問題を解くために，すべてのjについて，$u^t y_j / v^t x_j = 1$とみなして，以下の n 個の問題を考える．

$$\left.\begin{aligned} \theta_j = \ & \min_{u,v} \frac{u^t y_o}{v^t x_o} \\ \text{s.t.} \ & \frac{u^t y_j}{v^t x_j} = 1 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}\right\} \ (j = 1, ..., n) \tag{11}$$

これに$v^t x_o = 1$という制約を加えて線型計画問題化すると，すべてのjについて次の問題を作ることができる．

$$\left.\begin{aligned} \theta_j = \ & \min_u u^t y_o \\ \text{s.t.} \ & v^t x_o = 1 \\ & u^t y_j - v^t x_j = 0 \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}\right\} \ (j = 1, ..., n) \tag{12}$$

これらのn個の問題を解き，その最小値が効率値の下界となる．$j = o$のとき，$u^t y_o$の値は1となるので，数学的には次のように書くことができる．

$$\theta_{o*} = 1 \wedge \min_{j \neq o} \ \theta_j \tag{13}$$

一般的に(2)式の線型計画問題はデータの数に伴って，制約式の数が増えるので，通常はその双対問題を解くことになる．一方，(12)式の線型計画問題は，制約式の数が決まっているので，容易に解くことができるが，n-1個の問題を解かないとその最小値は求められない．以上の議論から，DMU_oの効率値は，θ_{o*}から$\theta_o{}^*$の間の値をとることになる．(2)式と(13)式より，DMU_oについて，効率値の上界と下界を求めることが可能となり，その入出力ベクトルによる区間効率値は以下のように与えられる．

$$\theta_o \in [\theta_{o*}, \theta_o{}^*] \tag{14}$$

ここで，これら上下界の線型計画問題では，共に(3)式の生産可能集合が仮定されている．

表 3: 区間効率値

DMU		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
効率値	上界$\theta_o{}^*$	1.000	1.000	0.894	0.681	0.915	0.936	0.723	0.957	0.979	1.000
	下界θ_{o*}	0.143	0.286	0.286	0.286	0.429	0.500	0.250	0.375	0.250	0.125

区間効率値を用いて評価する場合，上界，下界の両方が大きいとき優れていると判断され，両方が小さいときは劣っていると判断され，それ以外の場合は非劣な関係となる．よって，両方が最大でなくとも良い値をとっているDMUを優秀なDMUであると評価することができる．区間効率値の下界は用いられている入出力データのうち各々が最良となる点を仮定したときその点との類似度を表していることになるので，下界が小さいということは，データ内のある次元でかなり劣った値を持っていることを意味する．もし，意思決定者が特異的なDMUを高く評価することを認めるなら，上界からの評価で十分であるが，特異的なDMUを高く評価することを認めないなら下界からの評価を付け加え，下界の小さいDMUを効率的でないと判断する必要があるということになる．

表1に示すデータを用いて，区間効率値を求め表3に示し，考察を行う．この数値例の場合，下界は出力1と出力2の各々が最大値である$(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = (7,8)$という仮想DMUとの類似度となっている．{A,J}は上界がともに最適の1.000となっているが，下界はそれぞれ，2番目に小さい値である0.143と，0.125となっている．よって，これらは優秀なDMUというよりは，特異的なDMUであるといえる．図1より，Aは出力1の，Jは出力2のパフォーマンスが良くないことがわかる．下界の最大値の0.500をとるDMUはFで，2番目に大きい値である0.429をとるDMUはEである．この2つの{E,F}について上界をみてみると，0.936と，0.915という比較的良い値をとっていることが分かる．従って，区間効率値から評価すると，これらのDMUは優秀であるといえる．このように効率値の下界を評価指標に取り入れることにより，DEAによる評価のみから効率的であると評価されたDMUについても，効率的でないと評価されたDMUについても，最も不利な立場からの評価を行い，新たな評価が可能となる．{A,J}のように得られているDMUのうち特異的なデータを持つDMUを高く評価するより，{E,F}のような平均的なDMUを高く評価したいと意思決定者が考えていることがある．その点からみると，区間効率値による評価法は有用である．

3.2 区間IDEA

同様な観点で，IDEAの非効率値も区間値として定式化できる．つまり，(4)式の原問題を次のように考える．

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_o^{I*} = & \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{15}$$

目的関数の分母を1とし，制約条件に加えると，(15)式は以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{llll} \theta_o^{I*} = & \max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} & & \\ \text{s.t.} & \max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j} & = 1 & \\ & \boldsymbol{u} & \geq 0 & \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 & \end{array}\right\} \tag{16}$$

ここで，定理2を得る．

定理2　(4)式の計画問題と(16)式の計画問題は同値である．

証明は定理1の証明と同様である．従って，区間非効率値の上界は(5)式を解くことによって得られる．

区間非効率値の下界値θ_{o*}^Iも同様に，(15)式の最小化問題により定式化される．

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_{o*}^{I} = & \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u} & \geq 0 \\ & \boldsymbol{v} & \geq 0 \end{array}\right\} \tag{17}$$

目的関数の分母を1とし，制約条件に加えると，(17)式は以下のように書き換えられる．

表 4: 区間非効率値

DMU		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
非効率値	上界θ_o^{I*}	1.000	0.800	0.857	1.000	0.750	0.750	1.000	0.750	0.833	1.000
	下界θ_{o*}^I	0.125	0.143	0.167	0.250	0.200	0.250	0.250	0.200	0.167	0.143

$$\left.\begin{aligned}\theta_{o*}^I = &\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}\\ \text{s.t.}\quad &\max_j \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j} = 1\\ &\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

(18)式は線型計画問題に変形できないので，すべての$j \neq o$について$\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j/\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j = 1$とみなして，$\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{y}_o = 1$とおいて，以下の n-1 個の線型計画問題を考える．

$$\left.\begin{aligned}\theta_j^I = &\min_{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o\\ \text{s.t.}\quad &\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o = 1\\ &\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j = 0\\ &\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \quad (j \neq o) \tag{19}$$

ここで，区間非効率値の下界は，以下のように得られる．

$$\theta_{o*}^I \quad = \quad 1 \wedge \min_{j \neq o} \quad \theta_j^I \tag{20}$$

よって，非効率値についても上界と下界を求めることができ，区間非効率値は次のようになる．

$$\theta_o^I \in \left[\theta_{o*}^I, \theta_o^{I*}\right] \tag{21}$$

表1に示すデータを用いて，各DMUの区間非効率値を求めて，表4に示す．

4. 区間データへの拡張

一般に，需要の変動や景気の変動，季節変動などにより，データは変動しているので，これを区間データとして取り扱う．ここで，区間データは以下のように与えられる．

$$x_{ij} \in [x_{ij*}, x_{ij}{}^*], \quad y_{rj} \in [y_{rj*}, y_{rj}{}^*]$$

DMU_oの区間効率値の上界 $\theta_o{}^*$は，クリスプデータ(通常のデータ)の場合と同様の考え方に基づいて，有利な立場からの評価であるから，$\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j (j = 1, ..., n)$の区間内ですべてのDMUに対する$DMU_o$の相対的効率値の最大化を行うことで，次のように定義できる．

$$\left.\begin{aligned}\theta_o{}^* = &\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \max_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} \frac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max_j \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}}\\ \text{s.t.}\quad &\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

区間データによる(22)式は，目的関数の分母を1として，区間データの端点を用いて以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{aligned}\theta_o{}^* = &\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*}}\\ \text{s.t.}\quad \max&\left(\max_{j\neq o}\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^*}, \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*}}\right) = 1\\ &\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}\\ &\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

(22)式が(23)式に変換できることを以下に示す．まず，$a, b \geq 0$について一般に次のことが成り立つ．

$$f(a, b) = \frac{a}{max(a, b)} = 1 \wedge \frac{a}{b}$$

関数$f(a, b)$は，aが最大でbが最小のとき最大値をとり，aが最小でbが最大のとき最小値をとる．(22)式の目的関数の一部は，

$$\theta_o{}^* = \max_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} \frac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \vee \max_{j\neq o} \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}}$$

と書き表せるので，$\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o$については$\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}$の最大値を導くデータの組み合わせ，すなわち，$DMU_o$については，入力の下限と出力の上限$\left(\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*}}\right)$が用いられており，それ以外の$\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$については$\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}$の最小値を導くデータの組み合わせ，すなわち，$DMU_o$以外のDMUについては入力の上限と出力の下限$\left(\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^*}\right)$が用いられている．これは，$DMU_o$にとって楽観的な観点からのデータの組み合わせであり，その他のDMUにとっては悲観的な観点からのデータであるといえる．このデータの組み合わせは，DMU_oについてその最大の効率値(仮想出力/仮想入力)を与える．よって，(23)式の効率値はDMU_oにとって楽観的な観点からのデータの組み合わせを用いた，DMU_oにとって有利な立場

からの評価による効率値であるといえる．(23)式はクリスプデータの場合と同様の手順により，次の線型計画問題に変形することができる．

$$\left.\begin{array}{lrl} \theta_o{}^* = & \max\limits_{\boldsymbol{u}} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^* \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*} & = 1 \\ & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{j*} - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j{}^* & \leq 0 \quad (j \neq o) \\ & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o{}^* - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{o*} & \leq 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \qquad (24)$$

DMU_oの区間効率値の下界θ_{o*}は，クリスプデータの場合と同様に(22)式の最小化問題を考え，下界は不利な立場からの評価であるから$\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j$について区間内ですべてのDMUに対する$DMU_o$の相対的効率値の最小化を行うことで，以下のように定式化できる．

$$\left.\begin{array}{llll} \theta_{o*} = & \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \min\limits_{\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y}_j} & \dfrac{\frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{u} & \geq \boldsymbol{0} & \\ & \boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0} & \end{array}\right\} \qquad (25)$$

目的関数の分母を1とし，区間データの端点を用いて，最小値を導くデータの組み合わせを考慮すると(25)式は以下のように書き換えられる．

$$\left.\begin{array}{lrl} & \theta_{o*} = \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^*} \\ \text{s.t.} & \max\left(\max\limits_{j\neq o}\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j{}^*}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{j*}}, \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*}}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^*}\right) & = 1 \\ & \boldsymbol{u} & \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} \qquad (26)$$

(25)式では，DMU_oについては，入力の上限と出力の下限が用いられており，それ以外のDMUについては入力の下限と出力の上限が用いられている．これは，DMU_oにとって悲観的な観点からのデータの組み合わせであり，その他のDMUにとっては楽観的な観点からのデータの組み合わせであるといえる．このデータの組み合わせは，DMU_oについてその最小の効率値(仮想出力/仮想入力)を与える．よって，(26)式の効率値は，DMU_oにとって悲観的な観点からのデータを用いた，DMU_oにとって不利な立場からの評価による効率値であるといえる．(26)式はクリスプデータの場合と同様の手順により，次のn-1個の線型計画問題を作り，得られる最適目的関数値の最小値をとることで(26)式の効率値を得ることができる．

$$\left.\begin{array}{lrl} \theta_j = & \min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_{o*} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o{}^* & = 1 \\ & \boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j{}^* - \boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_{j*} & = 0 \\ & \boldsymbol{u} & \geq \boldsymbol{0} \\ & \boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0} \end{array}\right\} (j \neq o) \qquad (27)$$

$$\theta_{o*} = 1 \wedge \min_{j\neq o} \theta_j \qquad (28)$$

以上のように，区間データに対する区間効率値は(24)式から求まる上界$\theta_o{}^*$と(28)式から求まる下界θ_{o*}で以下のように与えられる．

$$\theta_o \in [\theta_{o*}, \theta_o{}^*] \qquad (29)$$

5. 数値例

本章では，統計おおさか[5]からの大阪府の33市についての94年から96年のデータを用いて，区間効率値による解析を行った．入力として$\boldsymbol{x}_1$:面積と$\boldsymbol{x}_2$:人口を，出力として$\boldsymbol{y}_1$:事業所数と$\boldsymbol{y}_2$:医療施設数の2入力2出力型データ構造をしている．また，人口，事業所数，医療施設数について，過去3年のデータを区間値として表現し，同様に区間効率値による解析を行った．用いたデータを表5に示し，クリスプデータの場合の各DMUの通常のDEA効率値（区間効率値の上界と等しい）とIDEA非効率値と区間効率値，区間データの場合の区間効率値を表6にまとめ，図2にグラフ化した．

DEA効率値から，大阪市，八尾市，東大阪市が効率的であると判断され，IDEA非効率値から，高槻市，枚方市，河内長野市，箕面市，泉南市，交野市が非効率的であると判断される．これらは4次元入出力空間でDMUの凸包を形成する．東大阪市は効率的であり，非効率的でもあると評価される．この数値例においては，大阪市が上界，下界とも最大値となっているので，明らかに優秀なDMUである．そこで，大阪市を除いた32市に対して区間効率値による結果では，守口市の効率値は[0.608,0.966]となって，下界が32市の中で最大で，上界が最大(1.000)の次に大きいので，上界が1.000である八尾市[0.319,1.000]や東大阪市[0.444,1.000]に加えて優れているDMUであると評価できる．八尾市と東大阪市は等しい効率値の上界(1.000)となっているが，下界を比較すると，八尾市の0.319に対して東大阪市は0.444で大きくなっている．八尾市，東大阪市の下界を守口市の下界である0.608と比較すると小さくなっているが，相対的には全体の中ではあまり小さな値とはなっていないので八尾市，

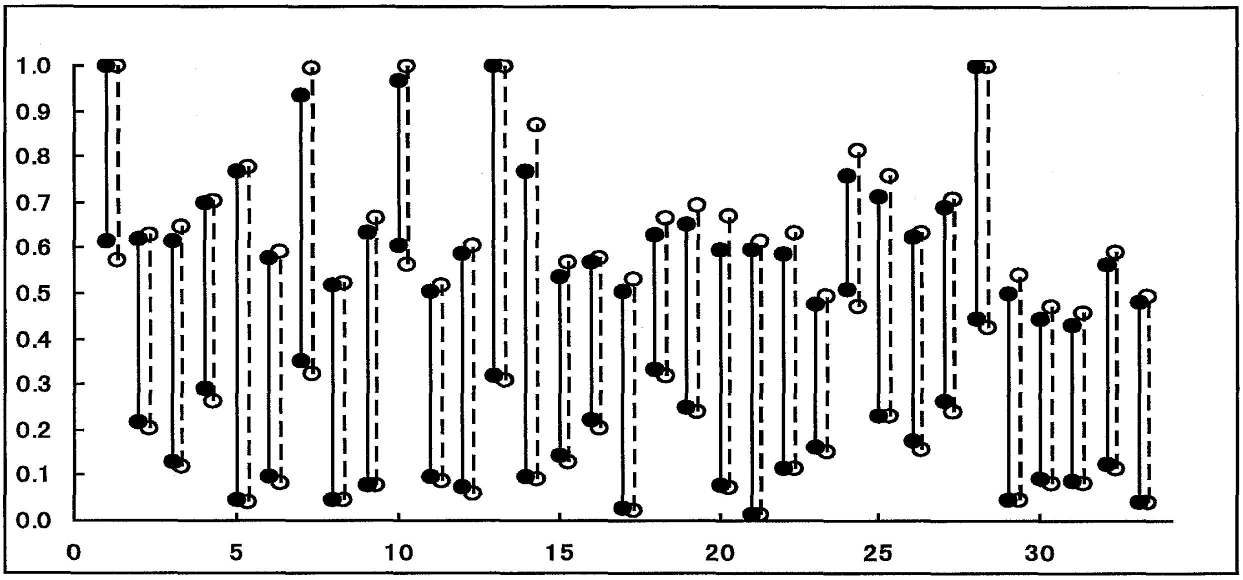

図 2: 区間効率値

東大阪市は特異的なDMUであるとはいえない．区間データによる区間効率値とクリスプデータによる区間効率値を比較すると，区間データによる効率値の区間のほうが大きくなっている．これは，クリスプデータが区間データの一部であることより明らかである．数値例においては，過去3年分のデータから区間値を構成したが，実際は区間値になっていないデータや幅の狭いデータがあり，区間値の端点をクリスプデータとして用いているDMUが多いため，区間の相違が顕著に表れていないDMUも存在する．

6. おわりに

相対的な評価である効率値の求め方として，従来のDEAでの有利な立場からの評価に加え，不利な立場からの評価を考えた．その方法の1つとして，IDEAからの非効率値を用いることがすでに提案されているが，DEA効率値とIDEA非効率値とは別々の評価方法による数値となる．それに対して，本論文では，楽観的観点と悲観的観点から同じ問題を最大化および最小化することにより効率値の端点を求め，区間効率値によるDEAモデルを提案した．DMU_oの区間効率値は入出力ベクトルをウェイト変数として評価関数となる線形関数をある方向から移動させ，最大どれほどの効率値をとり得るか，最低どれほどの効率値が保証されているかを表している．これを用いることで，DEAによる効率値が1となるDMUをそれらの下界を比較することで評価することができるようになり，特に下界の小さいDMUは特異的なDMUであると判断することができる．つまり，効率値を区間として表すことにより，意思決定者により多くの情報を与えることができる．さらに，現実に取り扱うデータは変動していることが多いので，区間データを取り扱うことができるDEAの定式化を行った．

参考文献

[1] A. Charnes, W. W. Cooper, and E. Rhodes: "easuring the Efficiency of Decision Making Units", Europian Journal of Operational Research, 2, 429-444 (1978).

[2] 刀根薫: "経営効率性の測定と改善-包絡分析法DEAによる-", 日科技連 (1984).

[3] 山田善靖, 松井知己, 杉山学: "DEAモデルに基づく新たな経営効率性分析法の提案", 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌 37 158-168 (1994).

[4] 山田善靖, 末吉俊幸, 杉山学, 牧野智謙: "日本的経営の為のDEA法-日本経済に果たす公共事業投資の役割-", 日本オペレーションズ・リサーチ学会論文誌 38 381-397 (1995).

[5] 大阪府企画調整部統計課:"統計おおさか'96,'97,'98".

表 5: 大阪府のデータ

No.	市	'96のデータ 入力 面積 $x_1(km^2)$	人口 x_2(千人)	出力 事業所 y_1	医療施設 y_2	'94〜'96データ 入力 人口 $[x_{2*}, x_2^*]$(千人)	出力 事業所 $[y_{1*}, y_1^*]$	医療施設 $[y_{2*}, y_2^*]$
1	大阪市	220.66	2599	14228	5393	[2575,2602]	[14228,15315]	[5336,5411]
2	堺市	136.79	800	2198	1030	[800,803]	[2198, 2314]	[996,1030]
3	岸和田市	71.87	195	690	240	[191,195]	[690,735]	[222,240]
4	豊中市	36.99	396	1030	573	[396,399]	[1006,1071]	[564,573]
5	池田市	22.11	103	72	164	[103,104]	[72,74]	[157,164]
6	吹田市	36.11	344	295	412	[338,344]	[281,295]	[408,413]
7	泉大津市	12.27	69	468	106	[68,69]	[468,501]	[98,106]
8	高槻市	105.31	362	372	388	362	[361,362]	[376,388]
9	貝塚市	43.95	84	396	85	[83,84]	[390,408]	[85,87]
10	守口市	12.73	155	844	220	[155,157]	[844,935]	[213,220]
11	枚方市	65.07	402	472	421	[397,402]	[459,487]	[403,421]
12	茨木市	76.52	259	421	317	[255,259]	[354,421]	[299,317]
13	八尾市	41.71	276	2455	325	[275,276]	[2455,2623]	[319,327]
14	泉佐野市	54.35	94	490	128	[90,94]	[490,561]	[120,128]
15	富田林市	39.66	123	387	131	[119,123]	[387,404]	[124,131]
16	寝屋川市	24.73	258	505	304	[257,258]	[505,536]	[294,304]
17	河内長野市	109.61	118	213	124	[115,118]	[213,225]	[124,126]
18	松原市	16.66	134	630	135	[133,134]	[630,658]	[131,139]
19	大東市	18.27	129	729	111	[127,129]	[726,763]	[107,111]
20	和泉市	84.99	162	666	167	[152,162]	[666,725]	[158,167]
21	箕面市	47.84	127	45	157	[124,127]	[45,50]	[149,157]
22	柏原市	25.39	81	375	72	[78,81]	[375,391]	72
23	羽曳野市	26.44	118	358	104	[117,118]	[354,372]	[98,105]
24	門真市	12.29	140	636	172	[140,141]	[636,692]	[167,172]
25	摂津市	14.87	87	525	84	[86,87]	[508,549]	[84,86]
26	高石市	11.35	64	148	83	64	[143,157]	[79,83]
27	藤井寺市	8.89	67	172	96	[66,67]	[171,180]	[90,96]
28	東大阪市	61.81	518	4526	671	[513,518]	[4526,4915]	[643,671]
29	泉南市	47.29	62	217	53	[61,62]	[217,238]	[53,54]
30	四条畷市	18.74	54	127	50	[52,54]	[127,137]	[49,50]
31	交野市	25.55	73	165	65	[69,73]	[165,172]	[63,65]
32	大阪狭山市	11.86	57	109	67	[56,57]	[108,111]	[65,68]
33	阪南市	36.06	56	113	56	[55,56]	[113,134]	[53,56]

表 6: 区間効率値

No.	市	クリスプデータ $[\theta_{o*}, \theta_o{}^*]$	区間データ $[\theta_{o*}, \theta_o{}^*]$	DEA 効率値	IDEA 非効率値
1	大阪市	[0.615, 1.000]	[0.573, 1.000]	1.000	0.428
2	堺市	[0.219, 0.620]	[0.202, 0.628]	0.620	0.722
3	岸和田市	[0.131, 0.614]	[0.121, 0.649]	0.614	0.717
4	豊中市	[0.292, 0.697]	[0.264, 0.706]	0.697	0.668
5	池田市	[0.044, 0.767]	[0.041, 0.776]	0.767	0.750
6	吹田市	[0.096, 0.577]	[0.086, 0.596]	0.577	0.940
7	泉大津市	[0.353, 0.933]	[0.326, 0.994]	0.933	0.556
8	高槻市	[0.048, 0.517]	[0.044, 0.524]	0.517	1.000
9	貝塚市	[0.079, 0.632]	[0.079, 0.665]	0.632	0.845
10	守口市	[0.608, 0.966]	[0.564, 1.000]	0.966	0.610
11	枚方市	[0.099, 0.505]	[0.089, 0.517]	0.505	1.000
12	茨木市	[0.075, 0.590]	[0.058, 0.606]	0.590	0.836
13	八尾市	[0.319, 1.000]	[0.312, 1.000]	1.000	0.726
14	泉佐野市	[0.096, 0.771]	[0.090, 0.871]	0.771	0.632
15	富田林市	[0.143, 0.537]	[0.131, 0.570]	0.537	0.827
16	寝屋川市	[0.220, 0.568]	[0.205, 0.577]	0.568	0.833
17	河内長野市	[0.027, 0.506]	[0.024, 0.534]	0.506	1.000
18	松原市	[0.332, 0.630]	[0.321, 0.667]	0.630	0.849
19	大東市	[0.249, 0.653]	[0.239, 0.694]	0.653	0.993
20	和泉市	[0.080, 0.595]	[0.076, 0.670]	0.595	0.832
21	箕面市	[0.013, 0.596]	[0.012, 0.617]	0.596	1.000
22	柏原市	[0.116, 0.590]	[0.116, 0.636]	0.590	0.962
23	羽曳野市	[0.161, 0.475]	[0.151, 0.495]	0.475	0.986
24	門真市	[0.511, 0.758]	[0.473, 0.817]	0.758	0.703
25	摂津市	[0.231, 0.712]	[0.230, 0.758]	0.712	0.885
26	高石市	[0.178, 0.625]	[0.158, 0.632]	0.625	0.746
27	藤井寺市	[0.264, 0.691]	[0.242, 0.709]	0.691	0.675
28	東大阪市	[0.444, 1.000]	[0.424, 1.000]	1.000	0.660
29	泉南市	[0.046, 0.500]	[0.046, 0.544]	0.500	1.000
30	四条畷市	[0.093, 0.446]	[0.085, 0.474]	0.446	0.962
31	交野市	[0.088, 0.429]	[0.081, 0.459]	0.429	1.000
32	大阪狭山市	[0.126, 0.566]	[0.115, 0.592]	0.566	0.838
33	阪南市	[0.043, 0.482]	[0.039, 0.496]	0.482	0.980