論文・研究レポート

化学製品に対する最適計り直し量に関する一考察

三道　弘明，中川　覃夫，太田　俊彦

1. はじめに

化学物質を生産する工程の最終段階に，ドラム缶や袋に詰められた製品の重量を測定し，その測定結果を製品に記載するという工程がある．一般にこのような工程は，製品そのものの品質には直接影響しないためそれほど重視されておらず，経費もかけられていない．

しかし，元来製品の重量が非常に大きい関係もあり，この計量工程の途中で秤自身に狂いが生じることも少なくない．狂いが発生した秤で製品を計量した場合，製品に記載された重量と実際の重量とが一致しないこととなる．特に，製品が化学薬品のような物質である関係で，記載された重量と実際のそれとが異なっていると，消費者が記載された重量をそのまま信用して化学反応に用いた際に，不純物が生成されるなどして正しく反応しないこととなる．このような場合には，大きなクレームが寄せられるばかりでなく，製造業者としての信用をも失墜しかねない．以下では，製品の物質的品質そのものではなく，実際の重量と記載された重量が異なるような製品に注目し，このような製品を不良品と呼ぶこととする．

一方，秤に対しては，毎日1日の初めと終わりに点検，調整が行われているが，こうした作業はかなりの高度な技術を必要とし，専門家が行うこととなっている．また，秤の狂いはこのような点検，調整によって初めて検出され，同時に秤も正常に戻される．

さんどう　ひろあき　流通科学大学情報学部
〒651-2188 神戸市西区学園西町 3-1
なかがわ　としお　愛知工業大学工学部
〒470-0392 豊田市八草八千草 1247
おおた　としひこ　日本油脂 (株) 研究開発部
〒470-2398 愛知県知多郡武豊町字北小松谷 61-1
受付 99.9.16 採択 99.12.22

上に述べたような状況の下，現状では，1日の終わりに秤に狂いが生じていることが検出されると，その日1日に計量したすべての製品の計り直しを行っており，計り直しが終了した時点で製品をそのまま出荷している．しかし，計り直しの最中に再度狂いが発生することもあり，このような場合に初めて前述した不良品が発生する．

本研究では，計り直しの作業がかなりの負担を必要とする作業であることと，計り直しの最中に再度秤に狂いが生じる可能性を考慮し，秤に狂いが検出された場合にすべての製品を計り直すのではなく，最終計量製品から遡って一定の割合 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ だけを計り直すことを提案する．この上で，不良率を導出し，不良率を最小にするような計り直しの割合が存在することを示す．また，許容可能な不良率が与えられた場合の計り直しの割合についても議論する．さらに，本方策に対する1日当たりの期待費用を定式化した上で，期待費用を最小にするという意味での経済的計り直しの割合についても解析を行う．最後に数値例により，本方策の特長について考察を行う．

2. 方策と仮定

2.1 方策

[方策]

1日の終わりに行われる秤の点検，調整時点で秤に狂いが検出された場合，その日1日に計量した製品量のうち，最終計量製品から割合 $\beta(0 \leq \beta \leq 1)$ だけ遡って計り直しを行うという方策を考える．但し，計り直しを行った製品は，現実がそうであるように，そのまま出荷することとする．

なお上に述べた方策で，$\beta=0$ の場合には一切計り直しを行わない，$\beta=1$ はその日計量した全製品を計り直すことを意味している．

また以下を仮定する．

(1) 計量すべき製品の数量は非常に大きく，これを連

続量と見なすことができる．

(2) １日に計量すべき製品量は，一定値 T で与えられる．

(3) 秤の点検に必要な作業は調整に必要なそれに同じである．従って，以下では点検と調整を区別しないこととする．

(4) 秤の狂いは点検，調整によってのみ検出される．

(5) 秤の点検，調整は１日の初めと終わりにのみ実施され，計り直しが終了した時点で製品をそのまま出荷する*.

(6) 秤の点検，調整終了時点から計測して秤に狂いが発生するまでに計量した製品の量は，分布関数 $F(t)$ を持つ確率分布に従う．

3. 目的関数

ここでは，目的関数として出荷した製品のうちの不良品の割合を表す不良率と，**2** に述べた方策に対する１日当たりの期待費用を導出する．

3.1 不良率

図１に示すように，製品量 $t \in (0,(1-\beta)T]$ を計量した時点で秤が狂う場合を考える．このとき，$[(1-\beta)T-t]$ なる量は計り直されないので，不良品のまま出荷されることとなる．

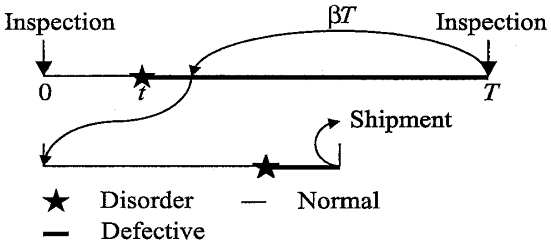

図 1: $t \in (0,(1-\beta T)]$ の場合

ここで，計り直しが行われる βT なる量の製品に注目すると，計り直しの際にも秤に狂いが発生する可能性が存在することから，計り直される製品のうち不良品のまま出荷される量の期待値は

$$0\times\overline{F}(\beta T)+\int_0^{\beta T}(\beta T-t)dF(t)=\int_0^{\beta T}F(t)dt \quad (1)$$

で与えられる．

計り直されない不良品の量 $[(1-\beta)T-t]$ と式 (1) で与えられる量を勘案すると，区間 $(0,(1-\beta)T]$ において秤に狂いが発生するときの不良品の量の期待値は

$$\begin{aligned} r_1(\beta) &= \int_0^{(1-\beta)T}[(1-\beta)T-t]dF(t) \\ &\quad +F[(1-\beta)T]\int_0^{\beta T}F(t)dt \quad (2)\end{aligned}$$

となる．

これに対し，図２に示すように量 $t \in ((1-\beta)T,T]$ を計量した時点で秤が狂う場合には次のようになる．

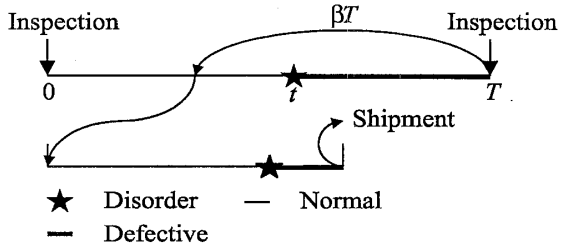

図 2: $t \in (\beta T,T]$ の場合

最初の $(1-\beta)T$ なる量は，秤が正常であるときに計量されているので良品である．しかし，βT なる量が計り直され，このうち不良品のまま出荷される量の期待値は式 (1) より $\int_0^{\beta T}F(t)dt$ である．よって，秤が区間 $((1-\beta)T,T]$ において狂う場合の不良品の量の期待値は

$$r_2(\beta)=\{F(T)-F[(1-\beta)T]\}\int_0^{\beta T}F(t)dt \quad (3)$$

となる．

ここで，秤に対して１日の初めにも点検，調整を行っていること考えると，プロセスの振る舞いは，毎朝実施される秤の点検，調整を終了した時点を再生点とする再生報酬過程 [1,2,3] を形成する．よって，本研究で提案する方策の下での不良率 $Q(\beta)$ は

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \frac{r_1(\beta)+r_2(\beta)}{T} \\ &= \frac{\int_0^{(1-\beta)T}F(t)dt+F(T)\int_0^{\beta T}F(t)dt}{T} \quad (4)\end{aligned}$$

となる．よって，$Q(\beta)$ を最小にするような $\beta=\beta^*$ が存在すれば，これが不良率を最小にするという意味での最適な計り直しの割合である．

*計り直しを行ったときには，翌日の初めに行われる点検，調整の結果を待ち，計り直しの際に狂いが発生していなかったことを確認してから出荷すれば，すべての問題は解決できる．しかし現状では，納期の関係もあり，このような方法は採用していない．

3.2 期待費用

不良品を市場に出荷した場合の不良品1単位当たりに要する費用を c_1 とする．また，製品1単位当たりを計り直すために必要な費用を c_2 とする．但し，$c_2 < c_1$ と仮定する．このとき，1日当たりに要する期待費用は

$$\begin{aligned} C(\beta) &= c_1\left[\int_0^{(1-\beta)T} F(t)dt + F(T)\int_0^{\beta T} F(t)dt\right] \\ &\quad + c_2\beta T F(T) \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる．よって $C(\beta)$ を最小にするような $\beta = \beta^{**}$ が経済的な計り直しの割合を与える．

4. 最適方策

4.1 最小不良率

式(4)の不良率を最小にするような計り直しの割合 $\beta = \beta^*$ を求める．

$$Q'(\beta) = F(T)F(\beta T) - F[(1-\beta)T] \tag{6}$$

$$Q'(0) = -F(T) < 0 \tag{7}$$

$$Q'(1) = F^2(T) > 0 \tag{8}$$

より，$Q'(\beta)$ は β の増加関数であり，その値は負から正に唯一度だけ変化する．従って，不良率 $Q(\beta)$ を最小にする $\beta = \beta^*(0 < \beta^* < 1)$ が唯一存在する．

4.2 不良率に上限がある場合

式(4)より

$$Q(0) = \frac{\int_0^T F(t)dt}{T} \tag{9}$$

$$Q(1) = \frac{F(T)\int_0^T F(t)dt}{T} \tag{10}$$

を得る．よって

$$Q(0) > Q(1) \tag{11}$$

が成立し，一切計り直しを行わない場合の不良率は，すべてを計り直す場合のそれよりも大きいことがわかる．

ここで，許容不良率を $\alpha(0 < \alpha < 1)$ とするとき，$Q(\beta) \leq \alpha$ を満足する最小の計り直し量を与える割合を β_α と書くこととすると，4．1の結果及び式(9)，(10)，(11)から，β_α は次のようになる．

(1) $\alpha \geq \int_0^T F(t)dt/T$ ならば，$Q(\beta) \leq \alpha$ for $0 \leq \beta \leq 1$ が成立し，$\beta_\alpha = 0$ である．すなわち計り直しは必要ないこととなる．

(2) $\int_0^T F(t)dt/T > \alpha > F(T)\int_0^T F(t)dt/T$ である場合，$Q(\beta) = \alpha$ を満たす唯一の $\beta_\alpha(0 < \beta_\alpha < 1)$ が存在する．

(3) $\alpha \leq F(T)\int_0^T F(t)dt/T$ のときには，次のような場合分けが必要である．

(a) $Q(\beta) = \alpha$ となる β が2つ存在するとき，小さい方を β_α とする．

(b) $Q(\beta) = \alpha$ となる β が唯1つの場合には，それが β_α である．

(c) $Q(\beta) = \alpha$ が解をもたないときには，計り直しをしても不良率を α 以下に抑えることはできない．

4.3 経済的計り直し量

ここでは，式(5)に定式化した1日当たりの期待費用を最小にすることを考える．式(5)より，$C'(\beta) \geq 0$ は

$$\frac{F[(1-\beta)T]}{F(T)} - F(\beta T) \leq \frac{c_2}{c_1} \tag{12}$$

に等価である．式(12)の左辺を $L(\beta)$ とおくと

$$L(0) = 1 > \frac{c_2}{c_1} \tag{13}$$

$$L(1) = -F(T) < 0 \tag{14}$$

$$\begin{aligned} L'(\beta) &= -T\left[\frac{f[(1-\beta)T]}{F(T)} + f(\beta T)\right] \\ &< 0 \end{aligned} \tag{15}$$

が成立する．故に，不等式(12)を満たす最小の $\beta = \beta^{**}$ が唯一存在し，これが $C(\beta)$ を最小にするという意味で経済的な計り直しの割合を与える．

5. 数値例

点検，調整を終えた秤が狂うまでに計量する製品量に対して，密度関数が次式で与えられるガンマ分布を考える．

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{\lambda^2 t}{\Gamma(2)}e^{-\lambda t},\ \lambda > 0 \tag{16}$$

ここに，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数を表す．なお，密度関数が式(16)で与えられるガンマ分布を考えたのは，次の理由からである．ひとつは，式(16)の密度関数をも

つガンマ分布が，信頼性理論 [4,5,6] でいうところの *IFR*(Increasing Failure Rate) の性質を有するからである．すなわち，上のガンマ分布は時間の経過とともに秤に狂いが発生しやすくなるという状況を表現しており，このような状況は現場の感触に合致しているからである．もうひとつには，密度関数が式 (16) のガンマ分布を適用した場合には，式 (4)，(5) の目的関数の計算が容易であることがある．

以下では $T = 1$ とし，1週間に1回程度の頻度で秤に狂いが発生する現状を考慮し，$F(T) = 1/7$ である場合，すなわち $\lambda = 0.66$ の場合について考察する．

図3は，不良率 $Q(\beta)$ と β の関係を示したものである．なお，不良率 $Q(\beta)$ は，$\beta^* = 0.7468$ で最小値 $Q(\beta^*) = 0.00446$ をとり，$Q(0) = 0.05276$，$Q(1) = 0.00749$ である．これらのことから，式 (16) のガンマ分布の下では，$F(T) = 1/7$ であれば，計り直しを一切行わなくても不良率は高々5%強であり，すべてを計り直すことで，不良率を約 0.75%に押さえることができる．また，約 75%を計り直すことで不良率を最小の 0.45%程度に押さえることも可能である．なお，すべてを計り直す場合の不良率が，約 75%を計り直す時のそれより大きくなるのは，計り直す量を大きくすると，計り直しの途中で秤に再度狂いが発生する確率が大きくなるからである．これに対して，許容可能な不良率の上限を $\alpha = 0.01, 0.05$ としたときの計り直しの割合は $\beta_{0.01} = 0.48$，$\beta_{0.05} = 0.02$ である．

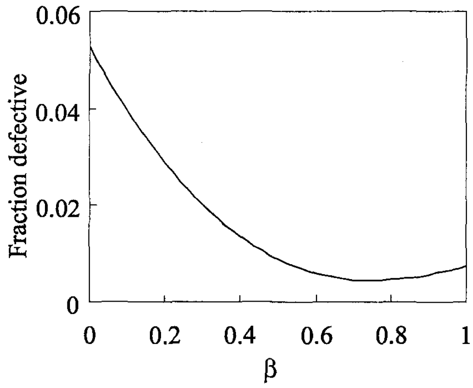

図 3: 不良率

図4は，1日当たりの期待費用 $C(\beta)$ と β との関係を表したものである．なお，ここでは $c_2 = 1$ に対して $c_1 = 2, 3, 4, 5$ とした場合の結果を示しており，期待費用の形状が読みとれる．

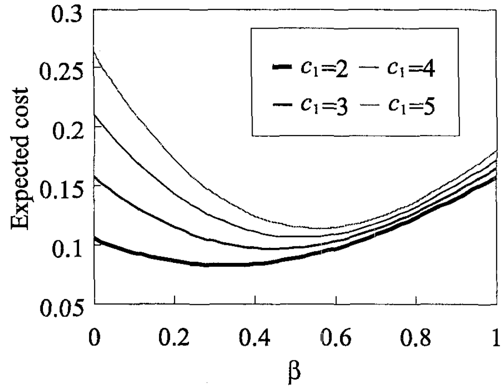

図 4: 期待費用

表 1: 経済的計り直しの割合

c_1	β^{**}	$C(\beta^{**})$
10	0.6420	0.14300
20	0.6918	0.19132
30	0.7094	0.23722
40	0.7185	0.28250
50	0.7239	0.32752
100	0.7352	0.55141
200	0.7410	0.99800
500	0.7440	2.33677
1000	0.7468	4.56781

また表1に，c_1 の値をさらに大きくし $c1 = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 500, 1000$ とした場合の経済的計り直しの割合 β^{**} の値と，これに対応する期待費用の値 $C(\beta^{**})$ を示す．表1より，c_1 が大きくなるに伴い，β^{**} も大きくなることが読みとれるが，このことは直感的にも説明可能である．また，c_1 の値を大きくするにつれて，経済的計り直しの割合 β^{**} が不良率を最小にする $\beta^* = 0.7468$ に近づくことがわかる．

6. おわりに

本研究では，現状がそうであるように，秤に狂いが検出された場合には再度計り直すことを考えた．直感的には，計り直しの際に，どの製品を計量した時点で秤に狂いが発生したのかを二分探索方などによって検出する方が効率的であると考えられる．しかし，製品

の重量が相当大きく，人力では製品を運搬，移動できない，しかも山積みされた製品の中から任意の製品を取り出すことも困難であるという現状を考えると，一定の割合のみを計り直すという方策の方が単純かつ明快である．

なお，今後本研究の結果を現場に適用し，その効果に関する検証を行う計画であるが，これにはかなりの労力と時間を必要とする．この関係で，検証の結果は別の機会を利用して報告したい．このとき，本研究の数値例で示したようなガンマ分布ばかりでなく，他の分布に基づく β を現場に適用したときの効果をも併せて報告する予定である．

また，同じ計量工程でも，製品によっては，その重量が規定された範囲に収まっているかどうかを検査するという工程も存在する．このような工程においても重量に関する品質を保証することが必要であるが，これについても今後の課題としたい．

参考文献

[1] Ross, S.M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco, 1970.

[2] Ross, S.M., *Introduction to Probability Models, 5th edition*, Academic Press, New York, 1993.

[3] 尾崎俊治, 確率モデル入門, 朝倉書店, 1996.

[4] Barlow, R.E. and Proschan, F., *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley and Sons, New York, 1965.

[5] 三根久, 河合一, 信頼性・保全性の数理, 朝倉書店, 1982.

[6] 三根久, 河合一, 信頼性・保全性の基礎数理, 日科技連, 1984.